Corrigé du DS n° 7

EXERCICE 1

Partie I - Préliminaires

Q1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

La fonction $t \mapsto f(x,t) = \dfrac{\sin t}{t} e^{-xt}$ est continue sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de telles fonctions.

De plus, d'après le résultat admis dans l'énoncé, on a pour tout $t \in]0,+\infty[$:

$$|f(x,t)| = \left|\frac{\sin t}{t}\right| e^{-xt} \le e^{-xt}.$$

Comme $x > 0$, la fonction exponentielle $t \mapsto e^{-xt}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, par comparaison :

$$\boxed{\text{La fonction exponentielle } t \mapsto f(x,t) \text{ est intégrable sur }]0,+\infty[.}$$

Q2. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$.

Les fonctions $t \mapsto 1-\cos t$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par intégration par parties, on peut écrire :

$$\int_a^b \frac{\sin t}{t} dt = \left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_a^b - \int_a^b \left(-\frac{1-\cos t}{t^2}\right) dt = \frac{1-\cos b}{b} - \frac{1-\cos a}{a} + \int_a^b \frac{1-\cos t}{t^2} dt.$$

Or :

- pour tout $b > 0$, $\left|\dfrac{1-\cos b}{b}\right| \le \dfrac{2}{b}$ et $\lim\limits_{b \to +\infty} \dfrac{2}{b} = 0$, d'où $\lim\limits_{b \to +\infty} \dfrac{1-\cos b}{b} = 0$ (théorème des gendarmes) ;
- $\lim\limits_{a \to 0} \dfrac{\cos a - 1}{a} = \cos' 0 = \sin 0 = 0$.

Ainsi :

$$\boxed{I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \text{ converge si et seulement si } \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} dt \text{ converge.}}$$

Or :

- $\cos t = 1 - \dfrac{t^2}{2} + \underset{t \to 0}{o}(t^2)$, donc $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{1-\cos t}{t^2} = \dfrac{1}{2}$ et $\displaystyle\int_0 \frac{1-\cos t}{t^2} dt$ converge ;
- pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\left|\dfrac{1-\cos t}{t^2}\right| \le \dfrac{2}{t^2}$ et $t \mapsto \dfrac{2}{t^2}$ est intégrable sur $]1,+\infty[$, donc par comparaison, $\displaystyle\int^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} dt$ converge.

Finalement, $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} dt$ converge et donc :

$$\boxed{I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \text{ converge.}}$$

Q3. Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

La fonction $t \mapsto u(x,t) = -\frac{x \sin t + \cos t}{1+x^2} e^{-xt}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de telles fonctions et pour tout $t \in]0,+\infty[$:

$$t \mapsto \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -\frac{(x\cos t - \sin t)e^{-xt} - x(x\sin t + \cos t)e^{-xt}}{1+x^2} = e^{-xt} \sin t .$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La fonction } t \mapsto u(x,t) \text{ est une primitive de } t \mapsto e^{-xt} \sin t \text{ sur }]0,+\infty[.}$$

Partie II – Calcul de *F* sur $]0,+\infty[$

Q4. On a vu dans la question **Q1** que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $t \in]0,+\infty[$, on a :

$$|f(x,t)| \leq e^{-xt} .$$

Et comme F et $t \mapsto e^{-xt}$ sont intégrables sur $]0,+\infty[$, on peut écrire pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$|F(x)| = \left| \int_0^{+\infty} f(x,t)\,dt \right| \leq \int_0^{+\infty} |f(x,t)|\,dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \left[-\frac{1}{x} e^{-xt} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x} .$$

Ainsi, on a bien pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\boxed{|F(x)| \leq \frac{1}{x}}$$

Comme $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, le théorème des gendarmes permet de conclure que :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0}$$

Q5. Soit un réel $a>0$.

La fonction $f:(x,t)\mapsto f(x,t)=\dfrac{\sin t}{t}e^{-xt}$ est définie sur $[a,+\infty[\times]0,+\infty[$.

- Pour tout $x\in[a,+\infty[$, $t\mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux (car continue) et intégrable sur $]0,+\infty[$ (d'après **Q1**).
- Pour tout $t\in]0,+\infty[$, $x\mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur $[a,+\infty[$ (car proportionnelle à une fonction exponentielle).
- Pour tout $x\in[a,+\infty[$, $t\mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)=-e^{-xt}\sin t$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$ (comme produite de telles fonctions).
- Pour tout $(x,t)\in[a,+\infty[\times]0,+\infty[$, on a $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|\leq \varphi(t)=e^{-at}$ et la fonction exponentielle φ est positive, continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$.

Alors, la fonction $x\mapsto \int_0^{+\infty} f(x,t)\,dt$ est de classe C^1 sur $[a,+\infty[$, de dérivée $x\mapsto \int_0^{+\infty}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$, et ainsi :

$$\boxed{F \text{ est dérivable sur } [a,+\infty[\text{, de dérivée } x\mapsto -\int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin t\,dt.}$$

Q6. On vient de montrer que F est dérivable sur $[a,+\infty[$ pour tout réel $a>0$, donc F est dérivable sur $\bigcup_{a\in\mathbb{R}_+^*}[a,+\infty[$, soit :

$$\boxed{F \text{ est dérivable sur }]0,+\infty[.}$$

On a de plus $F'(x)=-\int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin t\,dt$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$. Or, la fonction $t\mapsto u(x,t)$ est une primitive de $t\mapsto e^{-xt}\sin t$ sur $]0,+\infty[$, donc :

$$F'(x)=\left[-u(x,t)\right]_{t=0}^{t=+\infty}=\left[\frac{x\sin t+\cos t}{1+x^2}e^{-xt}\right]_{t=0}^{t=+\infty}=-\frac{1}{1+x^2}.$$

Soit, pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$\boxed{F'(x)=-\frac{1}{1+x^2}}$$

On a alors $F(x)=-\arctan x+K$ avec K une constante réelle. Et :

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=0=-\frac{\pi}{2}+K.$$

Donc, $K=\dfrac{\pi}{2}$ et finalement, pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$\boxed{F(x)=\frac{\pi}{2}-\arctan x}$$

Partie III – Conclusion

Q7. La fonction $f:(x,t)\mapsto f(x,t)=\dfrac{\sin t}{t}e^{-xt}$ est définie sur $[0,1]\times]0,1]$.

- Pour tout $x\in[0,1]$, $t\mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,1]$ en tant que produit de telles fonctions.
- Pour tout $t\in]0,1]$, $x\mapsto f(x,t)$ est continue sur $[0,1]$ (car proportionnelle à une fonction exponentielle).
- Pour tout $(x,t)\in[0,1]\times]0,1]$, $|f(x,t)|\leq 1$ et $t\mapsto 1$ est positive, continue par morceaux et intégrable sur $]0,1]$.

Alors, la fonction $x\mapsto\int_0^1 f(x,t)\,dt$ est définie et continue sur $[0,1]$. Ainsi :

$$\boxed{F_1 \text{ est continue sur } [0,1].}$$

Q8. Soit $x\in[0,1]$.

La fonction $t\mapsto\dfrac{u(x,t)}{t^2}$ est continue sur $[1,+\infty[$ en tant que quotient de telles fonctions et pour tout $t\in[1,+\infty[$:

$$|u(x,t)|=\frac{|x\sin t+\cos t|}{1+x^2}e^{-xt}\leq\frac{x|\sin t|+|\cos t|}{1+x^2}\leq 2\quad\Rightarrow\quad\left|\frac{u(x,t)}{t^2}\right|\leq\frac{2}{t^2}.$$

Comme la fonction $t\mapsto\dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, par comparaison :

$$\boxed{\text{La fonction } t\mapsto\frac{u(x,t)}{t^2} \text{ est intégrable sur } [1,+\infty[.}$$

Soit $b\in[1,+\infty[$.

Les fonctions $t\mapsto u(x,t)$ et $t\mapsto\dfrac{1}{t}$ sont de classe C^1 sur $[1,+\infty[$, de dérivée $t\mapsto e^{-xt}\sin t$ pour la première. Par intégration par parties, on peut écrire :

$$\int_1^b\frac{e^{-xt}\sin t}{t}dt=\left[\frac{u(x,t)}{t}\right]_1^b-\int_1^b\left(-\frac{u(x,t)}{t^2}\right)dt=\frac{u(x,b)}{b}-u(x,1)+\int_1^b\frac{u(x,t)}{t^2}dt\,.$$

Pour tout $b \geq 1$, $\left|\dfrac{u(x,b)}{b}\right| \leq \dfrac{2}{b}$ et $\lim\limits_{b\to+\infty} \dfrac{u(x,b)}{b} = 0$, donc, d'après le théorème des gendarmes, on a $\lim\limits_{b\to+\infty} \dfrac{u(x,b)}{b} = 0$. Comme $t \mapsto \dfrac{u(x,t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, on obtient :

$$F_2(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}\sin t}{t}\,dt = -u(x,1) + \int_1^{+\infty} \frac{u(x,t)}{t^2}\,dt .$$

Soit :

$$\boxed{F_2(x) = \frac{x\sin 1 + \cos 1}{1+x^2}e^{-x} + \int_1^{+\infty} \frac{u(x,t)}{t^2}\,dt}$$

Q9. La fonction $(x,t) \mapsto \dfrac{u(x,t)}{t^2}$ est définie sur $[0,1]\times[1,+\infty[$.

- Pour tout $x \in [0,1]$, $t \mapsto \dfrac{u(x,t)}{t^2}$ est continue par morceaux sur $[1,+\infty[$ (vu plus haut).
- Pour tout $t \in [1,+\infty[$, $x \mapsto \dfrac{u(x,t)}{t^2} = -\dfrac{1}{t^2}\dfrac{x\sin t + \cos t}{1+x^2}e^{-xt}$ est continue sur $[0,1]$ en tant que produit de telles fonctions.
- Pour tout $(x,t) \in [0,1]\times[1,+\infty[$, $\left|\dfrac{u(x,t)}{t^2}\right| \leq \dfrac{2}{t^2}$ (on l'a vu plus haut), et la fonction $t \mapsto \dfrac{2}{t^2}$ est positive, continue par morceaux et intégrable sur $[1,+\infty[$.

Alors, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{u(x,t)}{t^2}\,dt$ est continue sur $[0,1]$.

De plus, la fonction $x \mapsto \dfrac{x\sin 1 + \cos 1}{1+x^2}e^{-x}$ est continue sur $[0,1]$ en tant que produit de telles fonctions. Alors, F_2 est la somme de deux fonctions continues sur $[0,1]$, donc :

$$\boxed{F_2 \text{ est continue sur } [0,1].}$$

Q10. Remarquons que la question **Q1** implique que F est définie sur $]0,+\infty[$.

Comme $f(0,t) = \dfrac{\sin t}{t}$ est défini pour tout $t \in]0,+\infty[$ et $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ converge (**Q2**), F est définie en 0. Ainsi, F est bien définie sur $[0,+\infty[$ et pour tout $x \in [0,1]$:

$$F(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)\,dt = \int_0^1 f(x,t)\,dt + \int_1^{+\infty} f(x,t)\,dt = F_1(x) + F_2(x) .$$

D'après **Q7** et **Q9**, sur $[0,1]$, F est la somme de deux fonctions continues, donc F est continue sur $[0,1]$ et par conséquent :

$$\boxed{F \text{ est continue en } 0.}$$

On a alors :

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt=F(0)=\lim_{x\to 0}F(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}.$$

D'où :

$$\boxed{I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt=\frac{\pi}{2}}$$

EXERCICE 2

Partie I - Étude d'un exemple

On a $B_2=\left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\setminus x_1^2+x_2^2\leq 1\right\}$ et :

$$f:B_2\to\mathbb{R}\,;\,(x_1,x_2)\mapsto x_1^2+x_2^2+4x_1x_2.$$

Ici, $a_{1,1}=a_{2,2}=1$ et $a_{1,2}=4$, donc :

$$M_f=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}.$$

Q11. L'application *f* est polynômiale en x_1 et x_2, donc continue sur son ensemble de définition.

Or, la boule fermée B_2 est une partie compacte (fermée et bornée) de $\mathbb{R}^2$, qui est de dimension finie.

On peut alors conclure que, sur B_2, *f* est bornée et atteint ses bornes, autrement dit :

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ admet un maximum et un minimum sur } B_2.}$$

Q12. Remarquons que $S_2=\left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\setminus x_1^2+x_2^2=1\right\}=\left\{(\cos t,\sin t)\setminus t\in\mathbb{R}\right\}$ et pour tout $t\in\mathbb{R}$:

$$f(\cos t,\sin t)=\cos^2 t+\sin^2 t+4\cos t\sin t=1+2\sin(2t).$$

Comme pour tout $t\in\mathbb{R}$, $-1\leq\sin(2t)\leq 1$, on a :

$$-1\leq f(\cos t,\sin t)\leq 3.$$

Enfin :

- pour $t=\frac{3\pi}{4}$, $f(\cos t,\sin t)=-1$ donc – 1 est le minimum de *f* sur S_2 ;
- pour $t=\frac{\pi}{4}$, $f(\cos t,\sin t)=3$ donc 3 est le maximum de *f* sur S_2.

Finalement :

$$\boxed{\text{Le minimum et le maximum de } f \text{ sur } S_2 \text{ sont respectivement } -1 \text{ et } 3.}$$

Q13. Pour tout $(x_1,x_2)\in B_2$:

$$f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2+4x_1x_2=2(x_1^2+x_2^2+2x_1x_2)-(x_1^2+x_2^2)=2(x_1+x_2)^2-(x_1^2+x_2^2)\,.$$

Donc, si $(x_1,x_2)\in B_2'$, on a $x_1^2+x_2^2<1$ et :

$$f(x_1,x_2)=2(x_1+x_2)^2-(x_1^2+x_2^2)\geq -(x_1^2+x_2^2)>-1\,.$$

Pour tout $(x_1,x_2)\in B_2$, $2x_1x_2=x_1^2+x_2^2-(x_1-x_2)^2$, donc :

$$f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2+4x_1x_2=x_1^2+x_2^2+2(x_1^2+x_2^2)-2(x_1-x_2)^2=3(x_1^2+x_2^2)-2(x_1-x_2)^2\,.$$

Donc, si $(x_1,x_2)\in B_2'$, on a $x_1^2+x_2^2<1$ et :

$$f(x_1,x_2)=3(x_1^2+x_2^2)-2(x_1-x_2)^2\leq 3(x_1^2+x_2^2)<3\,.$$

Finalement, on a bien :

$$\boxed{\text{Pour tout } (x_1,x_2)\in B_2',\ -1<f(x_1,x_2)<3\,.}$$

Q14. D'après les deux questions précédentes, on a $-1\leq f(x_1,x_2)\leq 3$ pour tout $(x_1,x_2)\in B_2$ et les valeurs – 1 et 3 sont atteintes (en $(x_1,x_2)=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $(x_1,x_2)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ respectivement).

Ainsi :

$$\boxed{-1 \text{ et } 3 \text{ sont respectivement le minimum et le maximum de } f \text{ sur } B_2\,.}$$

Q15. On a vu que $M_f=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$, donc le polynôme caractéristique de M_f est :

$$\chi_{M_f}=\begin{vmatrix}X-1&-2\\-2&X-1\end{vmatrix}=(X-1)^2-4=(X+1)(X-3)\,.$$

Donc, $Sp(M_f)=\{-1,3\}$ et ainsi :

$$\boxed{\text{La plus petite valeur propre de } M_f \text{ est } -1=\min_{B_2} f \text{ et sa plus grande valeur propre est } 3=\max_{B_2} f\,.}$$

Partie II - Le cas général

On notera ${}^tM = M^{\mathrm{T}}$ la transposée d'une matrice.

Q16. On a $M_f = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc pour tout $X = {}^t(x_1 \ \dots \ x_n) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$M_f X = {}^t\left(\sum_{j=1}^n m_{1,j}x_j \ \dots \ \sum_{j=1}^n m_{n,j}x_j\right)$$

Donc :

$${}^tXM_fX = \sum_{i=1}^n \left(x_i \sum_{j=1}^n m_{i,j}x_j\right) = \sum_{1\le i,j\le n} m_{i,j}x_ix_j = \sum_{i=1}^n m_{i,i}x_i^2 + \sum_{1\le i<j\le n} m_{i,j}x_ix_j + \sum_{1\le j<i\le n} m_{i,j}x_ix_j \ .$$

Or, M_f est symétrique, donc pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$, $m_{i,j} = m_{j,i}$ et :

$$\sum_{1\le j<i\le n} m_{i,j}x_ix_j = \sum_{1\le i<j\le n} m_{j,i}x_jx_i = \sum_{1\le i<j\le n} m_{i,j}x_ix_j \ .$$

Donc :

$${}^tXM_fX = \sum_{i=1}^n m_{i,i}x_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} m_{i,j}x_ix_j = \sum_{i=1}^n m_{i,i}x_i^2 + \sum_{1\le i<j\le n} 2m_{i,j}x_ix_j \ .$$

Enfin, comme pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$, $m_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j} & \text{quand } i = j \\ \dfrac{a_{i,j}}{2} & \text{quand } i < j \end{cases}$, on obtient :

$${}^tXM_fX = \sum_{i=1}^n a_{i,i}x_i^2 + \sum_{1\le i<j\le n} a_{i,j}x_ix_j = \sum_{1\le i\le j\le n} a_{i,j}x_ix_j = f(x_1, \dots, x_n)\,.$$

Ainsi, $x = (x_1, \dots, x_n) \in B_n$ avec $X = {}^t(x_1 \ \dots \ x_n)$, on a :

$$\boxed{f(x) = {}^tXM_fX}$$

Q17. Par définition, M_f est une matrice symétrique réelle. D'après le théorème spectral :

$$\boxed{M_f \text{ est diagonalisable dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\,.}$$

Q18. Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ avec $X = {}^t(x_1 \ \dots \ x_n)$. On a :

$${}^tXX = x_1^2 + \dots \ x_n^2 = \|x\|^2\,.$$

Par ailleurs, comme P est orthogonale, on a ${}^tP = P^{-1}$, donc $({}^tP)^{-1} = P$. Alors :

$${}^tYY = {}^t(P^{-1}X)(P^{-1}X) = {}^tX\,{}^t(P^{-1})(P^{-1}X) = {}^tXPP^{-1}X = {}^tXX\ .$$

Finalement, on a bien :

$$\boxed{{}^tYY = {}^tXX = \|x\|^2}$$

Q19. Notons $Y = {}^t(y_1 \ \dots \ y_n)$. On a $D = diag\left(\lambda_1, \dots, \lambda_n\right)$ donc $DY = {}^t(\lambda_1 y_1 \ \dots \ \lambda_n y_n)$ et :

$${}^tYDY = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 .$$

Comme pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_1 \leq \lambda_k \leq \lambda_n$ et $y_k^2 \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_1 y_k^2 \leq {}^tYDY = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2 \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_n y_k^2 .$$

Or :

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_1 y_k^2 = \lambda_1 \sum_{k=1}^{n} y_k^2 = \lambda_1 \, {}^tYY = \lambda_1 \|x\|^2 .$$

Et de même $\sum_{k=1}^{n} \lambda_n y_k^2 = \lambda_n \|x\|^2$, donc :

$$\lambda_1 \|x\|^2 \leq {}^tYDY \leq \lambda_n \|x\|^2 .$$

Mais $x \in B_n$, donc $\|x\|^2 \leq 1$ et comme $\lambda_1 < 0 < \lambda_n$, on a $\lambda_1 \leq \lambda_1 \|x\|^2$ et $\lambda_n \|x\|^2 \leq \lambda_n$, d'où :

$$\boxed{\lambda_1 \leq {}^tYDY \leq \lambda_n}$$

On a $M_f = PDP^{-1}$, $P^{-1} = {}^tP$ et $Y = P^{-1}X$, donc, d'après la question **Q16** :

$$f(x) = {}^tXM_fX = {}^tX(PDP^{-1})X = ({}^tXP)D(P^{-1}X) = {}^t({}^tPX)D(P^{-1}X) = {}^t(P^{-1}X)D(P^{-1}X) = {}^tYDY .$$

Et ainsi, le résultat précédent se récrit :

$$\boxed{\lambda_1 \leq f(x) \leq \lambda_n}$$

Q20. Comme λ_1 et λ_n sont des valeurs propres de la matrice M_f, il existe deux vecteurs $Z_1 = {}^t(\alpha_1 \ \dots \ \alpha_n) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Z_n = {}^t(\beta_1 \ \dots \ \beta_n) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, non nuls et tels que :

$$M_f Z_1 = \lambda_1 Z_1 \quad \text{et} \quad M_f Z_n = \lambda_n Z_n .$$

Comme Z_1 et Z_n sont non nuls, on peut supposer que $\|Z_1\| = \|Z_n\| = 1$, quitte à remplacer Z_1 par $\dfrac{1}{\|Z_1\|} Z_1$ et Z_n par $\dfrac{1}{\|Z_n\|} Z_n$ (qui sont aussi vecteurs propres de M_f associés à λ_1 et λ_n respectivement). En notant alors $z_1 = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et $z_n = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, on a $z_1, z_n \in B_n$ et :

$$f(z_1) = {}^tZ_1 M_f Z_1 = {}^tZ_1(\lambda_1 Z_1) = \lambda_1 \, {}^tZ_1 Z_1 = \lambda_1 \|Z_1\|^2 = \lambda_1 .$$

De même $f(z_n) = \lambda_n$.

Ainsi, λ_1 et λ_n sont respectivement un minorant et un majorant de *f* (d'après la question précédente), atteint par *f* comme on vient de le voir. Ceci permet de conclure que :

$$\boxed{\min_{B_n} f = \lambda_1 \quad \text{et} \quad \max_{B_n} f = \lambda_n .}$$

Q21. Ici, $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_n$. En reprenant les notations des questions précédentes, on a :

$$f(x) = {}^t X M_f X = {}^t Y D Y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2 .$$

Et, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $0 \leq \lambda_k \leq \lambda_n$ et $y_k^2 \geq 0$, donc (avec toujours $\|x\|^2 \leq 1$), on a :

$$0 \leq f(x) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_n y_k^2 = \lambda_n \|x\|^2 \leq \lambda_n .$$

Enfin, $f(0) = 0$ et on prouve comme dans la question précédente que λ_n est atteint par *f*, donc :

$$\boxed{\min_{B_n} f = 0 \quad \text{et} \quad \max_{B_n} f = \lambda_n .}$$

Remarquons que si $\lambda_1 = 0$*, on obtient à nouveau* $\min_{B_n} f = \lambda_1$.

Partie III - Application des résultats

Q22. Ici, on a pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in B_n$:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2 x_i x_j .$$

Donc, on a $a_{i,i} = 1$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et $a_{i,j} = -2$ pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$ tels que $i < j$. Alors :

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$M_f - 2I_n = \begin{pmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Comme toutes les colonnes de cette matrice sont les mêmes et non nulles, $rg\left(M_f - 2I_n\right) = 1$.

Alors, d'après le théorème du rang, $\dim\ker\left(M_f - 2I_n\right) = n-1$, donc 2 est valeur propre de M_f et le sous-espace propre associé est de dimension $n-1$. Ceci implique que M_f possède une est une seule autre valeur propre et que le sous-espace propre associé à λ est de dimension 1 (une droite).

On a alors $Tr(M_f) = 2(n-1)+\lambda$. Or, $Tr(M_f) = n$, donc $\lambda = n - 2(n-1) = 2-n$.

Ainsi, $Sp(M_f) = \{2-n, 2\}$ avec $2-n \leq 0 < 2$

D'après la partie précédente (**Q20** si $n > 2$, **Q21** si $n = 2$), on peut conclure que :

$$\boxed{\min_{B_n} f = 2-n \quad \text{et} \quad \max_{B_n} f = 2.}$$

EXERCICE 3

Partie I – Calcul de p_n

Q23. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, X_k représente la variation de l'abscisse du pion entre les étapes $k-1$ et k. En posant $X_0 = S_0 = 0$, on a $S_n = X_0 + X_1 + ... + X_n$ et :

$$\boxed{\text{La variable } S_n \text{ représente l'abscisse (entière) du pion après } n \text{ étapes.}}$$

Q24. On a $p_0 = P(S_0 = 0) = 1$ (car S_0 est la variable nulle) et $p_1 = P(S_1 = 0) = 0$ (car le pion se déplace de manière certaine et est en 0 initialement, donc en – 1 ou 1 après une étape).

La famille $\left(\left((X_1=-1),(X_1=1)\right)\right)$ est un système complet d'évènements et la loi de probabilités totales donne :

$$p_2 = P(S_2=0) = P(X_1=-1)P_{(X_1=-1)}(S_2=0) + P(X_1=-1)P_{(X_1=-1)}(S_2=0) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi :

$$\boxed{p_0 = 1 \qquad p_1 = 0 \qquad p_2 = \frac{1}{2}}$$

Q25. Comme, à chaque étape, le pion se déplace de 1 (déplacement vers la droite) ou – 1 (déplacement vers la gauche), il faut un nombre pair de déplacements (avec autant de déplacements vers la gauche que vers la droite), donc :

$$\boxed{\text{Si } n \text{ est impair, alors } p_n = 0.}$$

Q26. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $X_k(\Omega) = \{-1, 1\}$, donc $Y_k(\Omega) = \{-1,1\} = \left\{\frac{-1+1}{2}, \frac{1+1}{2}\right\}$, soit :

$$Y_k(\Omega) = \{0,1\}.$$

Et :

$$P(Y_k = 0) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}$$

$$P(Y_k = 1) = P(X_k = 1) = \frac{1}{2}$$

Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{Y_k \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre } \frac{1}{2}.}$$

Q27. Comme les X_k sont mutuellement indépendantes, les $Y_k = \frac{X_k + 1}{2}$ le sont aussi et, comme les Y_k suivent toutes une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$:

$$\boxed{Z_n = Y_1 + \ldots + Y_n \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n \text{ et } \frac{1}{2}.}$$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$Z_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k + 1}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k + \sum_{k=1}^{n} 1\right) = \frac{1}{2}(S_n + n).$$

Donc :

$$\boxed{S_n = 2Z_n - n}$$

Q28. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On a $(S_{2m} = 0) = (2Z_{2m} - 2m = 0) = (Z_{2m} = m)$ et, comme Z_{2m} suit une loi binomiale de paramètres $2m$ et $\frac{1}{2}$:

$$P(S_{2m} = 0) = P(Z_{2m} = m) = \binom{2m}{m}\left(\frac{1}{2}\right)^m \left(\frac{1}{2}\right)^{2m-m} = \binom{2m}{m}\frac{1}{2^{2m}} = \binom{2m}{m}\frac{1}{4^m}.$$

Et $P(S_{2m} = 0) = 1 = \binom{2\times 0}{0}\frac{1}{4^0}$, donc pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{p_{2m} = \binom{2m}{m}\frac{1}{4^m}}$$

Partie II – Fonction génératrice de la suite (p_n)

Q29. Rappelons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = 0$ si n est impair et $p_{2m} = \binom{2m}{m}\frac{1}{4^m}$ si $n = 2m$ est pair.

On a donc pour tout $x \in \left]-R_p, R_p\right[$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n = \sum_{m=0}^{+\infty} p_{2m} x^{2m} = \sum_{m=0}^{+\infty} \binom{2m}{m}\frac{1}{4^m} x^{2m} .$$

Or, avec la formule de Stirling, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\binom{2m}{m}\frac{1}{4^m} x^{2m} = \frac{(2m)!}{(m!)^2}\frac{x^{2m}}{4^m} \underset{m \to +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi(2m)}\left(\frac{2m}{e}\right)^{2m}}{\left(\sqrt{2\pi m}\left(\frac{m}{e}\right)^m\right)^2}\frac{x^{2m}}{4^m} = \frac{x^{2m}}{\sqrt{\pi m}} .$$

Or, si $|x| \le 1$, la suite $\left(\frac{x^{2m}}{\sqrt{\pi m}}\right)_{m \in \mathbb{N}^*}$ tend vers 0 donc est bornée et si $|x| > 1$, la suite $\left(\left|\frac{x^{2m}}{\sqrt{\pi m}}\right|\right)_{m \in \mathbb{N}^*}$ diverge vers l'infini (par croissances comparées), donc par définition :

$$\boxed{R_p = 1}$$

Q30. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\frac{(-1)^m}{m!}\prod_{k=1}^{m}\left(-\frac{1}{2} - k + 1\right) = \frac{(-1)^m}{m!}\prod_{k=1}^{m}\left(-\frac{2k-1}{2}\right) = \frac{(-1)^m}{m!}\frac{(-1)^m}{2^m}\prod_{k=1}^{m}(2k-1)$$

$$= \frac{1}{2^m m!}\frac{\prod_{k=1}^{m}(2k-1)\prod_{k=1}^{m}(2k)}{\prod_{k=1}^{m}(2k)} = \frac{1}{2^m m!}\frac{(2m)!}{2^m m!} = \frac{(2m)!}{(m!)^2}\frac{1}{4^m} = \binom{2m}{m}\frac{1}{4^m}$$

Ainsi, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\frac{(-1)^m}{m!}\prod_{k=1}^{m}\left(-\frac{1}{2} - k + 1\right) = p_{2m}}$$

Q31. On a pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout $h \in \left]-1, 1\right[$:

$$(1+h)^\alpha = 1 + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-m+1)}{m!} h^m = 1 + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m!}\prod_{k=1}^{m}(\alpha - k + 1)\, h^m .$$

Alors, pour tout $x \in \left]-1,1\right[$, $-x^2 \in \left]-1,1\right[$ et en remplaçant h par $-x^2$ dans la formule ci-dessus, on obtient :

$$(1-x^2)^\alpha = 1+\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m!}\prod_{k=1}^{m}(\alpha-k+1)(-x^2)^m = 1+\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{m!}\prod_{k=1}^{m}(\alpha-k+1)\,x^{2m}.$$

Or, on a pour tout $x \in \left]-1,1\right[$:

$$f(x)=\sum_{m=0}^{+\infty} p_{2m}x^{2m} = p_0+\sum_{m=1}^{+\infty} p_{2m}x^{2m} = 1+\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{m!}\prod_{k=1}^{m}\left(-\frac{1}{2}-k+1\right)x^{2m}.$$

Par identification (unicité du développement en série entière), on obtient $\alpha=-\frac{1}{2}$:

$$\boxed{\alpha=-\frac{1}{2} \text{ et } f(x)=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ pour tout } x\in\left]-1,1\right[.}$$

Partie III - Loi de la variable aléatoire *T*

On a :

$$T=\begin{cases} +\infty & \text{si } \forall n\in\mathbb{N}^*, S_n\neq 0 \\ \min\left\{n\in\mathbb{N}^* \mid S_n=0\right\} & \text{sinon}\end{cases} \quad \text{et} \quad q_n=\begin{cases} 0 & \text{si } n=0 \\ P(T=n) & \text{si } n>0\end{cases}$$

Q32. On a $q_1=P(T=1)$. Pour $\omega\in\Omega$, on a $T(\omega)=\min\left\{n\in\mathbb{N}^* \mid S_n(\omega)=0\right\}=1$ si et seulement si $S_1(\omega)=0$, donc $(T=1)=(S_1=0)$. Ainsi :

$$q_1=P(S_1=0)=p_1=0.$$

On a $q_2=P(T=2)$. Pour $\omega\in\Omega$, on a $T(\omega)=\min\left\{n\in\mathbb{N}^* \mid S_n(\omega)=0\right\}=2$ si et seulement si $S_1(\omega)\neq 0$ et $S_2(\omega)=0$, donc $(T=1)=(S_1\neq 0)\cap(S_2=0)=(S_2=0)$. Ainsi :

$$q_1=P(S_2=0)=p_2=\frac{1}{2}.$$

Donc :

$$\boxed{q_1=0 \qquad q_2=\frac{1}{2}}$$

Q33. On a $T(\Omega)=\mathbb{N}^*\cup\left\{+\infty\right\}$, donc $\sum_{n=1}^{+\infty}P(T=n)+P(T=+\infty)=1$, soit :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} q_n = 1-P(T=+\infty).$$

Donc, la série $\sum q_n$ converge.

Alors, pour tout $t \in [-1,1]$, $|g_n(t)| = |q_n t^n| = q_n |t|^n \le q_n$ et comme $\sum q_n$ converge :

$$\boxed{\text{La série } \sum g_n \text{ converge normalement sur } [-1,1].}$$

Comme $\sum q_n$ converge, la série entière $\sum q_n x^n$ converge pour $x = 1$, on a immédiatement :

$$\boxed{R_q \ge 1}$$

Q34. Soit $x \in \left]-1,1\right[$. On a :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n \text{ et } g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} q_n x^n .$$

Et les deux séries convergent absolument. On peut donc utiliser la formule du produit de Cauchy :

$$f(x)g(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} q_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}\right) x^n .$$

Or, $\sum_{k=0}^{0} p_k q_{0-k} = p_0 q_0 = 0$ (car $q_0 = 0$) et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k} = p_n$ (admis), donc :

$$f(x)g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}\right) x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n - p_0 .$$

Finalement, avec $p_0 = 1$, on obtient pour tout $x \in \left]-1,1\right[$:

$$\boxed{f(x)g(x) = f(x) - 1}$$

Q35. On a vu que pour tout $x \in \left]-1,1\right[$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, donc *f* ne s'annule pas sur $\left]-1,1\right[$ et la relation précédente se récrit pour tout $x \in \left]-1,1\right[$:

$$g(x) = 1 - \frac{1}{f(x)} .$$

Soit, pour tout $x \in \left]-1,1\right[$:

$$\boxed{g(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}}$$

Avec toujours pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout $h \in \left]-1,1\right[$, $(1+h)^\alpha = 1 + \sum_{m=1}^{+\infty} \dfrac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-m+1)}{m!} h^m$, on a pour tout $x \in \left]-1,1\right[$, $h = -x^2 \in \left]-1,0\right] \subset \left]-1,1\right[$ et :

$$\sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{1/2} = 1 + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m!}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)...\left(\frac{1}{2}-m+1\right)(-x^2)^m .$$

Or, pour tout $m\in\mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-m+1\right)=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\ldots\left(-\frac{2m-3}{2}\right)=(-1)^{m-1}\frac{1\times3\times\ldots\times(2m-3)}{2^m}=(-1)^{m-1}\frac{(2m)!}{(2m-1)2^{2m}m!}.$$

Donc, pour tout $x\in\left]-1,1\right[$:

$$\begin{aligned}g(x)=1-\sqrt{1-x^2}&=-\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m!}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-m+1\right)(-x^2)^m\\&=-\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m!}(-1)^{m-1}\frac{(2m)!}{(2m-1)2^{2m}m!}(-1)^m x^{2m}=\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{2m-1}\frac{(2m)!}{(m!)^2}\frac{1}{4^m}x^{2m}\end{aligned}$$

Soit, pour tout $x\in\left]-1,1\right[$:

$$\boxed{g(x)=\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{2m-1}\binom{2m}{m}\frac{1}{4^m}x^{2m}}$$

On a vu dans la question **Q29** que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\binom{2m}{m}\frac{1}{4^m}x^{2m}\underset{m\to+\infty}{\sim}\frac{x^{2m}}{\sqrt{\pi m}}$, donc :

$$\frac{1}{2m-1}\binom{2m}{m}\frac{1}{4^m}x^{2m}\underset{m\to+\infty}{\sim}\frac{x^{2m}}{2m\sqrt{\pi m}}.$$

Or, si $|x|\leq 1$, la suite $\left(\frac{x^{2m}}{2m\sqrt{\pi m}}\right)_{m\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0 donc est bornée et si $|x|>1$, la suite $\left(\left|\frac{x^{2m}}{2m\sqrt{\pi m}}\right|\right)_{m\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers l'infini (par croissances comparées), donc par définition :

$$\boxed{R_q=1}$$

Q36. On a pour tout $x\in\left]-1,1\right[$, $g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}q_nx^n=\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{2m-1}\binom{2m}{m}\frac{1}{4^m}x^{2m}$ donc par unicité du développement en série entière, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\boxed{q_n=\begin{cases}0 & \text{quand } n \text{ est nul ou impair}\\ \dfrac{1}{2m-1}\dbinom{2m}{m}\dfrac{1}{4^m} & \text{quand } n \text{ est pair (avec } n=2m)\end{cases}}$$

Q37. Comme $\sum g_n$ converge normalement sur $[-1,1]$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $g_n:x\mapsto q_nx^n$ est continue sur $[-1,1]$, la fonction $g=\sum_{n=0}^{+\infty}g_n$ est continue sur $[-1,1]$.

Alors, avec $q_0 = 0$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} q_n = \sum_{n=0}^{+\infty} q_n = g(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} q_n = \lim_{x \to 1^-} g(x) = \lim_{x \to 1^-} \left(1 - \sqrt{1 - x^2}\right) = 1.$$

Or, on a vu dans la question **Q33** que $\sum_{n=1}^{+\infty} P(T = n) + P(T = +\infty) = \sum_{n=1}^{+\infty} q_n + P(T = +\infty) = 1$, donc :

$$1 + P(T = +\infty) = 1.$$

Soit :

$$\boxed{P(T = +\infty) = 0}$$

L'évènement $(T = +\infty)$ se réalise quand pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \neq 0$, c'est-à-dire que le pion n'est pas à l'origine après la $n^{\text{ième}}$ étape (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$), donc quand le pion ne repasse jamais par l'origine. Ainsi :

$$\boxed{\text{La probabilité que le pion ne repasse jamais par l'origine est nulle.}}$$

Q38. Comme $P(T = +\infty) = 0$, si elle existe, on a $E(T) = \sum_{n=1}^{+\infty} n P(T = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, q_n = \sum_{n=1}^{+\infty} 2n\, q_{2n}$ (car $q_n = 0$ quand n est impair). Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$2n\, q_{2n} = \frac{2n}{2n-1} \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge, la série positive $\sum 2n\, q_{2n}$ diverge et donc :

$$\boxed{T \text{ n'admet pas d'espérance.}}$$