Corrigés des TD du chapitre 18

Exercice 1

On se place dans un repère orthonormé du plan d'origine O et on appelle $\mathscr{C}$ la courbe que l'on étudie.

$$\mathscr{C} : M(t)\begin{cases} x(t) = \cos^2 t + \ln(\sin t) \\ y(t) = \sin t \cos t \end{cases}$$

Les fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sont définies, de classe C^∞ et 2π-périodiques sur $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]2k\pi, (2k+1)\pi\right[$.

La courbe $\mathscr{C}$ est entièrement décrite quand t décrit $]0,\pi[$.

Pour tout $t \in]0,\pi[$, $\pi - t \in]0,\pi[$, et on a $x(\pi - t) = x(t)$ et $y(\pi - t) = -y(t)$, donc $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à l'axe (Ox) et on peut l'étudier sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

On a alors pour tout $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$: $\begin{cases} x'(t) = -2\sin t\cos t + \dfrac{\cos t}{\sin t} = \dfrac{\cos t}{\sin t}\cos 2t \\ y'(t) = \cos 2t \end{cases}$

D'où le tableau :

t	0		$\pi/4$		$\pi/2$
$x'(t)$	$+\infty$	$+$	0		0
x	$-\infty$	$\nearrow$	$(1-\ln 2)/2$	$\searrow$	0
y	0	$\nearrow$	$1/2$	$\searrow$	0
$y'(t)$	1	$+$	0	$+$	-1

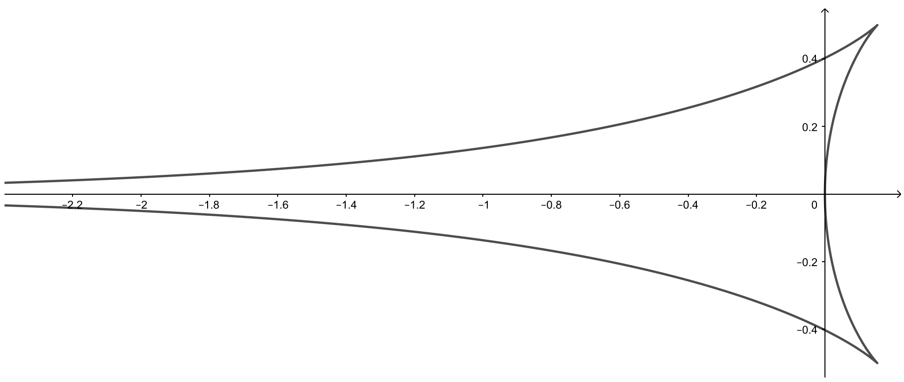
Tangentes particulières :

La tangente est toujours dirigée par $\vec{u}\begin{vmatrix}\cos t \\ \sin t\end{vmatrix}$. Il y a une tangente verticale quand $t = \frac{\pi}{2}$ et $M\left(\frac{\pi}{4}\right)$, de coordonnées $\left(\frac{1-\ln 2}{2}; \frac{1}{2}\right)$, est un point de rebroussement, avec une demi-tangente dirigée par $\vec{u}(1;1)$.

Branche infinie :

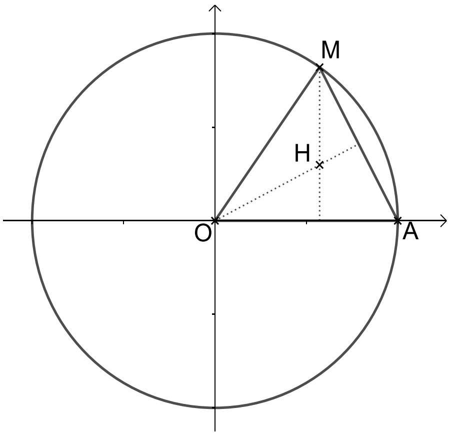
On a $\lim_{t\to 0^+} x(t) = -\infty$ et $\lim_{t\to 0^+} y(t) = 0$, donc l'axe (Ox) est asymptote à $\mathscr{C}$ quand $t \to 0^+$.

Courbe :



Exercice 2

Quitte à modifier le repère, on peut supposer que O est le centre et A le point de coordonnées $(a\,;0)$.



Posons $t=(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})$, donc $M\left(a\cos t, a\sin t\right)$ et notons $H\left(x(t),y(t)\right)$ l'orthocentre de OAM.

Remarquons que si $M=A$ ou A' (où A' est le point diamétralement opposé à A sur $\mathscr{C}$), le triangle est aplati et H n'est pas défini. Donc, on suppose $M\neq A$ et A', donc $t\neq 0\ [\pi]$ (et $\sin t\neq 0$).

On a alors :

- $(OH)\perp(AM)$ donc $\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{AM}=x(t)(a\cos t-a)+y(t)(a\sin t)=0$, soit : $x(t)\cos t+y(t)\sin t=x$.
- $(\mathrm{AH})\perp(\mathrm{OM})$ donc $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{OM}=(x(t)-a)\,a\cos t+y(t)\,a\sin t=0$, soit : $x(t)\cos t+y(t)\sin t=a\cos t$.

On obtient alors :

$$\begin{cases} x(t)\cos t+y(t)\sin t=x \\ x(t)\cos t+y(t)\sin t=a\cos t \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} x(t)=a\cos t \\ y(t)=\dfrac{a(1-\cos t)\cos t}{\sin t}\cdot \end{cases}$$

Les fonctions $t\mapsto x(t)$ et $t\mapsto y(t)$ sont définies, de classe C^∞ et 2π-périodiques sur $\mathbb{R}\setminus\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$.

La courbe est entièrement décrite quand t décrit $]-\pi,0[\cup]0,\pi[$.

Les fonctions $t\mapsto x(t)$ et $t\mapsto y(t)$ sont respectivement paire et impaire, donc la courbe est symétrique par rapport à l'axe (Ox) et on peut l'étudier sur $]0,\pi[$. Alors, pour tout $t\in]0,\pi[$, on a :

$$\begin{cases} x'(t)=-\,a\sin t \\ y'(t)=a(1-\cos t)\dfrac{\cos^2 t+\cos t-1}{\sin^2 t} \end{cases}$$

Les racines de X^2+X-1 sont $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\approx 0{,}6$ et $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\approx -1{,}6$.

En posant $t_0=\arccos\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$, on a :

$$y(t)=a\frac{1-\cos t}{\sin^2 t}\left(\cos t+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)(\cos t-\cos t_0)\,.$$

On obtient le tableau :

t	0		t_0		π
$x'(t)$			$-$		
x	a		$\searrow$		$-a$
y	0	$\nearrow$	$y(t_0)$	$\searrow$	$-\infty$
$y'(t)$		$+$	0	$-$	

On a :

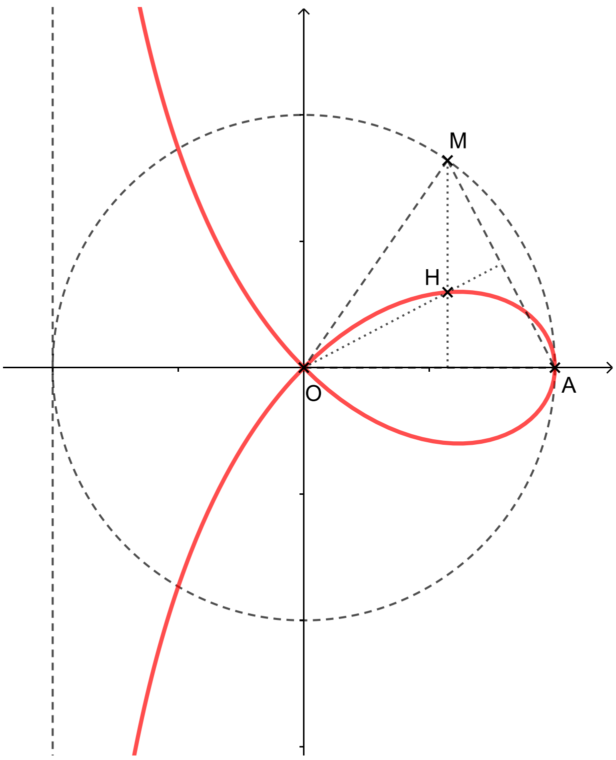
$$y(t)=a\cos t\,\frac{1-\cos t}{\sin t}=a\cos t\,\frac{t^2/2+\underset{0}{o}(t^2)}{t+\underset{0}{o}(t^2)}=a\cos t\,\frac{t/2+\underset{0}{o}(t)}{1+\underset{0}{o}(t)}\quad\Rightarrow\quad\lim_{t\to0}y(t)=0\,.$$

Comme $x(0)=a$, la courbe peut être prolongée au point $(a,0)$ quand $t\to0$.

Enfin :

- En $t=0$, $x'(0)=0$ et $\lim\limits_{t\to0}y'(t)=a\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t^2/2+\underset{0}{o}(t^2)}{t^2+\underset{0}{o}(t^2)}=\dfrac{a}{2}$: il y une tangente verticale.
- En $t=t_0$, il y une tangente horizontale.
- Quand $t\to\pi$, il y a une asymptote verticale d'équation $x=-a$.

On obtient la courbe (en rouge sur la figure suivante).



Exercice 3

Remarquons que $O \in C$ et pour tout point $M(x,y)$ différent de *O*, on peut écrire de manière unique :

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases} \text{ avec } r \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } t \in [0, 2\pi[\,.$$

On a alors :

$$M(x,y) \in C \iff (x^2+y^2)^3 = (x^2-y^2)^2 \iff r^6 = r^4(\cos^2 t - \sin^2 t)^2 \iff r^2 = \cos^2 2t \iff r = |\cos 2t| \,.$$

Donc :

$$M(x,y) \in C \iff \begin{cases} x = |\cos 2t| \cos t \\ y = |\cos 2t| \sin t \end{cases}$$

Ainsi, un paramétrage de C est :

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = |\cos 2t| \cos t \\ y(t) = |\cos 2t| \sin t \end{cases}}$$

Si on pose $f(x,y) = (x^2+y^2)^3 - (x^2-y^2)^2$, *f* est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \iff \begin{cases} 6x(x^2+y^2)^2 - 4x(x^2-y^2) = 0 \\ 6y(x^2+y^2)^2 + 4y(x^2-y^2) = 0 \end{cases}$$

$$\iff x = y = 0 \text{ ou } \begin{cases} 3(x^2+y^2)^2 = 2(x^2-y^2) \\ 3(x^2+y^2)^2 = -2(x^2-y^2) \end{cases} \iff (x,y) = (0,0)$$

Et, comme $O(0,0) \in C$:

$$\boxed{\text{Le seul point singulier de } C \text{ est l'origine } O.}$$

Exercice 4

Si on pose $f(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$, *f* est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

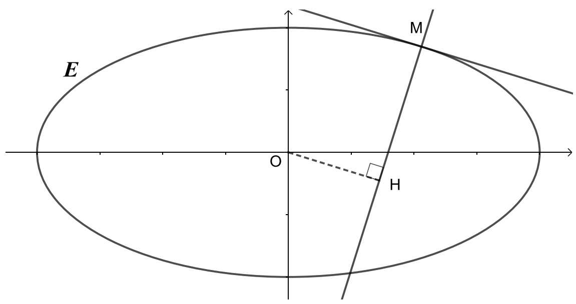
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2\frac{x}{a^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2\frac{y}{b^2} \,.$$

On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ si et seulement si $x = y = 0$ et, comme $O(0,0) \notin \mathcal{E}$, la courbe est régulière.

Soit $M(x_0, y_0) \in \mathcal{E}$ et *H* le projeté orthogonal de *O* sur la normale $\mathcal{N}$ à $\mathcal{E}$ en *M*, comme sur la figure donnée plus loin. On a :

$$d(O, \mathcal{N}) = OH \,.$$

Figure :



La normale $\mathcal{N}$ à $\mathcal{E}$ en M est la droite dirigé par $\overrightarrow{grad}\, f\,(x_0, y_0) = 2\left(\frac{x_0}{a^2}\vec{i} + \frac{y_0}{b^2}\vec{j}\right)$ et passant par M, donc d'équation :

$$\frac{y_0}{b^2}(x - x_0) - \frac{x_0}{a^2}(y - y_0) = 0\,.$$

On a alors :

$$\begin{cases} H(x_H, y_H) \in \mathcal{N} \\ \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{grad}\, f\,(x_0, y_0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y_0}{b^2}(x_H - x_0) - \frac{x_0}{a^2}(y_H - y_0) = 0 \\ x_H\,\frac{x_0}{a^2} + y_H\,\frac{y_0}{b^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = \frac{a^2(a^2 - b^2)x_0 y_0^2}{b^4 x_0^2 + a^4 y_0^2} \\ y_H = \frac{b^2(b^2 - a^2)x_0^2 y_0}{b^4 x_0^2 + a^4 y_0^2} \end{cases}$$

Et :

$$OH^2 = x_H^2 + y_H^2 = \left(\frac{a^2(a^2 - b^2)x_0 y_0^2}{b^4 x_0^2 + a^4 y_0^2}\right)^2 + \left(\frac{b^2(b^2 - a^2)x_0^2 y_0}{b^4 x_0^2 + a^4 y_0^2}\right)^2 = (a^2 - b^2)^2\,\frac{x_0^2 y_0^2}{b^4 x_0^2 + a^4 y_0^2}\,.$$

Si on pose $t = \frac{x_0^2}{a^2} \in [0,1]$, on a $\frac{y_0^2}{b^2} = 1 - t$ car $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$, et $OH^2 = (a^2 - b^2)^2 h(t)$ avec :

$$h(t) = \frac{t(1-t)}{b^2 t + a^2(1-t)}\,.$$

La fonction h est définie et dérivable sur $[0,1]$ (car rationnelle) et :

$$h'(t) = \frac{a^2(1-t)^2 - b^2 t^2}{\left(b^2 t + a^2(1-t)\right)^2} = \frac{a(1-t) + bt}{\left(b^2 t + a^2(1-t)\right)^2}\left(a - (a+b)t\right).$$

On a $h'(t) \geq 0$ pour $t \in \left[0, \frac{a}{a+b}\right]$ et $h'(t) \leq 0$ pour $t \in \left[\frac{a}{a+b}, 1\right]$, donc h est maximale quand $t = \frac{a}{a+b}$.

Ainsi, OH est maximale quand $x_0 = \pm\, a\sqrt{\frac{a}{a+b}}$ et $y_0 = \pm\, b\sqrt{\frac{b}{a+b}}$, et donc :

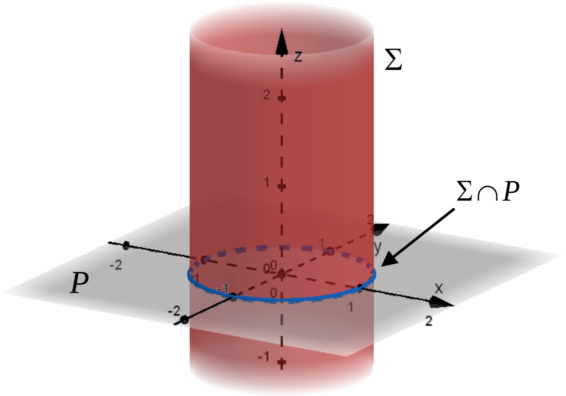
> Les normales à $\mathcal{E}$ les plus éloignées de O sont les normales aux points :
> $\left(a\sqrt{\frac{a}{a+b}}, b\sqrt{\frac{b}{a+b}}\right)$, $\left(a\sqrt{\frac{a}{a+b}}, -b\sqrt{\frac{b}{a+b}}\right)$, $\left(-a\sqrt{\frac{a}{a+b}}, b\sqrt{\frac{b}{a+b}}\right)$ et $\left(-a\sqrt{\frac{a}{a+b}}, -b\sqrt{\frac{b}{a+b}}\right)$

Exercice 5

1) On a $\Sigma = f^{-1}\left(\{1\}\right) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus f(x, y, z) = x^2 + y^2 = 1\right\}$, donc l'intersection de Σ et du plan P d'équation $z = 0$ est la courbe d'équation $x^2 + y^2 = 1$ dans ce plan :

> $\Sigma \cap P$ est le cercle de centre O et de rayon 1 dans la plan P.

La surface Σ est un cylindre de révolution (autour de l'axe de z) et on obtient le graphique :



2) L'application f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ (polynomiale) avec pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 2y \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 0$$

Comme $f(x, y, z) = 1$ est une équation de Σ, une équation du plan tangent à Σ en $M_0(x_0, y_0, z_0)$ est :

$$2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) = 0.$$

Avec $x_0^2 + y_0^2 = 1$, on obtient :

$$\boxed{x_0 x + y_0 y = 1}$$

3) a. Les applications $h_1 : t \mapsto \left(\cos(t+\varphi), \sin(t+\varphi), z_0\right)$ et $h_2 : t \mapsto \left(x_0, y_0, z_0 + t\right)$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, avec :

$$h_1' : t \mapsto \left(-\sin(t+\varphi), \cos(t+\varphi), 0\right) \quad \text{et} \quad h_2' : t \mapsto \left(0, 0, 1\right).$$

L'application g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$, donc, d'après la règle de la chaîne, $G_1 = g \circ h_1$ et $G_2 = g \circ h_2$ sont de de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$G_1'(t) = -\sin(t+\varphi)\frac{\partial g}{\partial x}\left(\cos(t+\varphi), \sin(t+\varphi), z_0\right) + \cos(t+\varphi)\frac{\partial g}{\partial y}\left(\cos(t+\varphi), \sin(t+\varphi), z_0\right)$$

$$G_2'(t) = \frac{\partial g}{\partial z}\left(x_0, y_0, z_0 + t\right)$$

Finalement, avec $(x_0, y_0) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$, on peut conclure que :

$$\boxed{G_1 \text{ et } G_2 \text{ sont dérivables en 0, avec } G_1'(0) = -y_0\frac{\partial g}{\partial x}\left(x_0, y_0, z_0\right) + x_0\frac{\partial g}{\partial y}\left(x_0, y_0, z_0\right) \text{ et } G_2'(0) = \frac{\partial g}{\partial z}\left(x_0, y_0, z_0\right).}$$

b. Remarquons que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\left(\cos(t+\varphi), \sin(t+\varphi), z_0\right) \in \Sigma$ (car $\cos^2(t+\varphi) + \sin^2(t+\varphi) = 1$) et comme la restriction de g à Σ admet un extremum local en M_0 et $G_1(0) = g(x_0, y_0, z_0)$, G_1 admet un extremum local en 0, et comme G_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$G_1'(0) = -y_0\frac{\partial g}{\partial x}\left(x_0, y_0, z_0\right) + x_0\frac{\partial g}{\partial y}\left(x_0, y_0, z_0\right) = 0.$$

De même, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(x_0, y_0, z_0 + t) \in \Sigma$ (car $x_0^2 + y_0^2 = 1$) et $G_2(0) = g(x_0, y_0, z_0)$, donc G_2 admet un extremum local en 0, et comme G_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$G_2'(0) = \frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

On a donc :

$$\nabla f(M_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \right) = 2(x_0, y_0, 0)$$

$$\nabla g(M_0) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \right) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), 0 \right)$$

Ainsi, $\nabla f(M_0)$ et $\nabla g(M_0)$ appartiennent tous les deux au plan vectoriel $\mathrm{Vect}(\vec{i}, \vec{j})$ et :

$$\det_{(\vec{i}, \vec{j})}(\nabla f(M_0), \nabla g(M_0)) = \begin{vmatrix} x_0 & \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \\ y_0 & \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \end{vmatrix} = x_0 \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) - y_0 \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Donc :

$$\boxed{\nabla f(M_0) \text{ et } \nabla g(M_0) \text{ sont colinéaires.}}$$

Exercice 6

1) Posons $f(x, y, z) = xyz - 1$. Alors, $f(x, y, z) = 0$ est une équation de Σ.

L'application *f* est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ (car polynomiale) et pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = yz, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = xz \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = xy.$$

Or, pour tout point de Σ, $xyz = 1$, donc *x*, *y* et *z* sont tous les trois non nuls et ainsi, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) \neq 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) \neq 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \neq 0.$$

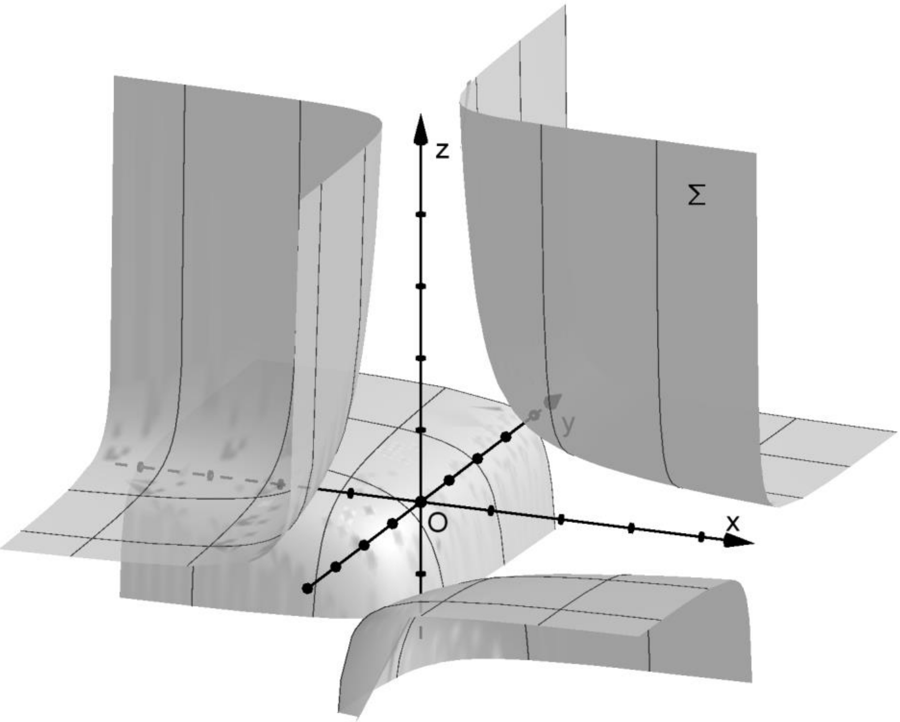
Ceci prouve que tous les points de Σ sont réguliers et donc que :

$$\boxed{\Sigma \text{ est une surface régulière.}}$$

2) Quand $x_0 \neq 0$, l'intersection de Σ et du plan d'équation $x = x_0$ a pour équation $x_0 yz = 1$, soit $y = \dfrac{1}{x_0 z}$: c'est une hyperbole. Quand $x_0 = 0$, l'intersection est vide.

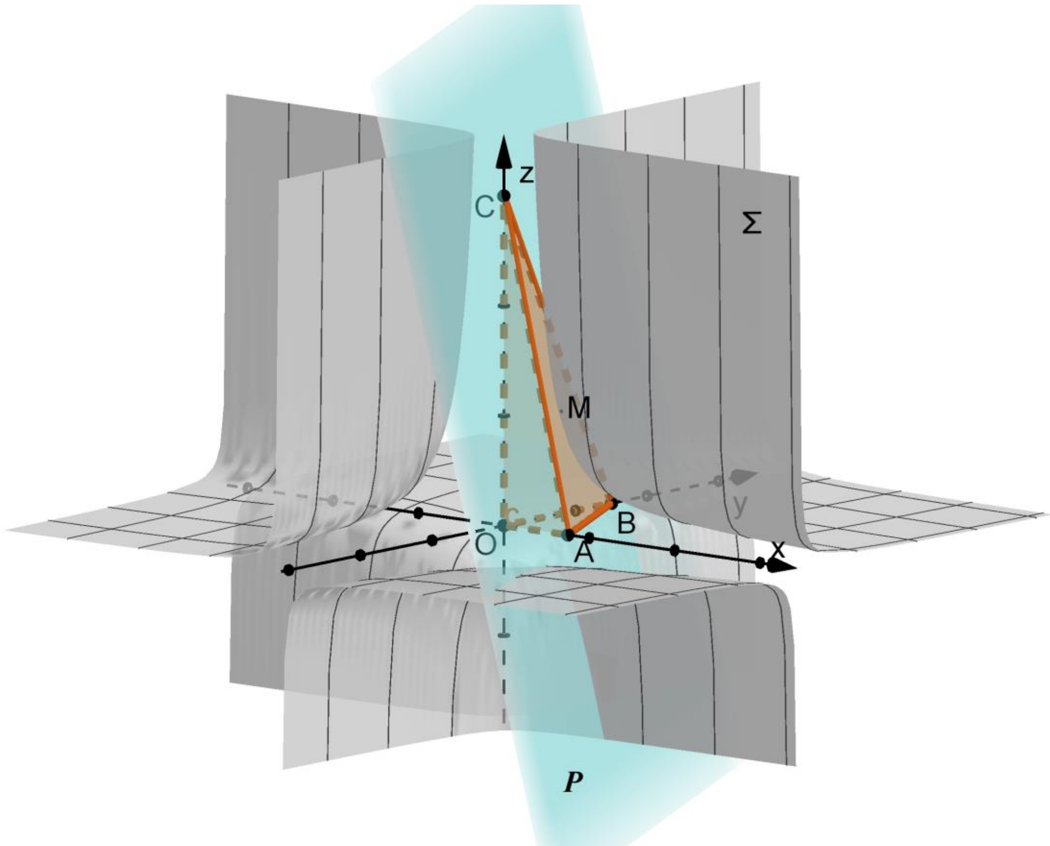
De même avec les plans d'équation $y = y_0$ ou $z = z_0$.

On obtient l’allure :



3) On cherche le volume V_{OABC} du tétraèdre O*ABC* formé par un plan *P* tangent à Σ en un point $M(x_0, y_0, z_0)$, et les trois plans (xOy), (yOz) et (xOz) : *A*, *B* et *C* sont les points d’intersection de *P* avec les axes (Ox), (Oy) et (Oz) respectivement.

On a la figure :



Une équation de P est :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\left(x-x_0\right)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\left(y-y_0\right)+\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\left(z-z_0\right)=0.$$

Soit, avec les dérivées partielles vues plus haute et $x_0y_0z_0=1$:

$$y_0z_0x+x_0z_0y+x_0y_0z=3.$$

On a alors :

$$A=P\cap(Ox) \iff \begin{cases} y_0z_0x_A+x_0z_0y_A+x_0y_0z_A=3 \\ y_A=z_A=0 \end{cases} \iff A\left(\frac{3}{y_0z_0},0,0\right)$$

$$B=P\cap(Oy) \iff \begin{cases} y_0z_0x_A+x_0z_0y_A+x_0y_0z_A=3 \\ x_A=z_A=0 \end{cases} \iff B\left(0,\frac{3}{x_0z_0},0\right)$$

$$C=P\cap(Oz) \iff \begin{cases} y_0z_0x_A+x_0z_0y_A+x_0y_0z_A=3 \\ x_A=y_A=0 \end{cases} \iff C\left(0,0,\frac{3}{x_0y_0}\right)$$

Donc :

$$V_{OABC}=\frac{1}{6}\left|\det(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})\right|=\frac{1}{6}\left|\frac{3}{y_0z_0}\frac{3}{x_0z_0}\frac{3}{x_0y_0}\right|=\frac{1}{6}\frac{27}{(x_0y_0z_0)^2}=\frac{9}{2}.$$

Ainsi :

Le volume du tétraèdre formé par un plan tangent à Σ et les trois plans (xOy), (yOz) et (xOz) est constant et vaut 4,5.

Exercice 7

1) Le plan (xOy) est le plan d'équation $z=0$. La projection de S sur le plan (xOy) a donc pour équation (dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ de ce plan) $x^2+y^2=1$ et donc :

La projection de S sur le plan (xOy) est le cercle de centre O et de rayon 1.

2) Posons $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2xyz-1$. Alors, $f(x,y,z)=0$ est une équation de S.

L'application f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ (car polynomiale) et pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=2(x-yz),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=2(y-xz)\ \text{ et }\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=2(z-xy).$$

On a alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=0 \iff \begin{cases} x=yz \\ y=xz \\ z=xy \end{cases} \iff \begin{cases} x=yz \\ y=xz \\ z=x^2z \end{cases} \iff x=y=z=0 \text{ ou } \begin{cases} x^2=1 \\ yz=x \\ z^2=1 \end{cases}$$

Comme on a de plus, $x^2+y^2+z^2-2xyz=1$, ceci donne :

$$\begin{cases} x^2=y^2=z^2=1 \\ xyz=1 \end{cases}$$

Et on obtient quatre points singuliers :

$$\boxed{(1,1,1)\quad(-1,-1,1)\quad(-1,1,-1)\quad(1,-1,-1)}$$

3) Soit $M_0(x_0,y_0,z_0)$ un point de S et $\vec{u}(a,b,c)$ un vecteur unitaire ($a^2+b^2+c^2=1$).

La droite D passant par M_0 et dirigée par $\vec{u}$ admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x=at+x_0 \\ y=bt+y_0 \\ z=ct+z_0 \end{cases} \quad \text{avec } t\in\mathbb{R}.$$

Alors, $D\subset S$ si et seulement si pour tout $t\in\mathbb{R}$:

$$(at+x_0)^2+(bt+y_0)^2+(ct+z_0)^2-2(at+x_0)(bt+y_0)(ct+z_0)=1.$$

Avec $x_0^2+y_0^2+z_0^2-2x_0y_0z_0=1$ et $a^2+b^2+c^2=1$, ceci revient à :

$$\begin{cases} abc=0 \\ 2(x_0bc+abz_0+acy_0)=1 \\ ay_0z_0+bx_0z_0+cx_0y_0=ax_0+by_0+cz_0 \end{cases}$$

Si $a=0$, on a $b^2+c^2=1$ et on peut écrire $b=\cos\alpha$ et $c=\sin\alpha$, et le système ci-dessus se récrit :

$$\begin{cases} 2bcx_0=1 \\ bx_0z_0+cx_0y_0=by_0+cz_0 \end{cases}$$

Ceci implique (entre autres) que x_0, b et c (donc $\sin 2\alpha$) sont non nuls et :

$$\begin{cases} x_0=\dfrac{1}{2bc} \\ \dfrac{1-2c^2}{2c}z_0=\dfrac{2b^2-1}{2b}y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=\dfrac{1}{\sin 2\alpha} \\ (\cos 2\alpha)\,z_0=(\cos 2\alpha\tan\alpha)\,y_0 \end{cases}$$

Si $\cos 2\alpha=0$, soit $b^2=c^2=\dfrac{1}{2}$, donc $|b|=|c|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (avec bc du signe de x_0), on obtient $\sin 2\alpha=\pm 1$, donc $x_0=\pm 1$ et $x_0^2+y_0^2+z_0^2-2x_0y_0z_0=1$ donne :

$$\begin{cases} y_0=z_0,\ b=c & \text{si } x_0=1 \\ y_0=-z_0,\ b=-c & \text{si } x_0=-1 \end{cases}$$

Soit :

$$(x_0,y_0,z_0)=(1,k,k) \text{ ou } (-1,-k,k) \text{ avec } k\in\mathbb{R}.$$

On obtient alors les droites d'équations :

$$\begin{cases} x=1 \\ y=z \end{cases} \quad\text{ou}\quad \begin{cases} x=-1 \\ y=-z \end{cases}$$

Si $\cos 2\alpha \neq 0$ (soit $\alpha \neq 0 \left[\dfrac{\pi}{4}\right]$ avec aussi $\sin 2\alpha \neq 0$), on obtient :

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{1}{\sin 2\alpha} \\ z_0 = (\tan\alpha)\, y_0 \end{cases}$$

Et $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 2x_0y_0z_0 = 1$ donne $\sin^2 2\alpha = 1$, ce qui est absurde car $\cos 2\alpha \neq 0$.

Comme a, b et c jouent le même rôle, on obtient finalement les six droites d'équations cartésiennes :

$$\boxed{D_1 : \begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases} \text{ ou } D_2 : \begin{cases} x = -1 \\ y = -z \end{cases} \text{ ou } D_3 : \begin{cases} y = 1 \\ x = z \end{cases} \text{ ou } D_4 : \begin{cases} y = -1 \\ x = -z \end{cases} \text{ ou } D_5 : \begin{cases} z = 1 \\ x = y \end{cases} \text{ ou } D_6 : \begin{cases} z = -1 \\ x = -y \end{cases}}$$

4) Soit S_c la partie de S limitée au cube $[-1,1]^3$, soit :

$$S_c = \left\{ M(x,y,z) \in \mathscr{E} \setminus (x,y,z) \in [-1,1]^3 \text{ et } x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz = 1 \right\}$$

où $\mathscr{E}$ désigne l'espace. Notons par ailleurs :

$$\Sigma = \left\{ M\left(\cos u, \cos v, \cos(u+v)\right) \in \mathscr{E} \setminus (u,v) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

On veut prouver que $S_c = \Sigma$.

Pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, on a $\left(\cos u, \cos v, \cos(u+v)\right) \in [-1,1]^3$ et :

$$\begin{aligned} &\cos^2 u + \cos^2 v + \cos^2(u+v) - 2\cos u \cos v \cos(u+v) \\ &= \cos^2 u + \cos^2 v + \left(\cos u \cos v - \sin u \sin v\right)^2 - 2\cos u \cos v \left(\cos u \cos v - \sin u \sin v\right) \\ &= \cos^2 u + \cos^2 v + \cos^2 u \cos^2 v + \sin^2 u \sin^2 v - 2\cos u \cos v \sin u \sin v \\ &\qquad - 2\cos u^2 \cos^2 v + 2\cos u \cos v \sin u \sin v \\ &= \cos^2 u + \cos^2 v - \cos^2 u \cos^2 v + (1 - \cos^2 u)(1 - \cos^2 v) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Donc, $M\left(\cos u, \cos v, \cos(u+v)\right) \in S_c$ et ainsi : $\underline{\Sigma \subset S_c}$.

Soit $M(x,y,z) \in S_c$. On a $(x,y,z) \in [-1,1]^3$, donc il existe $(u,v,w) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$x = \cos u\,, \quad y = \cos v \quad \text{et} \quad z = \cos w.$$

On a de plus :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz = 1 &\iff z^2 - 2xyz + x^2y^2 = 1 - x^2 - y^2 + x^2y^2 \\ &\iff (z - yz)^2 = (1 - x^2)(1 - y^2) \end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{aligned} (\cos w - \cos u \cos v)^2 = (1 - \cos^2 u)(1 - \cos^2 v) &\iff (\cos w - \cos u \cos v)^2 = (\sin u \sin v)^2 \\ &\iff \begin{cases} \cos w - \cos u \cos v = \sin u \sin v \\ \quad ou \\ \cos w - \cos u \cos v = -\sin u \sin v \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \cos w = \cos(u - v) \\ \quad ou \\ \cos w = \cos(u + v) \end{cases} \end{aligned}$$

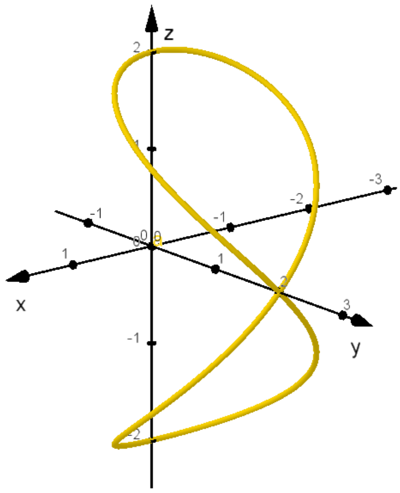
Ainsi, $(x,y,z)=\big(\cos u, \cos(-v), \cos(u-v)\big)$ ou $(x,y,z)=\big(\cos u, \cos v, \cos(u+v)\big)$ et dans les deux cas, on a $M\in\Sigma$, donc : $\underline{S_c\subset\Sigma}$.

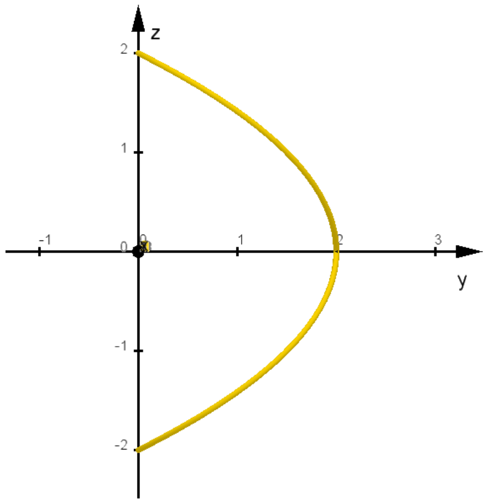
Finalement, on a bien $S_c=\Sigma$, autrement dit :

$$\boxed{\text{La partie de } S \text{ limitée au cube } [-1,1]^3 \text{ admet le paramétrage } (u,v)\mapsto\big(\cos u, \cos v, \cos(u+v)\big).}$$

Exercice 8

Commençons par représenter la courbe C sous deux angles (avec ici $a=1$).





Remarquons que les fonctions $x:t\mapsto a\sin(2t)$, $y:t\mapsto a\big(1-\cos(2t)\big)$ et $z:t\mapsto 2a\cos t$ sont 2π-périodiques, donc la courbe est entièrement parcourue quand t décrit $[-\pi,\pi]$.

De plus, si $M(t)$ est le point de coordonnées $\big(a\sin(2t), a\big(1-\cos(2t)\big), 2a\cos t\big)$, $M(-t)$ est de coordonnées $\big(-a\sin(2t), a\big(1-\cos(2t)\big), 2a\cos t\big)$ donc symétrique par rapport au plan (yOz) et $M(t+\pi)$ est de coordonnées $\big(a\sin(2t), a\big(1-\cos(2t)\big), -2a\cos t\big)$ donc symétrique par rapport au plan (xOy).

Ainsi, C est symétrique par rapport aux plans (xOy) et (yOz).

Nous donc chercher une sphère, un cylindre parabolique et un cylindre de révolution symétriques par rapport à ces deux plans.

Soit S une sphère de centre $\Omega(0,\beta,0)$, d'équation $x^2+(y-\beta)^2+z^2=cste$.

On a alors pour tout $t\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}x(t)^2+\big(y(t)-\beta\big)^2+z(t)^2 &= a^2\sin^2(2t)+\Big(a\big(1-\cos(2t)\big)-\beta\Big)^2+4a^2\cos^2 t\\ &= a^2\sin^2(2t)+a^2\big(1-2\cos(2t)+\cos^2(2t)\big)-2a\beta\big(1-\cos(2t)\big)+\beta^2+4a^2\cos^2 t\\ &= 2a^2-2a^2\cos(2t)-2a\beta\big(1-\cos(2t)\big)+\beta^2+2a^2\big(1+\cos(2t)\big)\\ &= 4a^2+\beta^2-2a\beta+2a\beta\cos(2t)\end{aligned}$$

Donc, en prenant $\beta=0$, on a $x(t)^2+y(t)+z(t)^2=(2a)^2$ et ainsi, $M(t)\in S$ pour tout $t\in\mathbb{R}$, donc :

$$\boxed{\text{La courbe } C \text{ est tracée sur la sphère de centre O et de rayon } 2a.}$$

D'après la seconde vue de C donnée plus haut, considérons le cylindre parabolique d'équation $y + pz^2 = cste$ avec $p > 0$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} y(t) + pz(t)^2 &= a\left(1 - \cos(2t)\right) + p\left(4a^2\cos^2 t\right) \\ &= a\left(1 - \cos(2t)\right) + 2a^2 p\left(1 + \cos(2t)\right) \\ &= 2a^2 p + a + a\left(2ap - 1\right)\cos(2t) \end{aligned}$$

Si on prend $2ap - 1 = 0$, soit $p = \dfrac{1}{2a}$, obtient pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$y(t) + \frac{1}{2a} z(t)^2 = 2a.$$

Donc :

$$\boxed{\text{La courbe } C \text{ est tracée sur le cylindre parabolique d'équation } y = 2a - \frac{1}{2a} z^2.}$$

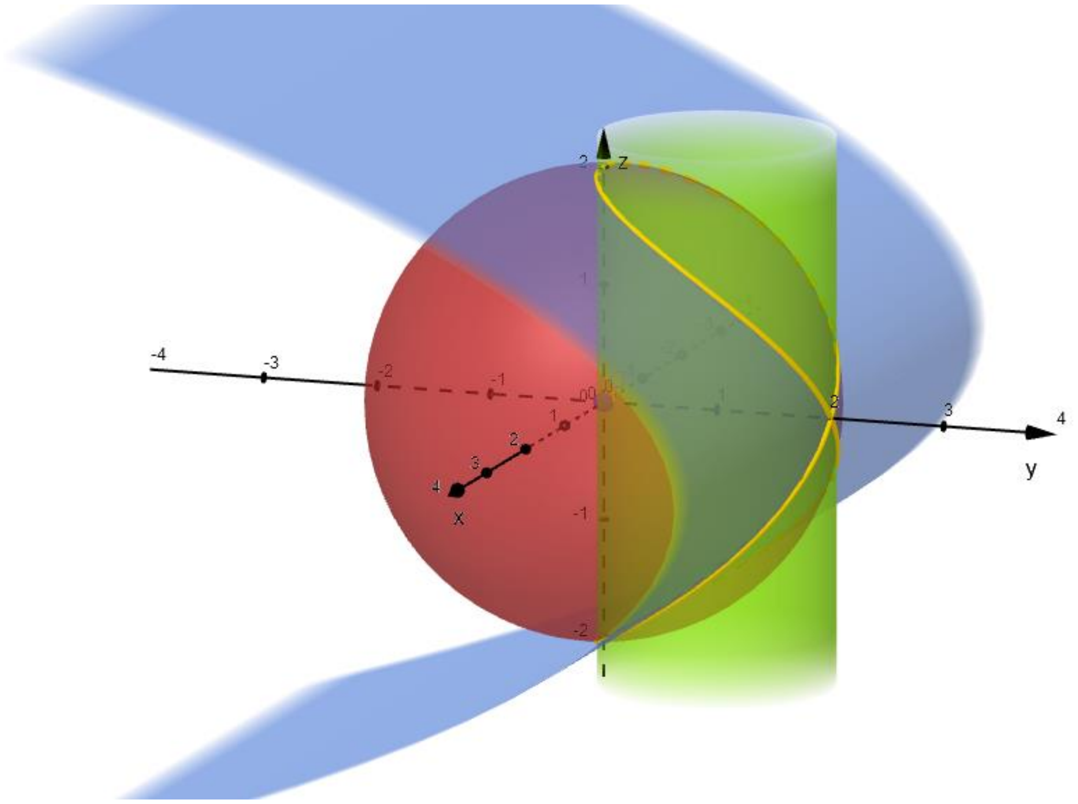
On peut remarquer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$x(t)^2 + \left(y(t) - a\right)^2 = a^2 \sin^2(2t) + a^2 \cos^2(2t) = a^2.$$

Donc :

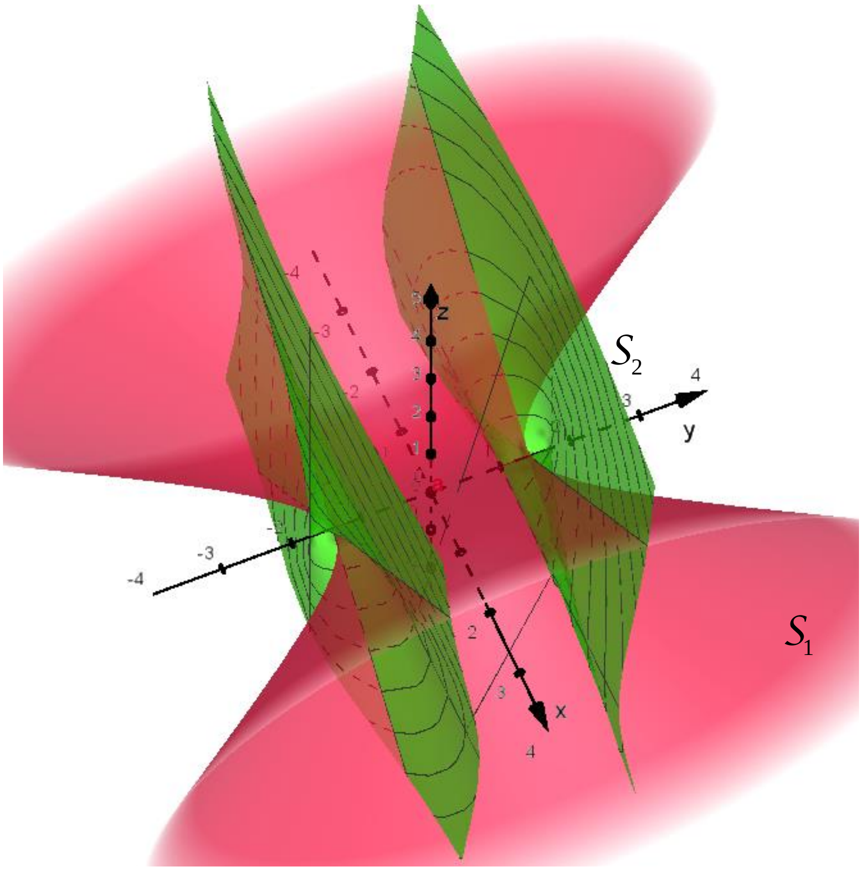
$$\boxed{\text{La courbe } C \text{ est tracée sur le cylindre de révolution d'équation } x^2 + (y-a)^2 = a^2.}$$

On obtient le schéma :



Exercice 9

On a le graphique :



Les applications $f_1:(x,y,z)\mapsto y^2(x^2+z^2)-x^2-3z^2$ et $f_2:(x,y,z)\mapsto -x^2+\dfrac{y^2}{2}+z^2-1$ sont polynômiales donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ et pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z)=2x(y^2-1)\\ \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z)=2y(x^2+z^2)\\ \dfrac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z)=2z(y^2-3)\end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases}\dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z)=-2x\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z)=y\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z)=2z\end{cases}$$

Remarquons que si l'on remplace x (*resp.* y, *resp.* z) par $-x$ (*resp.* $-y$, *resp.* $-z$), les équations de S_1 et S_2 restent vérifiées, donc S_1 et S_2 sont symétriques par rapport aux trois plans (xOy), (yOz) et (xOz). On peut ainsi limiter l'étude à aux points des courbes dont les trois coordonnées sont positives.

Soit un point $M(x,y,z)$ de l'espace. On a :

$$M\in S_1\cap S_2 \iff \begin{cases}y^2(x^2+z^2)-x^2-3z^2=0\\ -x^2+\dfrac{y^2}{2}+z^2=1\end{cases} \iff \begin{cases}\left[2+2(x^2-z^2)\right](x^2+z^2)-x^2-3z^2=0\\ y^2=2+2(x^2-z^2)\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}(x^2-z^2)\left[1+2(x^2+z^2)\right]=0\\ y^2=2+2(x^2-z^2)\end{cases} \iff \begin{cases}x^2-z^2=0\\ y^2=2\end{cases}$$

Si de plus, on prend $x\geq 0$, $y\geq 0$ et $z\geq 0$, on obtient les points $M(x,\sqrt{2},x)$ avec $x\geq 0$.

On a alors :

$$\overrightarrow{grad}\ f_1(x,\sqrt{2},x) = 2x\vec{i} + 4\sqrt{2}x^2\vec{j} - 2x\vec{k} = 2x\,(\vec{i} + 2\sqrt{2}x\vec{j} - \vec{k})$$
$$\overrightarrow{grad}\ f_2(x,\sqrt{2},x) = -2x\vec{i} + \sqrt{2}\,\vec{j} + 2x\vec{k}$$

Notons $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ les plans tangents à S_1 et S_2 en $M(x,\sqrt{2},x)$.

Quel que soit $x \geq 0$:

- $\overrightarrow{grad}\ f_1(x,\sqrt{2},x)$ est colinéaire à $\vec{i} + 2\sqrt{2}x\vec{j} - \vec{k}$, qui est donc normal à $\mathcal{P}_1$ et non nul ;
- $\overrightarrow{grad}\ f_2(x,\sqrt{2},x) = -2x\vec{i} + \sqrt{2}\,\vec{j} + 2x\vec{k}$ est normal à $\mathcal{P}_1$ et non nul.

Les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont perpendiculaires si et seulement si un vecteur normal (non nul) à $\mathcal{P}_1$ est orthogonal à un vecteur normal à $\mathcal{P}_2$, donc si et seulement si $\vec{i} + 2\sqrt{2}x\vec{j} - \vec{k}$ et $-2x\vec{i} + \sqrt{2}\,\vec{j} + 2x\vec{k}$ sont orthogonaux.

Or, quel que soit $x \geq 0$:

$$\left(\vec{i} + 2\sqrt{2}x\vec{j} - \vec{k}\right).\left(-2x\vec{i} + \sqrt{2}\,\vec{j} + 2x\vec{k}\right) = -2x + 4x - 2x = 0\,.$$

Ainsi :

En chacun de leurs points communs, les plans tangents à S_1 et S_2 sont perpendiculaires.

Exercice 10

1) La fonction $f:(x,y,z) \mapsto (x+y+z+1)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+1\right)$ est, elle aussi, rationnelle et définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^3$, donc de classe C^2 sur $(\mathbb{R}_+^*)^3$. Pour tout $(x,y,z) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$, on a :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}+1-\dfrac{1}{x^2}(x+y+z+1) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}+1-\dfrac{1}{y^2}(x+y+z+1) \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}+1-\dfrac{1}{z^2}(x+y+z+1) \end{cases}$$

Et :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = 2\dfrac{y+z+1}{x^3} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = 2\dfrac{x+z+1}{y^3} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = 2\dfrac{x+y+1}{z^3} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y,z) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y,z) = -\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}(x,y,z) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(x,y,z) = -\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{z^2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}(x,y,z) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(x,y,z) = -\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{1}{z^2} \end{cases}$$

Donc, pour tout $(x,y,z)\in(\mathbb{R}_+^*)^3$:

$$\boxed{H_f(x,y,z)=\begin{pmatrix} 2\dfrac{y+z+1}{x^3} & -\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2} & -\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{z^2} \\ -\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2} & 2\dfrac{x+z+1}{y^3} & -\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{1}{z^2} \\ -\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{z^2} & -\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{1}{z^2} & 2\dfrac{x+y+1}{z^3} \end{pmatrix}}$$

Remarquons que $(\mathbb{R}_+^*)^3$ est un ouvert de $\mathbb{R}^3$, donc si *f* admet un extremum (local ou global), il est atteint en un point critique. Cherchons alors les points critiques de *f*. Pour $(x,y,z)\in(\mathbb{R}_+^*)^3$, on a :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}+1-\dfrac{1}{x^2}(x+y+z+1)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}+1-\dfrac{1}{y^2}(x+y+z+1)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}+1-\dfrac{1}{z^2}(x+y+z+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x=y=z=1.$$

Alors :

$$H_f(1,1,1)=\begin{pmatrix} 6 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}=2A \text{ avec } A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Et :

$$\chi_A=\begin{vmatrix} X-3 & 1 & 1 \\ 1 & X-3 & 1 \\ 1 & 1 & X-3 \end{vmatrix} \underset{C_1\leftarrow C_1+C_2+C_3}{=} \begin{vmatrix} X-1 & 1 & 1 \\ X-1 & X-3 & 1 \\ X-1 & 1 & X-3 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}{=} \begin{vmatrix} X & 1 & 1 \\ 0 & X-4 & 0 \\ 0 & 0 & X-4 \end{vmatrix} =(X-1)(X-4)^2.$$

Ainsi, $Sp(A)=\{1,4\}\subset\mathbb{R}_+^*$, donc $A\in S_3^{++}(\mathbb{R})$. Ainsi, $H_f(1,1,1)=2A\in S_3^{++}(\mathbb{R})$ et donc, *f* admet un minimum local strict en $(1,1,1)$, qui vaut $f(1,1,1)=16$. Remarquons que pour tous $a,b\in\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{4}{a+b}=\frac{(a+b)^2-4ab}{(a+b)ab}=\frac{(a-b)^2}{(a+b)ab}\geq 0.$$

Donc, pour tous $a,b\in\mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\geq\dfrac{4}{a+b}$.

En appliquant ceci à $(a,b)=(x,y)$, $(a,b)=(z,1)$, puis $(a,b)=(x+y,z+1)$ avec $(x,y,z)\in(\mathbb{R}_+^*)^3$, on obtient :

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\geq\dfrac{4}{x+y} \\ \dfrac{1}{z}+1\geq\dfrac{4}{z+1} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+1\geq 4\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{z+1}\right)\geq 4\frac{4}{x+y+z+1} \quad \Rightarrow \quad f(x,y,z)\geq 16.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ admet 16 pour minimum global sur } (\mathbb{R}_+^*)^3 \text{, atteint en } (1,1,1).}$$

2) Sur le même principe que pour la précédente, la fonction $f:(x,y)\mapsto(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ est, elle aussi, rationnelle et définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, donc de classe C^2 sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ et pour tout $(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{x^2}(x+y)=\frac{1}{y}-\frac{y}{x^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{y^2}(x+y)=\frac{1}{x}-\frac{x}{y^2} \end{cases}$$

En redérivant comme plus haut, on obtient pour tout $(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$:

$$\boxed{H_f(x,y)=\begin{pmatrix} 2\frac{y}{x^3} & -\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2} \\ -\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2} & 2\frac{x}{y^3} \end{pmatrix}}$$

Remarquons que $(\mathbb{R}_+^*)^2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, donc si *f* admet un extremum (local ou global), il est atteint en un point critique. Cherchons alors les points critiques de *f*.

Pour $(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$, on a :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{x^2}(x+y)=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{y^2}(x+y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x=y\,.$$

Alors, pour tout $a\in\mathbb{R}_+^*$, (a,a) est un point critique de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ et :

$$H_f(a,a)=\frac{2}{a^2}A \text{ avec } A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a $\chi_A=X(X-2)$, donc, $Sp(A)=\{0,2\}\subset\mathbb{R}_+^*$ et $A\in S_3^+(\mathbb{R})$. On ne peut alors utiliser le théorème du cours. Mais, pour tout $a\in\mathbb{R}_+^*$, $f(a,a)=2a\frac{2}{a}=4$ et on a vu dans la question précédente que pour tout $(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{4}{x+y} \quad\Leftrightarrow\quad f(x,y)=(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\geq 4\,.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ admet 4 pour minimum global sur } (\mathbb{R}_+^*)^2\text{, atteint en tout } (a,a) \text{ avec } a\in\mathbb{R}_+^*.}$$

Exercice 11

Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ et *D* la droite passant par $(0,0)$ et dirigée par (a,b). Alors, pour tout $t\in\mathbb{R}$:

$$g(t)=f(at,bt)=(a^2t^2-bt)(3a^2t^2-bt)=3a^4t^4-4a^2bt^3+b^2t^2\,.$$

Alors, la restriction de *f* à la droite *D* admet un minimum local strict en $(0,0)$ si et seulement si *g* admet un minimum local strict en 0.

La fonction *g* est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t\in\mathbb{R}$, $g'(t)=12a^4t^3-12a^2bt^2+2b^2t$.

- Si $b \neq 0$, on a $g'(t) \underset{t \to 0}{\sim} 2b^2 t$, donc $g'(t)$ s'annule en 0 en passant de négatif à positif : g admet un minimum local strict en 0.
- Si $b = 0$, alors $a \neq 0$ et on a $g'(t) = 12a^4 t^3$, donc, à nouveau, $g'(t)$ s'annule en 0 en passant de négatif à positif : g admet un minimum local strict en 0.

Finalement, dans les deux cas, g admet un minimum local strict en 0 et ainsi :

> La restriction de f à toutes les droites passant par $(0,0)$ admet un minimum local strict en $(0,0)$.

On a $f(0,0) = 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f(x,0) = 3x^4 > 0$$
$$f(x,2x^2) = -x^4 < 0$$

Ceci prouve que 0 n'est pas un extremum local en $(0,0)$ et ainsi :

> f n'a pas d'extremum local en $(0,0)$.

Exercice 12

1) Pour tout réel x, on a :

$$x^2 + 4x + 3 = x^2 + 4x + 4 - 1 = (x+2)^2 - 1 = (x+1)(x+3).$$

Or, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\cos^2 t + 4\cos t + 3 = (\cos t + 1)(\cos t + 3) \geq 0$, donc $t \mapsto x(t)$ est définie sur $\mathbb{R}$. Il en va de même pour $t \mapsto y(t)$, donc :

> Le domaine de définition de $t \mapsto M(t)$ est $\mathbb{R}$.

Comme les fonctions cos et sin sont 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$, il en va de même pour $t \mapsto M(t)$ et la courbe $\mathscr{C}$ est entièrement parcourue quand t décrit $[-\pi, \pi]$.

Or, $[-\pi, \pi]$ est symétrique par rapport à 0 et pour tout $t \in [-\pi, \pi]$, on a $\begin{cases} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases}$. Donc, $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à l'axe des abscisses du repère (orthonormé). Ainsi :

> On peut étudier $t \mapsto M(t)$ sur $[0, \pi]$.

2) La fonction $t \mapsto y(t)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Par contre, comme la fonction racine carrée est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto x(t)$ est de classe C^∞ en tout point de $\mathbb{R}$ tel que $\cos^2 t + 4\cos t + 3 = (\cos t + 1)(\cos t + 3) \neq 0$, soit $\cos t \neq -1$, ou encore $t \neq \pi \; [2\pi]$.

Ainsi, $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ est de classe C^∞ sur $[0, \pi[$ avec :

$$\begin{cases} x'(t) = \dfrac{-2\sin t \cos t - 4\sin t}{2\sqrt{\cos^2 t + 4\cos t + 3}} = -\sin t \dfrac{\cos t + 2}{\sqrt{\cos^2 t + 4\cos t + 3}} \leq 0 \\ y'(t) = \cos t \end{cases}$$

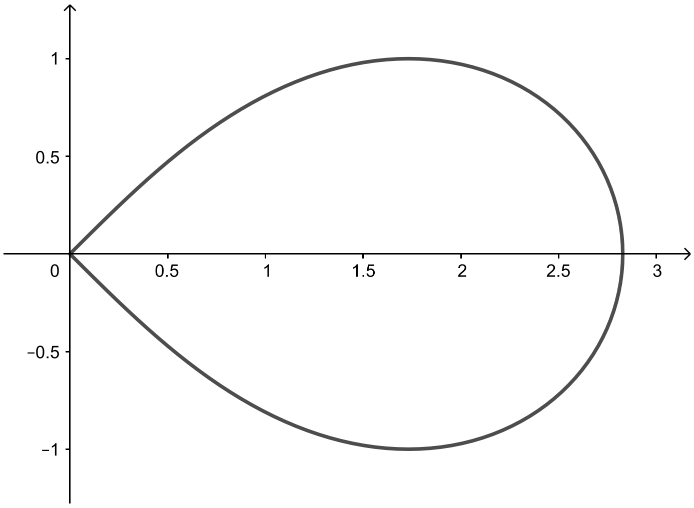
On peut alors construire le tableau :

t	0		$\pi/2$		π
$x'(t)$	0		$-$		
x	$2\sqrt{2}$		$\searrow$		0
y	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0
$y'(t)$	1	$+$	0	$-$	-1

- Pour $t=0$, $x'(0)=0$ et $y'(0)=1$: il y a une tangente verticale au point $M(0)\left(2\sqrt{2},0\right)$.
- Pour $t=\dfrac{\pi}{2}$, $x'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ et $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$: il y a une tangente horizontale au point $M\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\left(\sqrt{3},1\right)$.
- Pour $t=\pi$, $\lim\limits_{t\to\pi} x'(t)=-1$ et $y'(\pi)=-1$: il y a une tangente dirigé par $\vec{u}\left(1,1\right)$ au point $M(\pi)=O$, l'origine du repère.

Il n'y a pas de point stationnaire.

On obtient la courbe (complétée par symétrie) :



3) Quand $t\in\left[0,\pi\right]$, on a $M(t)=O$ si et seulement si $t=\pi$ et on a vu que dans ce cas, la tangente dirigé par $\vec{u}\left(1,1\right)$: c'est la première bissectrice. Une équation de cette tangente est donc $y=x$.

Par symétrie par rapport à (Ox), la seconde bissectrice, d'équation $y=-x$, est a aussi tangente à $\mathscr{C}$ en O.

$$\boxed{\text{Les équations des tangentes à l'origine du repère sont } y=x \text{ et } y=-x.}$$

4) Pour tout $t\in\mathbb{R}$, $x(t)\geq 0$ et :

$$x(t)^2+y(t)^2=4+4\cos t \quad\Leftrightarrow\quad \cos t=\frac{1}{4}\left(x(t)^2+y(t)^2\right)-1.$$

Alors :

$$\begin{aligned} x(t)^2 &= \left[\frac{1}{4}\left(x(t)^2+y(t)^2\right)-1\right]^2+4\left[\frac{1}{4}\left(x(t)^2+y(t)^2\right)-1\right]+3 \\ &= \frac{1}{16}\left(x(t)^2+y(t)^2\right)^2+\frac{1}{2}\left(x(t)^2+y(t)^2\right) \end{aligned}$$

Donc :

$$\left(x(t)^2+y(t)^2\right)^2+8\left(y(t)^2-x(t)^2\right)=0.$$

La courbe $\mathscr{C}$ est incluse dans la courbe d'équation cartésienne :

$$(x^2+y^2)^2+8(y^2-x^2)=0 \quad\Leftrightarrow\quad (x^2+y^2+4)^2=16(x^2+1) \quad\Leftrightarrow\quad x^2+y^2+4=4\sqrt{x^2+1}.$$

Réciproquement, soit un point $M(x,y)$ tel que $x\geq 0$ et $x^2+y^2+4=4\sqrt{x^2+1}$. On a alors :

$$y^2=-(x^2+1)+4\sqrt{x^2+1}-3=-g\left(\sqrt{x^2+1}\right)$$

avec $g(u)=u^2-4u+3=(u-1)(u-3)$.

On a $\sqrt{x^2+1}\geq 1$ et quand $u>3$, on a $g(u)<0$, donc $\sqrt{x^2+1}\leq 3$ (sinon on aurait $y^2<0$).

Or, quand $\sqrt{x^2+1}\in[1,3]$, on a $0\leq y^2=-g\left(\sqrt{x^2+1}\right)\leq 1$, donc $-1\leq y\leq 1$ et il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que $y=\sin t$.

Alors :

$$\sin^2 t=-(x^2+1)+4\sqrt{x^2+1}-3 \quad\Leftrightarrow\quad (x^2+1)-4\sqrt{x^2+1}+4=1-\sin^2 t \quad\Leftrightarrow\quad \left(\sqrt{x^2+1}-2\right)^2=\cos^2 t.$$

Et :

$$\sqrt{x^2+1}=2\pm\cos t \quad\Leftrightarrow\quad x^2=\left(2\pm\cos t\right)^2-1=\cos^2 t\pm 4\cos t+3.$$

Avec $x\geq 0$, on obtient :

$$x=\sqrt{\cos^2 t+4\cos t+3} \quad\text{ou}\quad x=\sqrt{\cos^2 t-4\cos t+3}=\sqrt{\cos^2(\pi-t)-4\cos(\pi-t)+3}.$$

Et comme $y=\sin t=\sin(\pi-t)$, on a finalement $M=M(t)$ ou $M(\pi-t)$ et donc $M\in\mathscr{C}$.

Finalement :

$$\boxed{\text{Une équation cartésienne de } \mathscr{C} \text{ est } x^2+y^2+4=4\sqrt{x^2+1} \text{ avec } x\geq 0.}$$

Exercice 13

Posons $f(x,y,z)=x^2-y^2-z-1$.

La fonction *f* est polynomiale donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ et pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=-1\neq 0$, donc tous les points de *S* sont réguliers.

Alors, pour tout point $M(x,y,z)$ de *S*, le plan T_M, tangent à *S* en *M*, existe et admet pour vecteur normal :

$$\overrightarrow{grad}\,f\left|\begin{array}{l}2x\\-2y\\-1\end{array}\right..$$

Un vecteur normal à *P*, d'équation $x-2y-z=0$, est $\vec{n}\left|\begin{array}{l}1\\-2\\-1\end{array}\right.$ et le plan T_M est parallèle à *P* si et seulement si $\overrightarrow{grad}\,f$ et $\vec{n}$ sont colinéaires. Comme ils ont la même cote, $z_{\overrightarrow{grad}\,f}=z_{\vec{n}}=-1$, les vecteurs $\overrightarrow{grad}\,f$ et $\vec{n}$ sont colinéaires si et seulement s'ils sont égaux, ce qui donne : $x=\dfrac{1}{2}$ et $y=1$.

Enfin, comme $M(x,y,z)\in S$, on a $x^2-y^2-z=1$, ce qui donne ici : $z=x^2-y^2-1=\frac{1}{4}-1-1=-\frac{7}{4}$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{Le seul point de } S \text{ où le plan tangent à } S \text{ est parallèle à } P \text{ est } M\left(\frac{1}{2},1,-\frac{7}{4}\right).}$$

Exercice 14

Notons $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormé direct de l'espace.

1) Une droite est parallèle au plan (xOy) si et seulement si elle est dirigée par un vecteur de la forme $a\vec{i}+b\vec{j}$ avec $(a,b)\neq(0,0)$.

Si D est une parallèle au plan (xOy) et passant par un point $A(x_A,y_A,z_A)$ de S, alors une représentation paramétrique de D est :

$$\begin{cases} x=at+x_A \\ y=bt+y_A\ , \quad t\in\mathbb{R}. \\ z=z_A \end{cases}$$

On a alors (avec $x_A^2+y_A^2-z_A^2=1$ car $A\in S$) :

$$\begin{aligned} D\subset S \quad &\Leftrightarrow \quad \forall\, t\in\mathbb{R},\ (at+x_A)^2+(bt+y_A)^2-z_A^2=1 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall\, t\in\mathbb{R},\ (a^2+b^2)t^2+2(ax_A+by_A)t+x_A^2+y_A^2-z_A^2=1 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall\, t\in\mathbb{R},\ (a^2+b^2)t^2+2(ax_A+by_A)t=0 \\ &\Leftrightarrow \quad a^2+b^2=ax_A+by_A=0 \end{aligned}$$

Ceci est absurde, car $(a,b)\neq(0,0)$, donc $a^2+b^2\neq 0$. Ainsi :

$$\boxed{S \text{ ne contient aucune droite parallèle au plan } (xOy).}$$

2) Soit D la droite d'équations cartésiennes $\begin{cases} x=az+b \\ y=cz+d \end{cases}$. On a :

$$\begin{aligned} D\subset S \quad &\Leftrightarrow \quad \forall\, M(x,y,z)\in D,\ M\in S \\ &\Leftrightarrow \quad \forall\, z\in\mathbb{R},\ M(az+b,cz+d,z)\in S \\ &\Leftrightarrow \quad \forall\, z\in\mathbb{R},\ (az+b)^2+(cz+d)^2-z^2=1 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall\, z\in\mathbb{R},\ (a^2+c^2-1)z^2+2(ab+cd)z+b^2+d^2=1 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a^2+c^2=1 \\ ab+cd=0 \\ b^2+d^2=1 \end{cases} \end{aligned}$$

Autrement dit :

$$\boxed{D \text{ est incluse dans } S \text{ si et seulement si la matrice } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ est orthogonale.}}$$

3) Remarquons déjà qu'une droite de l'espace, passant par un point $A(x_A, y_A, z_A)$, n'est pas parallèle au plan (xOy) si et seulement si elle admet un système d'équations cartésiennes de la forme : $\begin{cases} x = a(z - z_A) + x_A \\ y = c(z - z_A) + z_A \end{cases}$ et dans ce cas, la droite est dirigée par $\vec{u}(a,c,1)$.

En effet, si $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma)$ dirige une droite passant par $A(x_A, y_A, z_A)$, une représentation paramétrique de *D* est :

$$\begin{cases} x = \alpha t + x_A \\ y = \beta t + y_A\ , \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = \gamma t + z_A \end{cases}$$

Or, *D* n'est pas parallèle au plan (xOy) si et seulement si $c \neq 0$ et dans ce cas :

$$\begin{cases} x = \alpha t + x_A \\ y = \beta t + y_A\ , \quad t \in \mathbb{R} \\ z = \gamma t + z_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha t + x_A \\ y = \beta t + y_A \quad , \quad t \in \mathbb{R} \\ t = (z - z_A)/\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\alpha}{\gamma}(z - z_A) + x_A \\ \qquad\qquad\qquad\qquad , \quad z \in \mathbb{R}. \\ y = \dfrac{\beta}{\gamma}(z - z_A) + y_A \end{cases}$$

Soient $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de *S* (donc $x_A^2 + y_A^2 - z_A^2 = 1$) et *D* une éventuelle droite de l'espace passant par *A* et incluse dans *S*. D'après la question 1, *D* n'est pas parallèle au plan (xOy), donc d'après ce qui précède, *D* admet un système d'équations cartésiennes de la forme $\begin{cases} x = a(z - z_A) + x_A = az + x_A - az_A \\ y = c(z - z_A) + z_A = cz + y_A - cz_A \end{cases}$ avec $(a,c) \in \mathbb{R}^2$.

D'après la question 2, on a alors :

$$D \subset S \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ a(x_A - az_A) + c(y_A - cz_A) = 0 \\ (x_A - az_A)^2 + (y_A - cz_A)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ ax_A + cy_A = z_A \\ x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 - 2(ax_A + cy_A)z_A = 1 \end{cases}$$

Et avec $x_A^2 + y_A^2 - z_A^2 = 1$, soit $x_A^2 + y_A^2 = 1 + z_A^2$ (car $A \in S$), ceci donne :

$$D \subset S \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ ax_A + cy_A = z_A \\ 1 + 2z_A^2 - 2(ax_A + cy_A)z_A = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ ax_A + cy_A = z_A \\ (ax_A + cy_A)z_A = z_A^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ ax_A + cy_A = z_A \end{cases}$$

La relation $a^2 + c^2 = 1$ permet de poser $\begin{cases} a = \cos\theta \\ c = \sin\theta \end{cases}$.

De plus, $\left| \dfrac{z_A}{\sqrt{1 + z_A^2}} \right| < 1$, donc il existe $\beta \in \left]0, \pi\right[$ tel que $\dfrac{z_A}{\sqrt{1 + z_A^2}} = \cos\beta$ et en posant aussi $\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{x_A}{\sqrt{x_A^2 + y_A^2}} \\ \sin\alpha = \dfrac{y_A}{\sqrt{x_A^2 + y_A^2}} \end{cases}$, on a finalement :

$$D \subset S \quad \Leftrightarrow \quad \cos(\theta - \alpha) = \cos\beta \quad \Leftrightarrow \quad \theta - \alpha = \pm\beta \ [2\pi] \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \alpha \pm \beta \ [2\pi].$$

Soit :

$$D \subset S \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = \cos(\alpha + \beta) \\ c = \sin(\alpha + \beta) \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = \cos(\alpha - \beta) \\ c = \sin(\alpha - \beta) \end{cases}.$$

Remarquons que $(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)=2\beta\in\left]0,2\pi\right[$, donc $(\alpha+\beta)\neq(\alpha-\beta)\ [2\pi]$ et on obtient deux couples (a,b) distincts et, comme on a procédé par équivalences, on peut conclure que :

$$\boxed{\text{Par tout point de } S\text{, passent deux droites } D_1 \text{ et } D_2 \text{ incluses dans } S.}$$

D'après ce que l'on vient de voir, pour tout point de S passent deux droites D_1 et D_2, incluses dans S et dirigées respectivement par $\vec{u}_1\left|\begin{array}{l}\cos(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha+\beta)\\ 1\end{array}\right.$ et $\vec{u}_2\left|\begin{array}{l}\cos(\alpha-\beta)\\ \sin(\alpha-\beta)\\ 1\end{array}\right.$.

Ces deux droites D_1 et D_2 sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2=0$, soit :

$$\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)+1=\cos(2\beta)+1=0 \quad\Leftrightarrow\quad \cos(2\beta)=-1.$$

Comme $\beta\in\left]0,\pi\right[$, on a $2\beta\in\left]0,2\pi\right[$ et donc $\cos(2\beta)=-1$ si et seulement si $2\beta=\pi$, soit $\beta=\dfrac{\pi}{2}$.

Avec $\beta\in\left]0,\pi\right[$, on a alors $\beta=\dfrac{\pi}{2}$ si et seulement si $\dfrac{z_A}{\sqrt{1+z_A^2}}=\cos\beta=0$, soit $z_A=0$.

Ainsi, D_1 et D_2 sont perpendiculaires si et seulement si $z_A=0$, donc :

$$\boxed{\text{Les points de } S \text{ pour lesquels } D_1 \text{ et } D_2 \text{ sont perpendiculaires sont les points de } S\cap(xOy).}$$

Dans ce cas, (avec les notations précédentes), on a $x_A^2+y_A^2-z_A^2=x_A^2+y_A^2=1$ et $\begin{cases}x_A=\cos\alpha\\ y_A=\sin\alpha\end{cases}$, et on obtient les systèmes d'équations cartésiennes respectifs :

$$D_1:\begin{cases}x=\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)z+\cos\alpha\\[2mm] y=\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)z+\sin\alpha\end{cases} \quad\text{et}\quad D_2:\begin{cases}x=\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)z+\cos\alpha\\[2mm] y=\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)z+\sin\alpha\end{cases}.$$

Soit :

$$\boxed{D_1:\begin{cases}x=-\sin\alpha\, z+\cos\alpha\\ y=\cos\alpha\, z+\sin\alpha\end{cases} \quad\text{et}\quad D_2:\begin{cases}x=\sin\alpha\, z+\cos\alpha\\ y=-\cos\alpha\, z+\sin\alpha\end{cases}}$$