

Résumé du chapitre 15 : Espaces préhilbertiens réels

Dans ce qui suit, E est un \mathbb{R} - espace vectoriel.

I – Produit scalaire

I-1. Définition

Définition :

On appelle produit scalaire sur E toute application φ de E^2 dans \mathbb{R} qui est bilinéaire, symétrique, définie et positive, c'est-à-dire :

- φ est *bilinéaire* : Pour tout $(x, x', y, y') \in E^4$ et tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$:

$$\varphi(\lambda x + \mu x', y) = \lambda \varphi(x, y) + \mu \varphi(x', y)$$

$$\varphi(x, \lambda y + \mu y') = \lambda \varphi(x, y) + \mu \varphi(x, y')$$

- φ est *symétrique* : Pour tout $(x, y) \in E^2$, $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$.
- φ est *positive* : Pour tout $x \in E$, $\varphi(x, x) \geq 0$.
- φ est *définie* : Pour tout $x \in E$, $\varphi(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Notations : Quand ce n'est pas ambigu, on note souvent $\varphi(x, y) = (x | y)$ ou $\langle x | y \rangle$ ou $\langle x, y \rangle$, voire $x \cdot y$.

Produits scalaires usuels :

- 1) Dans \mathbb{R}^n , si $(x | y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$, avec $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $(\cdot | \cdot)$ est un produit scalaire. C'est le produit scalaire canonique de \mathbb{R}^n .

Si X et Y sont les vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ correspondant à x et y , on a $(x | y) = X^T Y$ (on identifie classiquement scalaire, ici $(x | y)$, et matrice 1×1 , ici $X^T Y$).

- 2) Dans $C([a, b], \mathbb{R})$, l'application $(f, g) \mapsto \varphi(f, g) = \int_a^b fg$ est un produit scalaire.

- 3) Dans $\mathbb{R}[X]$, l'application $(P, Q) \mapsto \int_0^1 PQ$ est un produit scalaire.

- 4) Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $(A, B) \mapsto (A | B) = \text{tr}(A^T B)$ est un produit scalaire.

C'est le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: pour toutes $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$:

$$(A, B) \mapsto (A | B) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} b_{i,j}.$$

I-2. Espaces préhilbertiens réels et espaces euclidiens

Définition :

Un espace préhilbertien réel est un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

Si de plus, cet espace est de dimension finie, alors c'est un espace euclidien.

Dans toute la suite, E désigne un espace préhilbertien réel (euclidien le cas échéant). On note $(\cdot|\cdot)$ le produit scalaire de E .

I-3. Inégalité de Cauchy-Schwarz

Propriété :

Pour tout $(x, y) \in E^2$, on a : $|(x|y)| \leq \sqrt{(x|x)(y|y)}$.

Et on a égalité si et seulement si la famille (x, y) est liée (x et y colinéaires).

I-4. Norme hilbertienne ou euclidienne

Théorème et définition :

Si E est muni d'un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$, alors l'application $N : x \mapsto \sqrt{(x|x)}$ est une norme sur E , appelée norme hilbertienne (quand E est préhilbertien) ou euclidienne (quand E est euclidien) associée au produit scalaire.

Dans toute la suite du chapitre, $\|\cdot\|$ est la norme associée au produit scalaire de E .

I-5. Identités de polarisation

Propriétés :

Si E est muni d'un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ de norme associée $\|\cdot\|$, on a, pour tout $(x, y) \in E^2$:

- $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x|y)$.
- $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(x|y)$.
- $\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 4(x|y)$.
- $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ (identité du parallélogramme).
- $\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 = \frac{1}{4}(2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x-y\|^2)$ (théorème de la médiane).

II – Orthogonalité

II-1. Vecteurs orthogonaux, vecteurs unitaires

Définitions :

Deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux si $(x|y) = 0$, on note alors $x \perp y$.

Un vecteur x de E est dit unitaire s'il est de norme 1.

Une famille \mathcal{F} de vecteurs de E est orthogonale si pour tous vecteurs distincts x, x' de \mathcal{F} , on a $(x|x') = 0$ (autrement dit si les vecteurs de \mathcal{F} sont orthogonaux deux à deux).

Une famille de vecteurs de E est orthonormale ou orthonormée si elle est orthogonale et si tous ses vecteurs sont unitaires.

Propriété :

Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls de E est libre.

Propriété : Relation de Pythagore.

Si (x_1, x_2, \dots, x_p) est une famille orthogonale de vecteurs de E , alors :

$$\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \dots + \|x_p\|^2 = \|x_1 + x_2 + \dots + x_p\|^2.$$

Et, dans le cas de deux vecteurs, la réciproque est vraie : si $\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + y\|^2$ alors $x \perp y$.

II-2. Sous-espaces vectoriels orthogonaux

Définitions :

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

On dit que F et G sont orthogonaux si pour tout $(x, y) \in F \times G$, $(x | y) = 0$.

Si A est une partie non vide de E , l'ensemble $\{x \in E \mid \forall a \in A, (a | x) = 0\}$ est appelé orthogonal de A , noté A^\perp .

Notations :

- Si F et G sont orthogonaux, on note $F \perp G$ (ou $G \perp F$).
- Si A est un sous-espace vectoriel, A^\perp .

Propriétés :

Si A est une partie non vide de E .

- A^\perp est un sous-espace vectoriel de E .
- Si B est une autre partie non vide de E telle que $A \subset B$, alors $B^\perp \subset A^\perp$.
- $A \subset (A^\perp)^\perp$
- $A^\perp = (\text{Vect } A)^\perp$.
- $A \cap A^\perp$ est vide si A ne contient pas 0 et réduit à $\{0\}$ sinon.

II-3. Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Propriété : Procédé ou algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Si (f_1, f_2, \dots, f_n) est une famille libre de E , alors il existe une famille orthonormée de E , (e_1, e_2, \dots, e_n) telle que pour tout $k \in 1, n$, $\text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_k) = \text{Vect}(f_1, f_2, \dots, f_k)$.

Dans toute la fin du chapitre, E est euclidien de dimension n non nulle.

II-4. Bases orthonormales

Propriétés et définition :

Toute famille orthogonale de n vecteurs non nuls de E est une base de E .

Toute famille orthonormée de n vecteurs de E est une base de E . Une telle famille est appelée base orthonormale ou orthonormée (b.o.n.) de E .

Théorème :

E possède des bases orthonormales et si (e_1, e_2, \dots, e_n) est une telle base, alors pour tout $x \in E$:

$$x = (e_1 | x)e_1 + (e_2 | x)e_2 + \dots + (e_n | x)e_n \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = (e_1 | x)^2 + (e_2 | x)^2 + \dots + (e_n | x)^2.$$
Propriété :

Si \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont deux bases orthonormées de E et $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ est la matrice de passage de \mathcal{B} et \mathcal{B}' , alors :

$$P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = (P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^{-1} = {}^t P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$$
Théorème : de la base orthonormée incomplète

Toute famille orthonormale (e_1, e_2, \dots, e_p) peut être complétée en une base orthonormale de E .

Corollaires :

Soit F un sous-espace de E .

- $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$.
- $F \oplus F^\perp = E$.
- $(F^\perp)^\perp = F$.

Notation : Si F et G sont deux sev (supplémentaires ou non) tels que $F \perp G$, leur somme (directe) est notée :

$$F \overset{\perp}{\oplus} G.$$

II-5. Orientation d'un espace vectoriel de dimension finieDéfinitions :

Orienter E , c'est choisir une base \mathcal{B} qui donne le sens positif.
Alors, si \mathcal{B}' est une autre base, on dit que \mathcal{B}' est directe si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$ et indirecte si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') < 0$.

II-6. Produit scalaire et formes linéairesPropriété :

$f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ si et seulement s'il existe $a \in E$, unique, tel pour tout $x \in E$, $f(x) = (a | x)$.
Autrement dit, toute forme linéaire sur E s'écrit de manière unique sous la forme $x \mapsto (a | x)$, où a est un vecteur fixé de E .

Corollaire et définition :

Tout hyperplan H de E est de la forme $H = \{a\}^\perp$ avec $a \in E \setminus \{0\}$.
Un tel vecteur a est appelé vecteur normal à H .