

Résumé du chapitre 4 : Suites et séries de fonctions

Dans ce qui suit, I est un intervalle de \mathbb{R} , $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions définies sur I et à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} , et $\sum f_n$ est la série de fonctions associée et on pose $S_n = \sum_{k=0}^n f_k$.

Suites de fonctions

Définitions fondamentales

- Convergence simple (CVS) sur I : $\forall x \in I$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ existe (la limite dépend de x) ;
- Convergence uniforme (CVU) sur I : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|f_n - f\|_\infty$ existe et tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$.

Et on a :

$$\text{CVU sur } I \Rightarrow \text{CVS sur } I.$$

Limite (hors programme)

Si a est une extrémité de I (éventuellement infinie) et :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$ existe et est finie ;
- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I .

Alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x).$$

Continuité

Si :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I ;
- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I (ou sur tout segment inclus dans I ou sur toute partie d'une famille de parties de I dont la réunion est I).

Alors :

$$f \text{ est continue sur } I.$$

Classe C^k

Si $k \in \mathbb{N}^*$ et :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^k sur I ;
- $\forall j \in 0, k-1$, $(f_n^{(j)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur I ;
- $(f_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I (ou sur tout segment inclus dans I ou sur toute partie d'une famille de parties de I dont la réunion est I).

Alors :

$$f = \lim f_n \text{ est de classe } C^k \text{ sur } I \text{ et } \forall i \in 1; k, \lim f_n^{(i)} = f^{(i)}.$$

REMARQUE : Si on veut C^∞ sur I , il faut que ce que l'on vient d'écrire soit vrai pour tout entier k , donc que les convergences des suites des dérivées $k^{\text{ièmes}}$ soient toutes uniforme sur I (ou sur tout segment inclus dans I ou sur toute partie d'une famille de parties de I dont la réunion est I).

Intégration

Si :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a, b]$;
- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f .

Alors :

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t)dt .$$

Séries de fonctions**Définitions fondamentales**

- Convergence simple (CVS) sur I : la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur I ;
- Convergence uniforme (CVU) sur I : la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I ;
- Convergence normale (CVN) sur I : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_\infty$ existe et $\sum \|f_n\|_\infty$ converge ;
- Hypothèse de domination (HD) : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in I$, $|f_n(x)| \leq \alpha_n$ et $\sum \alpha_n$ converge.

Et on a :

$$\text{HD sur } I \Rightarrow \text{CVN sur } I \Rightarrow \text{CVU sur } I \Rightarrow \text{CVS sur } I.$$

Dans toutes les propriétés suivantes :

- on peut remplacer la convergence uniforme, par la convergence normale ou l'hypothèse de domination ;
- pour les propriétés globales de régularité (continué, classe C^k , classe C^∞), on peut remplacer la convergence uniforme sur I par la convergence uniforme sur tout segment de I ou sur toute partie d'une famille de parties de I dont la réunion est I .

LimiteSi a est une extrémité de I (éventuellement infinie) et :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$ existe et est finie ;
- $\sum f_n$ converge uniformément sur I .

Alors :

$$\text{la série } \sum \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \text{ converge et } \lim_{x \rightarrow a} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right).$$

Continuité

Si :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I ;
- $\sum f_n$ converge uniformément sur I .

Alors :

S est continue sur I .

Classe C^k

Si, pour $k \in \mathbb{N}^*$:

- $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^k sur I ;
- $\forall j \in 0, k-1$, $\sum f_n^{(j)}$ converge simplement sur I ;
- $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur I .

Alors :

$$S \text{ est de classe } C^k \text{ sur } I \text{ et } \forall i \in 0; k \text{ , } S^{(i)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(i)} .$$

REMARQUE : Si on veut C^∞ sur I , il faut que les convergences des séries $\sum f_n^{(k)}$ soient toutes (pour tout $k \in \mathbb{N}^*$) uniformes sur I .

Intégration

Si $I = [a, b]$ et :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a, b]$;
- $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$;

Alors :

$$\sum \left(\int_a^b f_n(t) dt \right) \text{ converge et } \int_a^b S(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(t) dt \right) .$$