***Corrigé du Concours Blanc***

# *Problème 1*

*Extrait de Mines-Ponts – 2006 – MP – Maths 2Centrale 2016 - PSI - Math1*

**Q1.** Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $h_x : t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de telles fonctions et :

- $h_x(t) \underset{t \to 0}{\sim} t^{x-1}$ et $t \mapsto t^{x-1}$ est ingérable en 0 si et seulement si $x-1>-1$, soit $x>0$, donc $h_x$ est ingérable en 0 si et seulement si $x \in \mathbb{R}_+^*$ ;
- $t^2 h_x(t) = t^{x+1}e^{-t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ par croissances comparées, donc $h_x(t) = \underset{t \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est ingérable en $+\infty$ si et seulement si $x-1>-1$, soit $x>0$, donc $h_x$ est ingérable en $+\infty$.

Ainsi, $h_x$ est ingérable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $x \in \mathbb{R}_+^*$, soit :

$$\boxed{\mathcal{E} = \mathbb{R}_+^*}$$

**Q2.** Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a vu que la fonction $h_x$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle est de plus strictement positive sur cet intervalle, donc par positivité de l'intégrale $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} h_x(t)\,dt \geq 0$ et si on a avait $\int_0^{+\infty} h_x(t)\,dt = 0$, alors $h_x$ serait nulle sur $\mathbb{R}_+^*$, ce qui n'est pas, donc $\Gamma(x) \neq 0$.

Finalement, $\Gamma(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, soit :

$$\boxed{\Gamma \text{ est strictement positive sur } \mathcal{E} = \mathbb{R}_+^*.}$$

**Q3.** *Cf. corrigé des TD du chapitre 11.*

**Q4.** *Cf. corrigé des TD du chapitre 11.*

**Q5.** Comme $\Gamma$ est deux fois dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $\Psi$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, avec pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ :

$$\Psi'(x) = \frac{\Gamma''(x)\Gamma(x) - \Gamma'(x)^2}{\Gamma(x)^2}.$$

avec $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} h_x(t)\,dt$, $\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)\, h_x(t)\,dt$ et $\Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 h_x(t)\,dt$.

Si on pose $f : t \mapsto \sqrt{h_x(t)}$ et $g : t \mapsto (\ln t)\sqrt{h_x(t)}$, les fonctions *f* et *g* sont définies sur $\mathbb{R}_+^*$, et les fonctions $f^2 = h_x$, $g^2 : t \mapsto (\ln t)^2 h_x(t)$ et $fg : t \mapsto (\ln t)\, h_x(t)$ sont intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne alors :

$$\left(\int_0^{+\infty} fg\right)^2 \leq \left(\int_0^{+\infty} f^2\right)\left(\int_0^{+\infty} g^2\right).$$

De plus, comme les fonctions *f* et *g* ne sont pas proportionnelles, l'inégalité est stricte.

Avec $\int_0^{+\infty} fg = \Gamma'(x)$, $\int_0^{+\infty} f^2 = \Gamma(x)$ et $\int_0^{+\infty} g^2 = \Gamma''(x)$, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ :

$$\Gamma'(x) < \Gamma(x)\Gamma''(x).$$

Ceci permet de conclure que $\Psi' > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc que :

$$\boxed{\Psi \text{ est strictement croissante sur } \mathcal{E} = \mathbb{R}_+^*.}$$

**Q6.** On a vu que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Comme $\Gamma$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient en dérivant cette relation, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ :

$$\Gamma'(x+1) = \Gamma(x) + x\Gamma'(x).$$

Alors :

$$\Psi(x+1) = \frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \frac{\Gamma(x) + x\Gamma'(x)}{x\Gamma(x)} = \frac{1}{x} + \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \frac{1}{x} + \Psi(x).$$

Ainsi, on a bien pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ :

$$\boxed{\Psi(x+1) = \Psi(x) + \frac{1}{x}}$$

**Q7.** Avec la formule ci-dessus, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\Phi(n+1) - \Phi(n) = \Psi(n+1) - \Psi(n) - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Alors :

$$\Phi(n+1) - \Phi(n) = \frac{1}{n} - \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] = \frac{1}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Donc, $\Phi(n+1) - \Phi(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$ et comme la série positive $\sum \frac{1}{2n^2}$ converge :

$$\boxed{\text{La série de terme général } \Phi(n+1) - \Phi(n) \text{ converge.}}$$

**Q8.** Pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$\Phi(n) = \Phi(1) + \sum_{k=1}^{n-1} \big(\Phi(k+1) - \Phi(k)\big).$$

Et comme la série $\sum \big(\Phi(n+1) - \Phi(n)\big)$ converge :

$$\boxed{\text{La suite } \big(\Phi(n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge.}}$$

**Q9.** Soit un réel $x \geq 1$.

On a $0 < \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ et comme $\Psi$ et ln sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}_+^*$ :

$$\Psi\big(\lfloor x \rfloor\big) \leq \Psi(x) < \Psi\big(\lfloor x \rfloor + 1\big)$$
$$-\ln\big(\lfloor x \rfloor + 1\big) < -\ln x \leq -\ln\big(\lfloor x \rfloor\big)$$

En ajoutant membre à membre, on obtient :

$$\Psi\big(\lfloor x \rfloor\big) - \ln\big(\lfloor x \rfloor + 1\big) < \Psi(x) - \ln x < \Psi\big(\lfloor x \rfloor + 1\big) - \ln\big(\lfloor x \rfloor\big).$$

Soit :

$$\Phi\big(\lfloor x \rfloor\big) + \ln\big(\lfloor x \rfloor\big) - \ln\big(\lfloor x \rfloor + 1\big) < \Phi(x) < \Phi\big(\lfloor x \rfloor + 1\big) + \ln\big(\lfloor x \rfloor + 1\big) - \ln\big(\lfloor x \rfloor\big).$$

Ou encore :

$$\Phi\big(\lfloor x \rfloor\big) - \ln\left(1 + \frac{1}{\lfloor x \rfloor}\right) < \Phi(x) < \Phi\big(\lfloor x \rfloor + 1\big) + \ln\left(1 + \frac{1}{\lfloor x \rfloor}\right).$$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \Phi\big(\lfloor x \rfloor\big) = \lim\limits_{\lfloor x \rfloor \to +\infty} \Phi\big(\lfloor x \rfloor\big) = \lim\limits_{\lfloor x \rfloor + 1 \to +\infty} \Phi\big(\lfloor x \rfloor + 1\big) = C$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{\lfloor x \rfloor}\right) = 0$, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\Phi\big(\lfloor x \rfloor\big) - \ln\left(1 + \frac{1}{\lfloor x \rfloor}\right)\right] = \lim_{x \to +\infty} \left[\Phi\big(\lfloor x \rfloor + 1\big) + \ln\left(1 + \frac{1}{\lfloor x \rfloor}\right)\right] = C.$$

Le théorème des gendarmes permet alors de conclure que :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \Phi(x) = C}$$

**Q10.** Le résultat précédent se récrit :

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, A \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, x \in [A, +\infty[,\ \big|\Phi(x) - C\big| \leq \varepsilon.$$

La fonction $\Phi$ étant continue sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que différence de telles fonctions, on peut alors écrire pour tout $x \in [A, +\infty[$ :

$$\left|\int_A^x \big(\Phi(t) - C\big)\, dt\right| \leq \int_A^x \big|\Phi(t) - C\big|\, dt \leq \int_A^x \varepsilon\, dt = \varepsilon\,(x - A) \leq \varepsilon\, x.$$

Or :

$$\left|\int_1^x \left(\Phi(t)-C\right)dt\right| = \left|\int_1^A \left(\Phi(t)-C\right)dt + \int_A^x \left(\Phi(t)-C\right)dt\right| \leq \left|\int_1^A \left(\Phi(t)-C\right)dt\right| + \left|\int_A^x \left(\Phi(t)-C\right)dt\right|.$$

Et, en posant $K = \left|\int_1^A \left(\Phi(t)-C\right)dt\right|$, on obtient $\left|\int_1^x \left(\Phi(t)-C\right)dt\right| \leq K + \varepsilon x$, donc :

$$\left|\frac{1}{x}\int_1^x \left(\Phi(t)-C\right)dt\right| \leq \frac{K}{x} + \varepsilon .$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{K}{x} = 0$, il existe un réel $A' > 0$ tel que pour tout $x \in \left[A', +\infty\right[$, $\frac{K}{x} \leq \varepsilon$ et ainsi, en posant $B = \max\left(A, A'\right) \in \mathbb{R}_+^*$, on obtient :

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, B \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, x \in \left[B, +\infty\right[,\ \left|\frac{1}{x}\int_1^x \left(\Phi(t)-C\right)dt\right| \leq 2\varepsilon .$$

Ceci prouve que :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_1^x \left(\Phi(t)-C\right)dt = 0 .$$

Enfin, pour tout $x \in \left[1, +\infty\right[$ :

$$\frac{1}{x}\int_1^x \left(\Phi(t)-C\right)dt = \frac{1}{x}\int_1^x \Phi(t)\,dt - \frac{1}{x}\int_1^x C\,dt = \frac{1}{x}\int_1^x \Phi(t)\,dt - \frac{1}{x}C\left(x-1\right) = \frac{1}{x}\int_1^x \Phi(t)\,dt - C + \frac{C}{x}.$$

Donc, $\frac{1}{x}\int_1^x \Phi(t)\,dt = \frac{1}{x}\int_1^x \left(\Phi(t)-C\right)dt + C - \frac{C}{x}$ et ainsi :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_1^x \Phi(t)\,dt = 0 + C - 0 = C .$$

Soit, si $C \neq 0$ :

$$\boxed{\int_1^x \Phi(t)\,dt \underset{x\to+\infty}{\sim} C\,x}$$

**Q11.** Avec $\Gamma$ strictement positive (donc $\ln\Gamma$ définie) et $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$, on a

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\int_1^n \Phi(t)\,dt = \int_1^n \left(\Psi(t) - \ln t\right)dt = \int_1^n \left(\frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)} - \ln t\right)dt$$

$$= \left[\ln\left(\Gamma(t)\right) - t\ln t + t\right]_1^n = \ln\left(\Gamma(n)\right) - n\ln n + n - 1$$

Or, si $C \neq 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\int_1^n \Phi(t)\,dt = C$, donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(\Gamma(n)\right) - n\ln n + n - 1}{n} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln\left(\Gamma(n)\right) - n\ln n}{n} + 1 - \frac{1}{n}\right) = C .$$

Soit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(\Gamma(n)\right)-n\ln n}{n} = C-1 \quad \textbf{(1)}$$

Or, pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, $\Gamma(n)\neq 0$ et $\dfrac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n)}=n$, d'où pour $n\geq 2$ :

$$\Gamma(n)=\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(1)}=\prod_{k=1}^{n-1}\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k)}=\prod_{k=1}^{n-1}k=(n-1)!=\frac{n!}{n}.$$

Et avec la formule de Stirling, on a $n!=\varepsilon_n\sqrt{2\pi n}\dfrac{n^n}{e^n}$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty}\varepsilon_n=1$, donc :

$$\frac{\ln\left(\Gamma(n)\right)-n\ln n}{n}=\frac{\ln\left(n!\right)-\ln n-n\ln n}{n}=\frac{\ln\left(\varepsilon_n\sqrt{2\pi n}\dfrac{n^n}{e^n}\right)-\ln n-n\ln n}{n}$$

$$=\frac{\ln\varepsilon_n+\frac{1}{2}\ln(2\pi)+\frac{1}{2}\ln n+n\ln n-n-\ln n-n\ln n}{n}=\frac{\ln\varepsilon_n}{n}+\frac{\ln(2\pi)}{2n}-\frac{1}{2}\frac{\ln n}{n}-1$$

D'où :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(\Gamma(n)\right)-n\ln n}{n} = -1 \quad \textbf{(2)}$$

Avec **(1)** et **(2)**, on obtient $C=0$, ce qui est absurde.

Ainsi, $C\neq 0$ mène à une contradiction, donc :

$$\boxed{C=0}$$

**Q12.** Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $m\in\mathbb{N}$, et tout $j\in[\![0,m]\!]$, $x+j\in\mathbb{R}_+^*$, donc avec la formule de la question Q6 et un télescopage, on peut écrire :

$$\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{x+j}=\sum_{j=0}^{m}\left[\Psi(x+j+1)-\Psi(x+j)\right]=\Psi(x+m+1)-\Psi(x).$$

Ainsi :

$$\Psi(x)+\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{x+j}-\ln m=\Psi(x+m+1)-\ln m$$

$$=\Phi(x+m+1)+\ln(x+m+1)-\ln m=\Phi(x+m+1)+\ln\left(1+\frac{x+1}{m}\right)$$

Or, $\lim\limits_{m\to+\infty}\ln\left(1+\dfrac{x+1}{m}\right)=0$ et d'après la question précédente, $\lim\limits_{m\to+\infty}\Phi(x+m+1)=C=0$. Ainsi :

$$\boxed{\lim_{m\to+\infty}\left[\Psi(x)+\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{x+j}-\ln m\right]=0}$$

# Problème 2

*Extrait de Centrale-Supélec – 2016 – PSI – Maths 1*

## I – Généralités

### *A – Propriétés élémentaires*

**Q13.** Soit $\varphi : \mathcal{X}_n(\mathbb{R}) \to \{0,1\}^{n^2}$ ; $A = \left(a_{i,j}\right)_{i,j\in[\![1,n]\!]} \mapsto \left(a_{1,1}, \dots, a_{1,n}, a_{2,1}, \dots, a_{2,n}, \dots, a_{n,1}, \dots, a_{n,n}\right)$.

Une matrice étant parfaitement déterminée par ses coefficients, φ est une bijection.

Or, $\{0,1\}^{n^2}$ est un ensemble fini de cardinal $2^{n^2}$. Donc :

$$\boxed{\mathcal{X}_n(\mathbb{R}) \text{ est un ensemble fini, de cardinal } 2^{n^2}.}$$

**Q14.** Prouvons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que pour tout $n \geq 2$, $\left|\det M\right| \leq n!$

- Pour $n = 2$, soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{Y}_2(\mathbb{R})$ (avec $a,b,c,d \in [0,1]$). On a $\det M = ad - bc$.

  Comme $a,b,c,d \in [0,1]$, on a $0 \leq ad \leq 1$ et $0 \leq bc \leq 1$, donc $-1 \leq \det M \leq 1$.

  Alors, $\left|\det M\right| \leq 1 < 2$ et la propriété est vraie au rang $n = 2$.

- Supposons la propriété vraie à un rang $n \geq 2$.

  Soit $M = \left(a_{i,j}\right) \in \mathcal{Y}_{n+1}(\mathbb{R})$. Pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$, appelons $M_i$ la matrice $n \times n$ obtenue en supprimant la $i^{\text{ième}}$ ligne et la dernière colonne de *M*.

  Comme les coefficients de $M_i$ sont des coefficients de *M*, ils appartiennent à $[0,1]$, et donc $M_i \in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$ et donc, par hypothèse de récurrence, $\left|\det M_i\right| < n!$

  En développant par rapport à la dernière colonne, on a :

  $$\left|\det M\right| = \left|\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+n+1} a_{i,n+1} \det M_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n+1} \left|a_{i,n+1}\right| \left|\det M_i\right|.$$

  Avec $\left|a_{i,n+1}\right| = a_{i,n+1} \leq 1$ et $\left|\det M_i\right| < n!$ pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$, on obtient :

  $$\left|\det M\right| < \sum_{i=1}^{n+1} n! = (n+1)\,n! = (n+1)!$$

  Ainsi, la propriété est vraie au rang $n+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $n \geq 2$, soit :

$$\boxed{\text{Pour tout } M \in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R}),\ \left|\det M\right| < n!}$$

**Q15.** Soient $A, B \in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$ avec $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$, et $\lambda \in [0,1]$.

On a $\lambda \geq 0$ et $1-\lambda \geq 0$, et pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $0 \leq a_{i,j} \leq 1$ et $0 \leq b_{i,j} \leq 1$, donc :

$$\begin{cases} 0 \leq \lambda a_{i,j} \leq \lambda \\ 0 \leq (1-\lambda) b_{i,j} \leq 1-\lambda \end{cases}$$

En additionnant membres à membres, on obtient :

$$0 \leq \lambda a_{i,j} + (1-\lambda) b_{i,j} \leq 1.$$

Les $\lambda a_{i,j} + (1-\lambda) b_{i,j}$ étant les coefficients de $\lambda A + (1-\lambda)B$, on a $\lambda A + (1-\lambda)B \in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$ et donc, $\underline{\mathcal{Y}_n(\mathbb{R}) \text{ est une partie convexe de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Pour tout $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_\infty$ est l'un des coefficients de $A$, donc $\|A\|_\infty \in [0,1]$ et ainsi, $\underline{\mathcal{Y}_n(\mathbb{R}) \text{ est une partie bornée de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Enfin, soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$ convergeant vers $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

La suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $A$ coefficient par coefficient, donc en posant $A_k = (a_{k,i,j})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $A = (a_{i,j})$, on a $\lim\limits_{k\to+\infty} a_{k,i,j} = a_{i,j}$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

Or, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $0 \leq a_{k,i,j} \leq 1$, donc en passant à la limite, on obtient $0 \leq a_{i,j} \leq 1$.

Ainsi, $A \in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$, ce qui prouve que $\underline{\mathcal{Y}_n(\mathbb{R}) \text{ est une partie fermée de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Finalement :

$$\boxed{\mathcal{Y}_n(\mathbb{R}) \text{ est une partie convexe, fermée et bornée de } E.}$$

**Q16.** Soit $M = (a_{i,j}) \in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$, $\lambda$ une valeur propre complexe de $M$ et $X = (x_i) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé ($X$ est donc non nul). Posons $|x_m| = \max\limits_{i\in[\![1,n]\!]} |x_i|$ (avec $m \in [\![1,n]\!]$).

On a $|x_m| \geq 0$ et si $|x_m| = 0$, alors pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $0 \leq |x_i| \leq |x_m| = 0$, donc $x_i = 0$ et $X = 0$, qui est faux. Donc, $|x_m| \neq 0$ et ainsi : $\underline{|x_m| > 0}$.

On a $MX = \lambda X$, donc $\lambda x_m = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{m,j} x_j$, d'où avec $0 \leq a_{m,j} \leq 1$ pour tout $j \in [\![1,n]\!]$ :

$$|\lambda x_m| = |\lambda||x_m| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{m,j} x_j| = \sum_{j=1}^{n} a_{m,j} |x_j| \leq \sum_{j=1}^{n} |x_m| = n|x_m|.$$

Ainsi, $|\lambda||x_m| \leq n|x_m|$, et comme $|x_m| > 0$, on obtient :

$$\boxed{|\lambda| \leq n}$$

Considérons la matrice $J$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1 et le vecteur $U$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont toutes les coordonnées valent 1

Tous les coefficients de $J$ appartiennent à $[0,1]$, donc $J \in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$ et on a $JU = nU$. Comme $U$ est non nul, ceci veut dire que $n$ est valeur propre de $J$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{La matrice de } \mathcal{Y}_n(\mathbb{R}) \text{ dont tous les coefficients valent 1 admet n pour valeur propre.}}$$

## *B – Étude de* $\mathcal{X}_n'(\mathbb{R}) = \mathcal{X}_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$

**Q17.** Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{X}_2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{Y}_2(\mathbb{R})$ avec $a, b, c, d = 0$ ou $1$. On a $\det M = ad - bc \in \mathbb{Z}$.

Or, on a vu que $|\det M| < 2! = 2$, donc $\det M \in \{-1, 0, 1\}$.

Alors, $M \in \mathcal{X}_2'(\mathbb{R}) = \mathcal{X}_2(\mathbb{R}) \cap GL_2(\mathbb{R})$ si et seulement si $\det M \in \{-1, 1\}$.

Considérons les deux cas.

- Si $\det M = ad - bc = 1$, alors $ad = bc + 1$. Or, $ad \leq 1$ et $bc + 1 \geq 1$ (car $a, b, c, d \in \{0,1\}$).
  Donc, $ad = bc + 1 = 1$, soit $\begin{cases} ad = 1 \\ bc = 0 \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} a = d = 1 \\ b = 0 \text{ ou } c = 0 \end{cases}$.
  On obtient trois matrices : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- Si $\det M = ad - bc = -1$, alors $bc = ad + 1$ et avec le même raisonnement que ci-dessus, on obtient $\begin{cases} b = c = 1 \\ a = 0 \text{ ou } d = 0 \end{cases}$ et les trois matrices : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Finalement :

$$\boxed{\text{Les éléments de } \mathcal{X}_2'(\mathbb{R}) \text{ sont } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sont symétriques réelles donc diagonalisables sur $\mathbb{R}$ d'après le théorème spectral.

Les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sont triangulaires avec des 1 sur la diagonale, donc ont 1 pour seule valeur propre. Si elles étaient diagonalisables, elles seraient semblables à $I_2$, donc égales à $I_2$, ce qui est faux. Ainsi, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas diagonalisables sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{Les matrices de } \mathcal{X}_2'(\mathbb{R}) \text{ diagonalisables sur } \mathbb{R} \text{ sont } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

**Q18.** On a :

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\in \mathrm{Vect}\left(\mathcal{X}_2^{I}(\mathbb{R})\right)$$
$$\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\in \mathrm{Vect}\left(\mathcal{X}_2^{I}(\mathbb{R})\right)$$
$$\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\in \mathrm{Vect}\left(\mathcal{X}_2^{I}(\mathbb{R})\right)$$
$$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\in \mathrm{Vect}\left(\mathcal{X}_2^{I}(\mathbb{R})\right)$$

Ainsi, les quatre vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ appartiennent à $\mathrm{Vect}\left(\mathcal{X}_2^{I}(\mathbb{R})\right)$, donc :

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathcal{X}_2^{I}(\mathbb{R}) \text{ engendre l'espace vectoriel } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).}$$

Soit maintenant $n \geq 2$. On a $I_n \in \mathcal{X}_n^{I}(\mathbb{R})$.

Notons $E_{i,j}$ les vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (avec $i, j \in [\![1,n]\!]$).

Pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$ tels que $i \neq j$, $I_n + E_{i,j}$ est une matrice dont tous les coefficients valent 0 ou 1 et triangulaire dont tous les coefficients diagonaux, donc inversible.

Ainsi, $I_n + E_{i,j} \in \mathcal{X}_n^{I}(\mathbb{R})$ et donc, $E_{i,j} = \left(I_n + E_{i,j}\right) - I_n \in \mathrm{Vect}\left(\mathcal{X}_n^{I}(\mathbb{R})\right)$.

Notons $J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\left(e_1, \dots, e_{n-1}, e_n\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

On a $\mathrm{Im}\, J_n = \mathrm{Vect}\left(e_n, e_1, \dots, e_{n-1}\right) = \mathbb{R}^n$, donc $J_n$ est inversible et comme tous ses coefficients valent 0 ou 1, $J_n \in \mathcal{X}_n^{I}(\mathbb{R})$.

Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $J_n + E_{i,i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{X}_n(\mathbb{R})$ et :

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\left(J_n + E_{i,i}\right) &= \mathrm{Vect}\left(e_n, e_1, \dots, e_{i-2}, e_{i-1} + e_i, e_i, , \dots, e_{n-1}\right)\\ &= \mathrm{Vect}\left(e_n, e_1, \dots, e_{i-2}, e_{i-1}, e_i, , \dots, e_{n-1}\right) = \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

Donc, $J_n + E_{i,i}$ est inversible et ainsi, $J_n + E_{i,i} \in \mathcal{X}_n^{I}(\mathbb{R})$.

Alors, $E_{i,i} = \left(J_n + E_{i,i}\right) - J_n \in \mathrm{Vect}\left(\mathcal{X}_n^{I}(\mathbb{R})\right)$.

Finalement, tous les vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ appartiennent à $\mathrm{Vect}\left(\mathcal{X}_n^{I}(\mathbb{R})\right)$, donc :

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathcal{X}_n^{I}(\mathbb{R}) \text{ engendre l'espace vectoriel } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

## II – Deux problèmes d'optimisation

### *A – Étude de la distance à* $\mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$

**Q19.** *Voir le cours*. Si $M=(m_{i,j})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $N=(n_{i,j})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\boxed{(M\mid N)=\sum_{1\le i,j\le n} m_{i,j}n_{i,j}}$$

**Q20.** L'application $N\mapsto A-N$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ comme différence d'une application constante et de l'identité. Comme la norme est continue, $N\mapsto\|A-N\|$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ comme composée d'applications continues.

Or, on a vu dans la question **Q15** que $\mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte (fermée, bornée) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donc, d'après le théorème des bornes atteintes, l'application $N\mapsto\|A-N\|$ admet un minimum sur $\mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$, autrement dit :

$$\boxed{\text{Il existe } M\in\mathcal{Y}_n(\mathbb{R}) \text{ telle que pour tout } N\in\mathcal{Y}_n(\mathbb{R}),\ \|A-M\|\le\|A-N\|.}$$

**Q21.** Supposons qu'il existe une autre matrice $M'$ de $\mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$ minimisant $N\mapsto\|A-N\|$ sur $\mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$.

Comme $M$ et $M'$ appartiennent toutes deux à $\mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\|M'-A\|\le\|M-A\| \text{ et } \|M-A\|\le\|M'-A\|.$$

Donc :

$$\|M'-A\|=\|M-A\|.$$

Toujours d'après la question **Q15**, $\mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$ est une partie convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc pour tout $t\in[0,1]$, $tM+(1-t)M'\in\mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$ et :

$$\|M-A\|\le\|tM+(1-t)M'-A\|.$$

Or :

$$\|tM+(1-t)M'-A\|=\|t(M-A)+(1-t)(M'-A)\|\le t\|M-A\|+(1-t)\|M'-A\|=\|M-A\|.$$

Ainsi, pour tout $t\in[0,1]$ :

$$\|tM+(1-t)M'-A\|=\|M-A\|.$$

Or, ici $\|.\|$ est une norme euclidienne, donc :

$$\begin{aligned}\|tM+(1-t)M'-A\|^2&=\|t(M-M')+M'-A\|^2\\&=t^2\|M-M'\|^2+2t\left(M-M'\mid M'-A\right)+\|M'-A\|^2.\\&=t^2\|M-M'\|^2+2t\left(M-M'\mid M'-A\right)+\|M-A\|^2\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $t \in [0,1]$ :

$$t^2 \|M - M'\|^2 + 2t(M - M' | M' - A) = 0.$$

Or, l'application polynômiale $t \mapsto t^2 \|M - M'\|^2 + 2t(M - M' | M' - A)$ est nulle sur $[0,1]$ si et seulement si ses coefficients sont nuls, donc $\|M - M'\| = 0$, soit $M = M'$.

Finalement :

$$\boxed{\text{Il existe une unique matrice } M \in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R}) \text{ telle que pour tout } N \in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R}),\ \|A - M\| \leq \|A - N\|.}$$

Notons $A = (a_{i,j})$ et $N = (n_{i,j})$. D'après la question **Q19**, on a :

$$\|A - N\|^2 = \sum_{1 \leq i,j \leq n} (a_{i,j} - n_{i,j})^2 .$$

Soit $M = (m_{i,j})$ définie comme suit. Pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$ :

- si $a_{i,j} \in [0,1]$, on pose $m_{i,j} = a_{i,j}$ et on a $|a_{i,j} - m_{i,j}| = 0 \leq |a_{i,j} - n_{i,j}|$ ;
- si $a_{i,j} > 1$, on pose $m_{i,j} = 1$ et on a $|a_{i,j} - m_{i,j}| = a_{i,j} - 1 \leq a_{i,j} - n_{i,j} = |a_{i,j} - n_{i,j}|$ ;
- si $a_{i,j} < 0$, on pose $m_{i,j} = 0$ et on a $|a_{i,j} - m_{i,j}| = -a_{i,j} \leq n_{i,j} - a_{i,j} = |a_{i,j} - n_{i,j}|$.

Ainsi, pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$ :

- $m_{i,j} \in [0,1]$, donc $M \in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$ ;
- $|a_{i,j} - m_{i,j}| \leq |a_{i,j} - n_{i,j}|$, donc $\sum_{1 \leq i,j \leq n} (a_{i,j} - m_{i,j})^2 \leq \sum_{1 \leq i,j \leq n} (a_{i,j} - n_{i,j})^2$, soit $\|A - M\| \leq \|A - N\|$.

Par unicité de la matrice *M*, on a :

$$\boxed{M = (m_{i,j}) \text{ avec pour tous } i, j \in [\![1, n]\!],\ m_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{quand } a_{i,j} \in \left]-\infty, 0\right[ \\ a_{i,j} & \text{quand } a_{i,j} \in [0,1] \\ 1 & \text{quand } a_{i,j} \in \left]1, +\infty\right[ \end{cases}.}$$

### *B – Maximisation du déterminant sur $\mathcal{X}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$*

**Q22.** D'après la question **Q15**, $\mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte (fermée, bornée) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On a $\mathcal{X}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$ est bornée, donc $\mathcal{X}_n(\mathbb{R})$ est bornée.

De plus, si $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{X}_n(\mathbb{R})$ convergeant vers $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $A_k = (a_{k,i,j})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $A = (a_{i,j})$, alors pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $(a_{k,i,j})_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite d'entiers (0 ou 1) convergeant (vers $a_{i,j}$), donc elle est stationnaire sur 0 ou 1 et sa limite vaut 0 ou 1.

Ainsi, pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j}\in\{0,1\}$, donc $A\in\mathcal{X}_n(\mathbb{R})$. Ceci prouve que $\mathcal{X}_n(\mathbb{R})$ est elle aussi une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Or, l'application det est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comme $\mathcal{X}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$ sont toutes deux compactes, le théorème des bornes atteintes permet d'affirmer que :

$$\boxed{\text{Le déterminant possède un maximum sur } \mathcal{X}_n(\mathbb{R}) \text{ et un maximum sur } \mathcal{Y}_n(\mathbb{R}).}$$

**Q23.** Soit $M\in\mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$. Considérons la matrice construite par blocs $M'=\begin{pmatrix} M & 0_{n,1}\\ 0_{1,n} & 1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

Les coefficients de $M'$ sont soit des coefficients de *M*, donc compris entre 0 et 1, soit 0, soit 1.

Ainsi, $M'\in\mathcal{Y}_{n+1}(\mathbb{R})$ et donc $\det M'\le y_{n+1}$.

Or, en développant par rapport à la dernière colonne, on a $\det M'=\det M$.

Nous venons donc de prouver que pour tout $M\in\mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$, $\det M\le y_{n+1}$, ce qui implique immédiatement que $y_n\le y_{n+1}$ et ainsi :

$$\boxed{\text{La suite } \left(y_n\right)_{n\ge 2} \text{ est croissante.}}$$

**Q24.** Toutes les colonnes de *J* sont égales et non nulles, donc $rg(J)=1$. Ainsi, $\dim\ker J=n-1$ et donc 0 est valeur propre de *J*, de multiplicité au moins $n-1$. Ceci veut dire que le polynôme caractéristique de *J* s'écrit $\chi_J=X^{n-1}(X-\lambda)$. Alors, $tr(J)=(n-1)\times 0+1\times\lambda=\lambda=n$.

Ainsi, $\chi_J=\det\left(X I_n-J\right)=X^{n-1}(X-n)$ et donc :

$$\det M=\det\left(J-I_n\right)=(-1)^n\det\left(I_n-J\right)=(-1)^n\chi_J(1)=(-1)^n(1-n).$$

Soit :

$$\boxed{\det M=(-1)^{n-1}(n-1)}$$

Les coefficients de *M* valent 0 (sur la diagonale) ou 1 (ailleurs), donc $M\in\mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$ et ainsi :

$$\det M=(-1)^{n-1}(n-1)\le y_n.$$

En particulier, pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, $2n\le y_{2n+1}$. Ceci prouve que la suite $\left(y_n\right)_{n\ge 2}$ n'est pas majorée et comme elle est croissante :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} y_n=+\infty}$$

**Q25.** Soient $i$ et $j$ dans $[\![1,n]\!]$ tels que $n_{i,j} \in \left]0,1\right[$ (s'il y en a).

Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, appelons $N_k$ la matrice de $\mathcal{Y}_{n-1}(\mathbb{R})$ obtenue en supprimant la $i^{\text{ième}}$ ligne et la $k^{\text{ième}}$ colonne de $N$.

En développant par rapport à la $i^{\text{ième}}$ ligne, on a :

$$\det N = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} n_{i,k} \det N_k = \sum_{k=1,k\neq j}^{n} (-1)^{i+k} n_{i,k} \det N_k + \left((-1)^{i+j} \det N_j\right) n_{i,j} .$$

Soit $N'$ la matrice de $\mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$ obtenue à partir de $N$ en remplaçant $n_{i,j}$ par $n'_{i,j} \in \{0,1\}$ suivant la règle suivante :

- si $(-1)^{i+j} \det N_j \geq 0$, on prend $n'_{i,j} = 1$ ;
- si $(-1)^{i+j} \det N_j < 0$, on prend $n'_{i,j} = 0$.

On a $\det N' = \sum_{k=1,k\neq j}^{n} (-1)^{i+k} n_{i,k} \det N_k + \left((-1)^{i+j} \det N_j\right) n'_{i,j}$ (en effectuant le même calcul que pour $N$), soit :

$$\det N - \det N' = \left((-1)^{i+j} \det N_j\right)\left(n_{i,j} - n'_{i,j}\right).$$

Comme $0 \leq n_{i,j} \leq 1$, on a :

- si $(-1)^{i+j} \det N_j \geq 0$, on prend $n_{i,j} - n'_{i,j} = n_{i,j} - 1 \leq 0$, donc $\det N - \det N' \leq 0$ ;
- si $(-1)^{i+j} \det N_j < 0$, on prend $n_{i,j} - n'_{i,j} = n_{i,j} \geq 0$, donc $\det N - \det N' \leq 0$.

Ainsi, en remplaçant $n_{i,j}$ soit par 0, soit par 1 suivant la règle ci-dessus :

$$\boxed{\text{On a obtenu une matrice } N' \in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R}) \text{ telle que } \det N \leq \det N'.}$$

Comme $N \in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$, tous ses coefficients appartiennent à $[0,1]$. Appelons $p \in [\![0,n^2]\!]$ le nombre de coefficients de $N$ appartenant à $\left]0,1\right[$.

Si $p = 0$, alors $N \in \mathcal{X}_n(\mathbb{R})$, sinon, avec la méthode qui précède, on peut construire par récurrence (en remplaçant à chaque étape un coefficient appartenant à $\left]0,1\right[$ par 0 ou 1) une suite finie $N_1, \ldots, N_p$ de matrices de $\mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, le nombre de coefficients de $N_k$ appartenant à $\left]0,1\right[$ soit égal à $p-k$ et :

$$\det N \leq \det N_1 \leq \ldots \leq \det N_k \leq \det N_{k+1} \leq \ldots \leq \det N_p .$$

Le nombre de coefficients appartenant à $\left]0,1\right[$ de $N_p \in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$ est alors $p - p = 0$, donc $N_p \in \mathcal{X}_n(\mathbb{R})$ et $\det N_p \leq x_n$. Ainsi :

$$\det N \leq x_n .$$

Ceci est vrai pour toute matrice $N$ de $\mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$, donc :

$$\underline{y_n \leq x_n}.$$

Par ailleurs, on a $\mathcal{X}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$, donc $\max\limits_{M\in\mathcal{X}_n(\mathbb{R})}(\det M) \leq \max\limits_{M\in\mathcal{Y}_n(\mathbb{R})}(\det M)$, soit :

$$\underline{x_n \leq y_n}.$$

Finalement, on obtient bien :

$$\boxed{x_n = y_n}$$

## III – Matrices aléatoires de $\mathcal{X}_n(\mathbb{R})$

### *A – Génération par une colonne aléatoire*

**Q26.** On a $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = ... = X_n(\Omega) = \{0,1\}$, donc :

$$(X_1 = X_2 = ... = X_n) = (X_1 = X_2 = ... = X_n = 0) \cup (X_1 = X_2 = ... = X_n = 1).$$

Et l'union est disjointe. Par σ-additivité et indépendance des $X_k$ :

$$\begin{aligned}P(X_1 = X_2 = ... = X_n) &= P(X_1 = X_2 = ... = X_n = 0) + P(X_1 = X_2 = ... = X_n = 1)\\ &= P(X_1 = 0, X_2 = 0, ..., X_n = 0) + P(X_1 = 1, X_2 = 1, ..., X_n = 1)\\ &= P(X_1 = 0)P(X_2 = 0)...P(X_n = 0) + P(X_1 = 1)P(X_2 = 1)...P(X_n = 1)\end{aligned}$$

Et avec $P(X_k = 0) = 1 - p$ et $P(X_k = 1) = p$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on obtient :

$$\boxed{P(X_1 = X_2 = ... = X_n) = (1-p)^n + p^n}$$

**Q27.** *Question de cours.*

Prouvons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que si $X_1, X_2, ..., X_n$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant une même loi de Bernoulli de paramètre *p*, alors $S = X_1 + X_2 + ... + X_n$ suit une loi binomiale de paramètres *n* et *p*.

- Une loi de Bernoulli de paramètre *p* est une loi binomiale de paramètres 1 et *p*, donc la propriété est vraie au rang $n = 1$.
- Supposons la propriété vraie à un rang $n \in \mathbb{N}^*$ et considérons $X_1, ..., X_n, X_{n+1}$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant une même loi de Bernoulli de paramètre *p*. Posons $X = X_1 + ... + X_n$ et $S = X_1 + ... + X_n + X_{n+1}$.

  On a $S(\Omega) = [\![0, n+1]\!]$ et pour tout $k \in [\![0, n+1]\!]$ :

  $$(S = k) = (X + X_{n+1} = k) = (X = k, X_{n+1} = 0) \cup (X = k-1, X_{n+1} = 1).$$

Et l'union est disjointe. Par σ-additivité et indépendance des $X_k$ :

$$P(S=k)=P(X=k,X_{n+1}=0)+P(X=k-1,X_{n+1}=1).$$

D'après le lemme des coalitions, $X$ et $X_{n+1}$ sont indépendantes, donc :

$$\begin{aligned}P(S=k)&=P(X=k)P(X_{n+1}=0)+P(X=k-1)P(X_{n+1}=1)\\&=P(X=k)(1-p)+P(X=k-1)\,p\end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, $X$ suit une loi binomiale de paramètres $n$ et $p$, donc :

$$P(X=k)=\begin{cases}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} & \text{si } k\leq n\\ 0 & \text{si } k=n+1\end{cases}$$

$$P(X=k-1)=\begin{cases}0 & \text{si } k=0\\ \binom{n}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k+1} & \text{si } k\geq 1\end{cases}$$

Ainsi, $P(S=0)=(1-p)^{n+1-k}$, $P(S=n+1)=p^{n+1-k}$ et pour $k\in[\![1,n]\!]$, on a avec la formule de Pascal :

$$\begin{aligned}P(S=k)&=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n+1-k}+\binom{n}{k-1}p^k(1-p)^{n-k+1}\\&=\left[\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right]p^k(1-p)^{n+1-k}=\binom{n+1}{k}p^k(1-p)^{n+1-k}\end{aligned}$$

Ainsi, $S$ suit une loi binomiale de paramètres $n+1$ et $p$ : la propriété est donc vraie au rang $n+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ :

$$\boxed{S=X_1+X_2+...+X_n \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n \text{ et } p.}$$

**Q28.** Pour tout $\omega\in\Omega$, $X_i(\omega)=0$ ou $1$ et $X_j(\omega)=0$ ou $1$, donc $X_i(\omega)X_j(\omega)=0$ ou $1$ et ainsi :

$$X_iX_j(\Omega)=\{0,1\}.$$

On a de plus, $(X_iX_j=1)=(X_i=1,X_j=1)$ et par indépendance de $X_i$ et $X_j$ :

$$P(X_iX_j=1)=P(X_i=1,X_j=1)=P(X_i=1)P(X_j=1)=p^2.$$

Ainsi, pour tous $i,j\in\{1,\dots,n\}$ :

$$\boxed{X_iX_j \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre } p^2}$$

**Q29.** Soit $\omega \in \Omega$.

a) On a $M(\omega) = \left(X_i(\omega)X_j(\omega)\right)_{1\leq i,j\leq n}$ et on a vu que $\left(X_iX_j\right)(\Omega) = \{0,1\}$, donc pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$, on a $X_i(\omega)X_j(\omega) \in \{0,1\}$ et ainsi :

$$\boxed{M(\omega) \in \mathcal{X}_n(\mathbb{R})}$$

b) Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a $X_i^2(\omega) = X_i(\omega) \in \{0,1\}$, donc :

$$tr\left(M(\omega)\right) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2(\omega) = \sum_{i=1}^{n} X_i(\omega) = S(\omega).$$

On a alors bien :

$$\boxed{tr\left(M(\omega)\right) \in \{0, 1, \dots, n\}}$$

$M(\omega)$ est symétrique réelle ($X_i(\omega)X_j(\omega) = X_j(\omega)X_i(\omega)$ pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$), donc d'après le théorème spectral :

$$\boxed{\text{La matrice } M(\omega) \text{ est diagonalisable dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

Les colonnes de $M(\omega)$ sont $X_1(\omega)U(\omega), \dots, X_n(\omega)U(\omega)$, donc $\mathrm{Im}\left(M(\omega)\right) \subset \mathrm{Vect}\left(U(\omega)\right)$ et ainsi, $rg\left(M(\omega)\right) \leq \dim\left[\mathrm{Vect}\left(U(\omega)\right)\right]$, soit :

$$\boxed{rg\left(M(\omega)\right) \leq 1}$$

c) On a :

$$M(\omega)^2 = \left(U(\omega)\left(U(\omega)\right)^{\mathsf{T}}\right)\left(U(\omega)\left(U(\omega)\right)^{\mathsf{T}}\right) = U(\omega)\left(\left(U(\omega)\right)^{\mathsf{T}} U(\omega)\right)\left(U(\omega)\right)^{\mathsf{T}}.$$

Or, $\left(U(\omega)\right)^{\mathsf{T}} U(\omega) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2(\omega) = \sum_{i=1}^{n} X_i(\omega) = S(\omega)$, donc

$$M(\omega)^2 = S(\omega)\left(U(\omega)\left(U(\omega)\right)^{\mathsf{T}}\right) = S(\omega)M(\omega).$$

Si $M(\omega) = 0_n$, ce qui équivaut à $X_1(\omega) = X_2(\omega) = \dots = X_n(\omega) = 0$ ou encore à $S(\omega) = 0$ (car tous les $X_i(\omega)$ sont positifs ou nuls), alors $M(\omega)$ est une matrice de projection orthogonale (sur $\{0\}$).

Si $M(\omega) \neq 0_n$, alors c'est une matrice de projection si et seulement si $M(\omega)^2 = M(\omega)$, soit $S(\omega) = 1$. Dans ce cas, il existe $k \in [\![1,n]\!]$ tel que $X_k(\omega) = 1$ et $X_i(\omega) = 0$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $i \neq k$. Dans ce cas, si on note $\left(e_1, e_2, \dots, e_n\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$

(orthonormée pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$), on a $U(\omega)=e_k$, donc $\mathrm{Im}\left(M(\omega)\right)=\mathrm{Vect}\left(e_k\right)$ et $\ker\left(M(\omega)\right)=\mathrm{Vect}\left(e_i, i\in[\![1,n]\!]\setminus\{k\}\right)=\left(\mathrm{Vect}\left(e_k\right)\right)^{\perp}$, donc $M(\omega)$ est une matrice de projection orthogonale.

Finalement :

$$\boxed{M(\omega) \text{ est une matrice de projection orthogonale si et seulement si } S(\omega)\in\{0,1\}.}$$

**Q30.** On a vu que $tr(M)=S$, donc :

$$\boxed{tr(M) \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n \text{ et } p.}$$

$$\boxed{E\left(tr(M)\right)=np \text{ et } V\left(tr(M)\right)=np(1-p).}$$

On a vu que pour tout $\omega\in\Omega$, $rg\left(M(\omega)\right)\leq 1$ donc $rg\left(M(\omega)\right)(\Omega)=\{0,1\}$ et :

$$\left(rg(M)=0\right)=\left(M=0_n\right)=\left(X_1=X_2=\ldots=X_n=0\right)=\left(S=0\right).$$

Donc, $P\left(rg(M)=0\right)=P\left(S=0\right)=(1-p)^n$ et ainsi :

$$\boxed{rg(M) \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre } 1-(1-p)^n.}$$

$$\boxed{E\left(rg(M)\right)=1-(1-p)^n \text{ et } V\left(rg(M)\right)=\left(1-(1-p)^n\right)(1-p)^n.}$$

**Q31.** On a établi dans la question **Q29.**c, que $M^2=SM$. Prouvons alors par récurrence sur $k$ que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $M^k=S^{k-1}M$.

- Pour $k=1$, on a $S^{1-1}M=S^0M=M=M^1$, donc la relation est vraie.
- Supposons la relation vraie à un rang $k\in\mathbb{N}^*$, soit $M^k=S^{k-1}M$. On a alors :

$$M^{k+1}=M^kM=\left(S^{k-1}M\right)M=S^{k-1}M^2=S^{k-1}SM=S^kM.$$

  Ainsi, la propriété est vraie au rang $k+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, soit :

$$\boxed{M^k=S^{k-1}M}$$

On a vu que $S(\Omega)=[\![0,n]\!]$. Soit $\omega\in\Omega$.

- Si $S(\omega)=0$, alors $\left(M(\omega)^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est nulle à partir du rang 2, donc converge (vers $0_n$).

- Si $S(\omega)=1$, alors $\left(M(\omega)^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est constante à partir du rang 1, et vaut toujours *M*, donc $\left(M(\omega)^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge (vers *M*).
- Si $S(\omega)\geq 2$, on a $\left(S(\omega)\right)^{k-1}\xrightarrow[k\to+\infty]{}+\infty$, donc $\left(M(\omega)^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ diverge.

Finalement, $\left(M(\omega)^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $S(\omega)\in\{0,1\}$.

La probabilité de l'évènement « la suite $\left(M^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge » est alors :

$$P\left(S\in\{0,1\}\right)=P\left(S=0\right)+P\left(S=1\right)=(1-p)^n+np(1-p)^{n-1}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La probabilité que la suite } \left(M^k\right)_{k\in\mathbb{N}} \text{ converge est } \left(1+(n-1)p\right)(1-p)^{n-1}.}$$

On a vu que pour tout $\omega\in\Omega$, $M(\omega)$ est une matrice de projection orthogonale si et seulement si $S(\omega)\in\{0,1\}$. Or, $\left(M(\omega)^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $S(\omega)\in\{0,1\}$, donc :

$$\boxed{\text{Quand la suite } \left(M(\omega)^k\right)_{k\in\mathbb{N}} \text{ converge, sa limite est une matrice de projection.}}$$

**Q32.** Pour $\omega\in\Omega$, $M^2(\omega)=S(\omega)M(\omega)$, donc le polynôme $X^2-S(\omega)X=\left(X-S(\omega)\right)X$ est annulateur de $M(\omega)$ et ainsi, $Sp\left(M(\omega)\right)\subset\{S(\omega),0\}$.

De plus, d'après **Q29.**b, $M(\omega)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc 0 est la seule valeur propre de $M(\omega)$ si et seulement si $M(\omega)=0_n$, soit $X_1(\omega)=X_2(\omega)=\ldots=X_n(\omega)=0$, ce qui équivaut à $S(\omega)=0$.

Ainsi, $M(\omega)$ admet deux valeurs propres distinctes si et seulement si $S(\omega)\neq 0$ et on a :

$$P\left(S\neq 0\right)=1-P\left(S=0\right)=1-(1-p)^n.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La probabilité que } M \text{ admette deux valeurs propres distinctes est } 1-(1-p)^n.}$$

***B – Génération par remplissage aléatoire***

Convenons que le sens de parcours la matrice est le même à chaque vague : on parcourt ligne par ligne de gauche à droite, soit $\left[M_k\right]_{1,1},\left[M_k\right]_{1,2},\ldots,\left[M_k\right]_{1,n},\left[M_k\right]_{2,1},\ldots,\left[M_k\right]_{2,n},\ldots,\left[M_k\right]_{n,1},\ldots,\left[M_k\right]_{n,n}$ en notant $\left[M_k\right]_{i,j}$ les coefficients de $M_k$.

Remarquons qu'à chaque vague il est possible de ne faire aucun changement, donc pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $N_k(\Omega)=[\![0,m]\!]$, avec $m=n^2$ est le nombre maximal de modifications possibles (dans le cas où tous les coefficients de $M_{k-1}$ sont nuls).

**Q33.** On a $N_1(\Omega)=[\![0,m]\!]$ et pour tout $\omega\in\Omega$, $M_0(\omega)=0_n$. La première vague peut être modélisée comme $m$ répétitions successives et indépendantes (chaque action sur un coefficient est indépendante de ce qui se passe sur les autres) d'une même épreuve de Bernoulli (action sur un coefficient) dont le succès est le passage de 0 à 1 du coefficient $[M_k]_{i,j}$ (probabilité $p$ de succès). Ainsi :

$$\boxed{N_1 \text{ suit une loi binomiale de paramètres } m \text{ et } p.}$$

Soit $i\in N_1(\Omega)=[\![0,m]\!]$. Si l'évènement $(N_1=i)$ est réalisé, alors la matrice $M_1(\omega)$ contient $i$ coefficients égaux à 1 et les $m-i$ autres sont nuls. Soit $j\in N_2(\Omega)=[\![0,m]\!]$.

- Si $j>m-i$, on a $P_{(N_1=i)}(N_2=j)=0$ car on ne peut pas changer plus de 0 en 1 qu'il n'y a de 0.
- Si $j\leq m-i$, le raisonnement ci-dessus permet alors de conclure que la loi conditionnelle de $N_2$ sachant $(N_1=i)$ est une loi binomiale de paramètres $m-i$ et $p$.

Ainsi, pour tout $i\in[\![0,m]\!]$ :

$$\boxed{P_{(N_1=i)}(N_2=j)=\begin{cases}0 & \text{quand } j>m-i\\ \dbinom{m-i}{j}p^j(1-p)^{m-i-j} & \text{quand } j\leq m-i\end{cases}}$$

La famille $\left((N_1=i)\right)_{i\in[\![0,m]\!]}$ est un système complet d'évènements, donc la formule des probabilités totales permet d'écrire pour tout $j\in N_2(\Omega)=[\![0,m]\!]$ :

$$\begin{aligned}P(N_2=j)&=\sum_{i=0}^{m}P(N_1=i)P_{(N_1=i)}(N_2=j)\\&=\sum_{i=0}^{m-j}\binom{m}{i}p^i(1-p)^{m-i}\binom{m-i}{j}p^j(1-p)^{m-i-j}\\&=\sum_{i=0}^{m-j}\binom{m}{i}\binom{m-i}{j}p^{i+j}(1-p)^{2m-2i-j}\end{aligned}$$

En particulier, $P(N_2=m)=p^m(1-p)^m\neq 0$ et on a $P(N_1=m)=p^m\neq 0$. Or :

$$P(N_1=m,N_2=m)=P(N_1=m)P_{(N_1=m)}(N_2=m)=0.$$

Donc, $P(N_1=m,N_2=m)\neq P(N_1=m)P(N_2=m)$ et ainsi :

$$\boxed{\text{Les variables aléatoires } N_1 \text{ et } N_2 \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

**Q34.** On fixe $i, j \in [\![1,n]\!]$.

La variable aléatoire $T_{i,j}$ représente le plus petit entier $k \geq 1$ tel que $\left([M_k]_{i,j} = 1\right)$ est réalisé.

Chaque coefficient nul de $M_k$ a une probabilité *p* de passer à lors de la vague $k+1$.

On a $T_{i,j}(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ avec $\left(T_{i,j} = +\infty\right) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \left([M_k]_{i,j} = 0\right)$.

Pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$, on a $\left(T_{i,j} = \ell\right) = \left([M_1]_{i,j} = 0\right) \cap \ldots \cap \left([M_{\ell-1}]_{i,j} = 0\right) \cap \left([M_\ell]_{i,j} = 1\right)$ et avec la loi des probabilités composées :

$$P\left(T_{i,j} = \ell\right) = P\left([M_1]_{i,j} = 0\right) \times P_{\left([M_1]_{i,j}=0\right)}\left([M_1]_{i,j} = 0\right) \times \ldots$$
$$\times P_{\left([M_{\ell-2}]_{i,j}=0\right)\cap\ldots\cap\left([M_{\ell-2}]_{i,j}=0\right)}\left([M_{\ell-1}]_{i,j} = 0\right) \times P_{\left([M_{\ell-2}]_{i,j}=0\right)\cap\ldots\cap\left([M_{\ell-1}]_{i,j}=0\right)}\left([M_{\ell-1}]_{i,j} = 1\right)$$

Or, tant que $[M_k]_{i,j} = 0$, l'issue de la vague suivante ne dépend pas des vagues précédentes, soit :

$$P\left([M_1]_{i,j} = 0\right) = P_{\left([M_1]_{i,j}=0\right)}\left([M_1]_{i,j} = 0\right) = \ldots = P_{\left([M_{\ell-2}]_{i,j}=0\right)\cap\ldots\cap\left([M_{\ell-2}]_{i,j}=0\right)}\left([M_{\ell-1}]_{i,j} = 0\right) = 1-p$$
$$P_{\left([M_{\ell-2}]_{i,j}=0\right)\cap\ldots\cap\left([M_{\ell-1}]_{i,j}=0\right)}\left([M_{\ell-1}]_{i,j} = 1\right) = p$$

Ainsi :

$$P\left(T_{i,j} = \ell\right) = (1-p)^{\ell-1} p \,.$$

Et donc :

$$\boxed{T_{i,j} \text{ suit la loi géométrique de paramètre } p.}$$

**Q35.** *Question de cours*. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, par σ-additivité, on a :

$$P\left(T_{i,j} \geq k\right) = P\left(\bigcup_{\ell=k}^{+\infty}\left(T_{i,j} = \ell\right)\right) = \sum_{\ell=k}^{+\infty} P\left(T_{i,j} = \ell\right) = \sum_{\ell=k}^{+\infty} (1-p)^{\ell-1} p = (1-p)^{k-1} p \frac{1}{1-(1-p)} \,.$$

Soit :

$$\boxed{P\left(T_{i,j} \geq k\right) = (1-p)^{k-1}}$$

**Q36.** La variable $N_k$ représente le nombre de modifications réalisées lors de la $k$-ième vague, donc :

| |
|---|
| $S_r = N_1 + \ldots + N_r$ représente le nombre total de modifications réalisées à l'issue des *r* premières vagues, ce qui revient au nombre de coefficients égaux à 1 dans la matrice $M_r$. |

Avec les notations introduites plus haut, on a alors $S_r = \sum_{1\le i,j\le n} [M_r]_{i,j}$.

Les $[M_r]_{i,j}$ sont à valeurs dans $\{0,1\}$ et pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$ :

$$P\left([M_r]_{i,j} = 1\right) = P\left(T_{i,j} \le r\right) = 1 - P\left(T_{i,j} \ge r+1\right) = 1-(1-p)^r.$$

De plus, les coefficients étant modifiés indépendamment les uns des autres, les $[M_r]_{i,j}$ sont indépendantes. Alors, les $[M_r]_{i,j}$ sont indépendantes et suivent toutes la même loi de Bernoulli de paramètre $1-(1-p)^r$, donc :

$$\boxed{S_r = \sum_{1\le i,j\le n} [M_r]_{i,j} \text{ suit une loi binomiale de paramètres } m \text{ et } 1-(1-p)^r.}$$

**Q37.** On a $N(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ et sous réserve d'existence :

$$E(N) = \sum_{k=1}^{+\infty} P\left(N \ge k\right).$$

Or, $N = \max_{i,j\in[\![1,n]\!]} T_{i,j}$, car $N$ représente le plus petit rang $k$ pour lequel tous les $[M_k]_{i,j}$ valent 1 et pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$, $T_{i,j}$ représente le plus petit rang $k$ pour lequel $[M_k]_{i,j}$ vaut 1.

Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ :

$$\left(N < k\right) = \left(\max_{i,j\in[\![1,n]\!]} T_{i,j} < k\right) = \bigcap_{i,j\in[\![1,n]\!]} \left(T_{i,j} < k\right).$$

Avec l'indépendance des $T_{i,j}$ et $P\left(T_{i,j} < k\right) = 1 - P\left(T_{i,j} \ge k\right) = 1-(1-p)^{k-1}$, on peut écrire :

$$P\left(N < k\right) = \prod_{i,j\in[\![1,n]\!]} P\left(T_{i,j} < k\right) = \prod_{i,j\in[\![1,n]\!]} \left[1-(1-p)^{k-1}\right] = \left[1-(1-p)^{k-1}\right]^m.$$

Alors :

$$P\left(N \ge k\right) = 1 - P\left(N < k\right) = 1 - \left[1-(1-p)^{k-1}\right]^m.$$

Comme $p \in \left]0,1\right[$, $1-p \in \left]0,1\right[$, donc $(1-p)^{k-1} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ et :

$$\left[1-(1-p)^{k-1}\right]^m = 1 - m(1-p)^{k-1} + \underset{k\to+\infty}{o}\left((1-p)^{k-1}\right).$$

Ainsi, $P\left(N \ge k\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} m(1-p)^{k-1}$ et comme la série géométrique positive $\sum m(1-p)^{k-1}$ converge, la série $\sum P\left(N \ge k\right)$ converge, et $N$ admet une espérance.

En réindexant, on a $\sum_{k=1}^{+\infty} P\left(N \ge k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(1-\left[1-(1-p)^{k-1}\right]^m\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(1-\left[1-(1-p)^{k}\right]^m\right)$ et ainsi :

$$\boxed{N \text{ admet une espérance qui vaut } E(N) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(1-\left[1-(1-p)^{k}\right]^m\right).}$$