

## Résumé du chapitre 17 : Espaces euclidiens de dimension 2 ou 3

Dans ce chapitre,  $E$  est un espace euclidien orienté.

Les vecteurs seront notés avec des flèches :  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ , ...

Le produit scalaire de deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  de  $E$  sera noté  $(\vec{u} | \vec{v})$  ou  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  et la norme d'un vecteur  $\vec{u}$  sera notée  $\|\vec{u}\|$ .

### I – Produit vectoriel, produit mixte

#### I-1. Produit vectoriel

Dans cette partie,  $E$  est de dimension 3 et est muni d'une base orthonormée directe  $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Définition :

Soient  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  et  $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$ .

Le produit vectoriel de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , noté  $\vec{u} \wedge \vec{v}$ , est le vecteur :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (yz' - y'z)\vec{i} + (x'z - xz')\vec{j} + (xy' - x'y)\vec{k}.$$

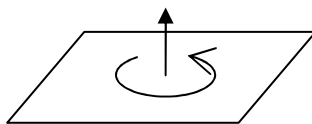
Propriétés : (non mentionnées dans le programme)

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de  $E$ .

- $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$  si et seulement si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires.
- Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas colinéaires, alors  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  est normal au plan  $\text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$  et  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$  est une base directe de  $E$ .
- $(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 + \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2$ .
- Le produit vectoriel est bilinéaire et antisymétrique.

Orientation d'un plan ou d'une droite :

Un plan de  $E$  est orienté par la donnée d'un vecteur normal :



Une droite  $D$  de l'espace est orientée par la donnée d'un vecteur directeur (ou d'un plan orienté orthogonal à  $D$ ).

#### I-2. Produit mixte

a. Produit mixte dans le plan :

Dans cette partie,  $E$  est de dimension 2 et est muni d'une base orthonormée directe  $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ .

Propriété et définition :

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de  $E$ . Le réel  $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v})$  ne dépend pas de la base orthonormée directe choisie. On appelle ce nombre produit mixte de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , noté  $[\vec{u}, \vec{v}]$ .

Propriété et définition : (non mentionnées dans le programme)

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de  $E$ .

Il existe un unique  $\theta \in [0, 2\pi[$  tel que :

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{[\vec{u}, \vec{v}]}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}.$$

Le réel  $\theta$ , noté  $(\vec{u}, \vec{v})$ , est la mesure de l'angle entre les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

Interprétation géométrique

$[\vec{u}, \vec{v}]$  est le « aire algébrique » du parallélogramme construit sur  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

Une application : Equation d'une droite dans une base orthonormée directe

Une équation cartésienne de la droite  $\text{Vect}(\vec{u})$  est donnée  $[\vec{u}, \vec{v}] = 0$  avec  $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$ .

b. Produit mixte dans l'espace :

Dans cette partie,  $E$  est à nouveau de dimension 3 et muni d'une base orthonormée directe  $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Définition :

Soient  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs de l'espace.

Le produit mixte de  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$ , noté  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ , est le réel :

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}.$$

Interprétation géométrique

$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$  est le « volume algébrique » de  $P$ .

Propriété :

Soient  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs de l'espace. On a dans la base orthonormée directe  $\mathcal{B}$  :

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}).$$

Corollaires : (non mentionnées dans le programme)

- Le produit mixte est trilineaire et antisymétrique.
- Trois vecteurs de l'espace  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont coplanaires si et seulement si  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$ .

Une application : Equation d'un plan dans une base orthonormée directe

Une équation cartésienne du plan  $\text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$  est donnée  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$  avec  $\vec{w} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ .

## II – Isométries vectorielles d'un plan euclidien

Dans cette partie,  $E$  est de dimension 2 et est muni d'une base orthonormée directe  $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ .

### II-1. Caractérisation des isométries du plan

Propriété :

Dans un plan euclidien, tout automorphisme orthogonal est soit une rotation, soit une réflexion et, dans une base orthonormée directe, il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$ , unique modulo  $2\pi$ , tel que la matrice :

- d'une rotation  $r$  est de la forme  $R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$  ;
- d'une réflexion est de la forme  $S(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$ .

Dans ce cas, c'est une réflexion par rapport à la droite  $\mathbb{R}\vec{a}$ , appelée axe de la réflexion, où  $(\vec{i}, \vec{a}) = \frac{\alpha}{2}$ .

Corollaire :

$$SO(2) = \{R(\theta), \theta \in \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad O^-(2) = \{S(\theta), \theta \in \mathbb{R}\}.$$

### II-2. Rotations du plan

Propriété :

Pour tout  $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$  :

$$R(\theta)R(\theta') = R(\theta')R(\theta) = R(\theta + \theta').$$

Propriété et définition :

Soit une rotation  $r$  de matrice  $R(\alpha)$  dans une base orthonormée directe du plan.

La matrice de  $r$  est  $R(\alpha)$  dans toute base orthonormée directe du plan et  $R(-\alpha)$  dans toute base orthonormée indirecte du plan.

Le réel  $\alpha$  est appelé mesure de l'angle orienté de la rotation  $r$ .

Propriétés :

- $(SO(2), \times)$  est un sous-groupe commutatif de  $(O(2), \times)$ .
- La composée de deux rotations du plan est une rotation du plan dont l'angle est la somme des angles des deux rotations.
- La réciproque d'une rotation de plan est la rotation du plan d'angle opposé.

Propriété : Écriture complexe d'une rotation

Soit  $r$  une rotation d'angle  $\alpha$  du plan vectoriel complexe (qui est orienté).

Pour tout vecteur  $\vec{u}$  d'affixe  $z$ , l'affixe de  $r(\vec{u})$  est  $z' = e^{i\alpha} z$ .

Réciproquement, si  $f$  est une application du plan vectoriel complexe dans lui-même, d'écriture complexe  $z' = e^{i\alpha} z$ , alors  $f$  est la rotation d'angle  $\alpha$ .

Propriété :

Soit  $r$  une rotation d'angle  $\alpha$  du plan (orienté)  $E$ . Pour tout  $\vec{u} \in E \setminus \{\vec{0}\}$ , on a :

$$(\vec{u}, r(\vec{u})) = \alpha [2\pi].$$

### III – Isométries d'un espace euclidien de dimension 3

Dans cette partie,  $E$  est de dimension 3 et est muni d'une base orthonormée directe  $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

#### III-1. Caractérisation des isométries de l'espace

Propriété :

Les isométries d'un espace euclidien de dimension 3 sont soit des rotations, soit des réflexions, soit des composées d'une rotation et d'une réflexion.

#### III-2. Rotations de l'espace

Définitions :

Soit  $r$  une rotation de  $E$ .

La droite vectorielle orientée  $F = \ker(r - id_E)$  est l'axe de la rotation  $r$  et l'endomorphisme induit par  $r$  sur  $F^\perp$  est une rotation dont l'angle orienté est appelé (mesure de l') angle de la rotation  $r$ .

Une rotation d'angle  $\pi$  s'appelle un retournement de l'espace (*non mentionné dans le programme*).

Propriété : (*non mentionnées dans le programme*)

Soit  $r$  une rotation de  $E$ , d'angle  $\theta$ . On a :

$$tr(r) = 1 + 2 \cos \theta.$$