DS n° 6

Mines-Ponts - 2019 - PSI - Math 1

Rapport de jury

1.1. Remarques générales

Plusieurs erreurs relevées l'an dernier ont été commises de nouveau cette année. Les encres pâles sont encore fréquentes, et un nombre croissant de candidats a obligé les correcteurs à utiliser la loupe tant leur écriture est minuscule. Le texte et les calculs sont souvent agrémentés de petites zones de texte coloré insérées avec des flèches par des candidats ne prenant pas la peine de rédiger une phrase pour justifier une assertion ou une expression. Une présentation soignée (écriture nette, absence de ratures, résultats encadrés) dispose très favorablement le correcteur.

Il est indispensable de travailler en profondeur le cours de mathématiques de première et de deuxième année, de connaître les théorèmes avec leurs hypothèses.

La rédaction des preuves doit être courte et complète ; tous les arguments sont attendus.

Les tentatives de bluff, moins nombreuses cette année, sont lourdement sanctionnées.

Les abréviations sont pléthore, au point de rendre la lecture parfois difficile en raison de l'ambiguïté qui peut en résulter : comment savoir que *ISMQ* signifie *« il suffit de montrer que »* ?

L'orthographe et la syntaxe sont souvent défectueuses : des démonstrations par l'absurde se terminent par *« donc impossible »*.

On recommande de bien traiter une partie des questions plutôt que de produire un discours inconsistant pour chacune d'entre elles.

Il est demandé aux candidats de numéroter leurs copies de façon cohérente : les examinateurs apprécient assez peu de se voir confrontés à un jeu de piste !

Enfin, les correcteurs ont été entonnés par le manque de soin ; beaucoup de copies ressemblent plus à un brouillon qu'à une épreuve de concours.

1.6. Mathématiques I — PSI

Le joli problème de mathématiques de cette année permet d'obtenir, par une méthode probabiliste, un équivalent en l'infini d'une famille de fonctions. La première partie porte sur l'étude de séries entières : rayon de convergence et développements classiques. La deuxième partie donne, à l'aide des probabilités, un équivalent en l'infini d'une fonction définie comme somme d'une série entière. La partie III permet de déduire de II d'autres comportements asymptotiques. Dans la partie IV, on déduit de III le comportement en l'infini d'une solution d'équation différentielle.

Le problème contient un certain nombre de questions élémentaires et proches du cours, qui ont été abordées par une majorité de candidats, pour lesquelles le barème était volontairement généreux. Le reste est de difficulté raisonnable, mais demande un peu plus d'initiative. Cette épreuve a parfaitement répondu aux attentes du concours. La diversité des thèmes abordés ainsi que le panachage dans la difficulté des questions ont su départager les candidats.

Question 1

Enoncé

1. Soit $r \in \mathbf{R}_+^*$ et $p \in \mathbf{N}^*$. Justifier que la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{(pn)^r}{(pn)!} z^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$, et faire de même pour la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{(pn)^r}{(pn)!} z^{np}$.

Rapport de jury

Question 1. Cette question est presque toujours abordée. Le critère de d'Alembert est généralement utilisé, mais les simplifications dans les calculs sont parfois folkloriques. Un argument du type « par croissance comparée, on a aussitôt... » ne donne pas de point.

Corrigés

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left| \frac{\frac{(p(n+1))^r}{(p(n+1))!} z^{n+1}}{\frac{(pn)^r}{(pn)!} z^n} \right| = \left(1+\frac{1}{n}\right)^r \frac{1}{(pn+p)(pn+p-1)...(pn+1)} |z| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 .$$

Donc, d'après la règle de d'Alembert, $\sum \frac{(pn)^r}{(pn)!} z^n$ converge, donc :

$$\boxed{\text{La série entière } \sum \frac{(pn)^r}{(pn)!} z^n \text{ a un rayon de convergence infini.}}$$

Comme $\sum \frac{(pn)^r}{(pn)!} z^n$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum \frac{(pn)^r}{(pn)!} (z^p)^n$ converge aussi pour tout $z \in \mathbb{C}$, et donc :

$$\boxed{\text{La série entière } \sum \frac{(pn)^r}{(pn)!} z^{pn} \text{ a un rayon de convergence infini.}}$$

1.

- Soit $z \in \mathbb{C}^*$, on applique la règle de d'Alembert à la série $\sum \dfrac{(pn)^r}{(pn)!}|z|^n$:

$$\forall n \geq 1, \frac{\dfrac{(p(n+1))^r}{(p(n+1))!}|z|^{n+1}}{\dfrac{(pn)^r}{(pn)!}|z|^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} |z| \frac{(pn)!}{(p(n+1))!} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

Ceci assure que la série $\sum \dfrac{(pn)^r}{(pn)!}|z|^n$ converge pour tout complexe z et donc que le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{(pn)^r}{(pn)!}z^n$ est $+\infty$.

- On en déduit que la série $\sum \dfrac{(pn)^r}{(pn)!}(z^p)^n$ converge pour tout complexe z et donc que la série entière $\sum \dfrac{(pn)^r}{(pn)!}z^{np}$ admet également $+\infty$ pour rayon de convergence.

---

1. Notons $a_n = \dfrac{(pn)}{(pn)!}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a :

$$\frac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = \frac{(p(n+1))^r}{[p(n+1)]!}\frac{(pn)!}{(pn)^r}|z| = \left(1+\frac{1}{n}\right)^r \frac{|z|}{(pn+1)(pn+2)\cdots(pn+p)}$$

donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}(z)|}{|u_n(z)|} = 0 < 1$ et, d'après la règle de d'Alembert, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente. Le rayon de la série entière $\sum a_n z^n$ est donc $+\infty$. La deuxième série entière (lacunaire et dont le coefficient n'est pas le précédent) converge donc aussi pour tout $z \in \mathbb{C}$ et son rayon de convergence est donc $+\infty$.

---

1. • Pour tout $z \neq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \dfrac{(pn)^r}{(pn)!}z^n \neq 0$.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| &= \frac{(p(n+1))^r(pn)!}{(pn)^r(p(n+1))!}\frac{|z|^{n+1}}{|z|^n} = \frac{(pn)^r(1+1/n)^r}{(pn)^r}\frac{1}{(pn+1)\dots(pn+p)}|z| \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} 1 \times \frac{1}{(pn)^p}|z| \quad (\text{car } p \in \mathbb{N}^* \text{ et } r > 0 \text{ sont fixés}) \\ &\underset{n\to+\infty}{\to} 0 \quad (\text{par } p \geq 1),\end{aligned}$$

donc, comme $0 < 1$, d'après le critère de d'Alembert pour les séries numériques, $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge absolument.

Ceci étant valable pour tout $z \neq 0$, le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 1} \dfrac{(pn)^r}{(pn)!}z^n$ est $+\infty$.

• Pour tout $z \neq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $v_n = \dfrac{(pn)^r}{(pn)!}z^{np} \neq 0$.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en reprenant les calculs faits dans le premier point, on a

$$\left|\frac{v_{n+1}}{v_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} 1 \times \frac{1}{(pn)^p}|z|^p = \left(\frac{|z|}{np}\right)^p \underset{n\to+\infty}{\to} 0,$$

donc, d'après le critère de d'Alembert pour les séries numériques, $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge absolument. Ceci étant valable pour tout $z \neq 0$, le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 1} \dfrac{(pn)^r}{(pn)!}z^{np}$ est $+\infty$.

Question 2

Enoncé

2. Pour x réel, expliciter $S_{0,1}(x)$ et $S_{0,2}(x)$, et en déduire la validité des énoncés $H_{0,1}$ et $H_{0,2}$.

Rapport de jury

Question 2. Les développements usuels en série entière sont le plus généralement connus. L'absence du premier terme n'est pas toujours prise en compte.

Corrigés

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a d'une part :

$$S_{0,1}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} - 1.$$

Soit :

$$\boxed{S_{0,1}(x) = e^x - 1}$$

Et d'autre part :

$$S_{0,2}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} - 1$$

Soit :

$$\boxed{S_{0,2}(x) = \operatorname{ch} x - 1}$$

On a donc $S_{0,1}(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} e^x = \frac{1}{1} x^0 e^x$ et $S_{0,2}(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \operatorname{ch} x \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2} e^x = \frac{1}{2} x^0 e^x$, donc :

$$\boxed{\text{Les énoncés } (H_{0,1}) \text{ et } (H_{0,2}) \text{ sont validés.}}$$

2.

Pour tout réel x :

— $S_{0,1}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x - 1 \underset{n \to +\infty}{\sim} \mathrm{e}^x$ ce qui assure la validité de $H_{0,1}$;

— $S_{0,2}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \operatorname{ch}(x) - 1 \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^x}{2}$ ce qui assure la validité de $H_{0,2}$.

---

2. Les énoncés $\mathcal{H}_{0,1}$ et $\mathcal{H}_{0,2}$ sont vrais car :

$$S_{0,1}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x - 1 \underset{+\infty}{\sim} e^x = \frac{1}{1} x^0 e^x \quad \text{et} \quad S_{0,2}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = ch(x) - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2} e^x = \frac{1}{2} x^0 e^x$$

2. • Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$S_{0,1}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} - 1 = \exp(x) - 1$$

$$\text{et} \quad S_{0,2}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} - 1 = \operatorname{ch}(x) - 1.$$

• Par suite, $S_{0,1}(x) = e^x - 1 \underset{x \to +\infty}{\sim} e^x = \frac{1}{1} x^0 e^x$, donc on a bien $H_{0,1}$,

et $S_{0,2}(x) = \operatorname{ch}(x) - 1 = \frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2} - 1 \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2} x^0 e^x$, donc on a bien $H_{0,2}$.

Question 3

Enoncé

3. Soit $x \in \mathbf{R}_+^*$. Montrer que $(Z_x)^r$ admet une espérance, et exprimer $\mathbf{E}\big((Z_x)^r\big)$ à l'aide de $S_{r,1}(x)$.

Rapport de jury

Question 3. L'existence de l'espérance vient de l'absolue convergence de la série. Chez bon nombre de candidats, le théorème de transfert donne systématiquement l'existence de l'espérance de *f(X)* lorsque *X* admet une espérance, ce qui est bien sûr inexact. La valeur de l'espérance est donnée par une moitié des candidats.

Corrigés

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $(Z_x)^r = f(X_x)$ avec $f : t \mapsto \left(\dfrac{t}{x}\right)^r$.

La variable X_x suit une loi de Poisson de paramètre x, donc $X_x(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f(n)P(X_x = n) = \left(\frac{n}{x}\right)^r e^{-x}\frac{x^n}{n!} = \frac{e^{-x}}{x^r}\frac{n^r x^n}{n!}.$$

Si $n \geq 1$, on a $f(n)P(X_x = n) \neq 0$ et :

$$\left|\frac{f(n+1)P(X_x = n+1)}{f(n)P(X_x = n)}\right| = \frac{\dfrac{(n+1)^r x^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{n^r x^n}{n!}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^r \frac{x}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 < 1.$$

D'après la règle de d'Alembert, la série $\sum f(n)P(X_x = n)$ converge absolument et donc, d'après le théorème du transfert, $f(X_x)$ est d'espérance finie et :

$$E\big((Z_x)^r\big) = E\big(f(X_x)\big) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n)P(X_x = n) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{-x}}{x^r}\frac{n^r x^n}{n!}.$$

Comme $S_{r,1}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{n^r}{n!}x^n$, on peut conclure que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\boxed{(Z_x)^r \text{ est d'espérance finie avec } E\big((Z_x)^r\big) = \frac{e^{-x}}{x^r}S_{r,1}(x).}$$

3.

Par utilisation du théorème de transfert et de la convergence absolue de la série $\sum \dfrac{n^r x^n}{n!}$ on en déduit que Z_x^r est d'espérance finie et que :

$$\mathbb{E}\left(Z_x^r\right) = \frac{1}{x^r}\sum_{n=0}^{+\infty} n^r \mathbb{P}\left(X_x = n\right) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^r}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^r x^n}{n!} = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^r}S_{r,1}(x).$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Sous réserve d'existence, l'espérance de $(Z_x)^r$ est, avec le théorème de transfert :

$$\mathbf{E}\left((Z_x)^r\right) = \mathbf{E}\left(\left(\frac{X_x}{x}\right)^r\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{n}{x}\right)^r \mathbb{P}\left(X_x = n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n}{x}\right)^r e^{-x}\frac{x^n}{n!} = \frac{e^{-x}}{x^r}\sum_{n=1}^{+\infty} n^r \frac{x^n}{n!} = \frac{e^{-x}}{x^r} S_{r,1}(x)$$

On a vu au passage une série absolument convergente (d'après la question 1) donc cette espérance existe bien.

3. On a $(Z_x)^r = \left(\dfrac{X_x}{x}\right)^r = \dfrac{X_x^r}{x^r}$.

Sous réserve de convergence,

$$\sum_{n \in X_x(\Omega)} \frac{n^r}{x^r} P(X_x = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^r}{x^r}\frac{e^{-x}x^n}{n!} = \frac{e^{-x}}{x^r}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^r}{n!}x^n$$

Or, d'après la question 1 avec $p = 1$, $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{n^r}{n!} z^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$, donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^r}{n!}x^n$ converge absolument, donc $\displaystyle\sum_{n \in X_x(\Omega)} \frac{n^r}{x^r} P(X_x = n)$ converge absolument, donc, d'après le théorème de transfert, $(Z_x)^r$ admet une espérance et

$$E((Z_x)^r) = \sum_{n \in X_x(\Omega)} \frac{n^r}{x^r} P(X_x = n) = \frac{e^{-x}}{x^r}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^r}{n!}x^n = \frac{e^{-x}}{x^r} S_{r,1}(x).$$

Question 4

Enoncé

4. Pour $x > 0$, rappeler l'espérance et la variance de X_x. Déduire alors de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev que

$$\mathbf{P}(|Z_x - 1| \geq x^{-1/3}) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Rapport de jury

Question 4. L'espérance et la variance sont presque systématiquement données ; le théorème de Bienaymé-Tchebychev n'est pas toujours bien énoncé. L'application quant à elle n'est traitée que par un tiers des candidats.

Corrigés

Soit à nouveau $x \in \mathbb{R}_+^*$. Comme X_x suit une loi de Poisson de paramètre x, on a :

$$\boxed{E(X_x) = V(X_x) = x}$$

Comme $E(X_x) = V(X_x) = x$, la variable $Z_x = \dfrac{X_x}{x}$ admet une espérance $E(Z_x) = \dfrac{E(X_x)}{x} = 1$ et une variance $V(Z_x) = \dfrac{V(X_x)}{x^2} = \dfrac{1}{x}$. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$:

$$P\left(|Z_x - E(Z_x)| \geq a\right) \leq \frac{V(Z_x)}{a^2} \quad \Leftrightarrow \quad P\left(|Z_x - 1| \geq a\right) \leq \frac{1}{a^2 x}.$$

En prenant alors $a = \dfrac{1}{x^{1/3}} = x^{-1/3} > 0$, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$P\left(|Z_x - 1| \geq x^{-1/3}\right) \leq \frac{1}{(x^{-1/3})^2 x} = \frac{1}{x^{1/3}}.$$

Et comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^{1/3}} = 0$, le théorème des gendarmes permet de conclure que :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} P\left(|Z_x - 1| \geq x^{-1/3}\right) = 0}$$

4.

- $\mathbb{E}(X_x) = \mathbb{V}(X_x) = x$.

- On remarque que $\left[|Z_x - 1| \geq x^{-1/3}\right] = \left[|X_x - x| \geq x^{2/3}\right]$ et en appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev (légitime car X_x admet un moment d'ordre 2) on a :

$0 \leq \mathbb{P}\left(|Z_x - 1| \geq x^{-1/3}\right) \leq \dfrac{\mathbb{V}(X_x)}{x^{4/3}} = \dfrac{1}{x^{1/3}} \underset{x \to +\infty}{\to} 0$ d'où le résultat demandé.

4. • **L'espérance et la variance de la loi de Poisson de paramètre "λ" $= x > 0$ sont : $\mathbf{E}(X_x) = \mathbf{V}(X_x) = x$.**

Par linéarité de l'espérance il vient $\mathbf{E}(Z_x) = \frac{1}{x}\mathbf{E}(X_x) = 1$ et suivant la formule "$\mathbf{V}(aX+b) = a^2\mathbf{V}(X)$" il vient $\mathbf{V}(Z_x) = \frac{1}{x^2}\mathbf{V}(X_x) = \frac{1}{x}$.

• **Comme Z_x est une $v.a.r.$ admettant une variance, l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev donne, pour $\varepsilon = x^{-\frac{1}{3}}$: $\mathbb{P}\left(|Z_x - E(Z_x)| \geqslant x^{-\frac{1}{3}}\right) \leqslant \dfrac{V(Z_x)}{x^{-\frac{2}{3}}}$ et donc $\mathbb{P}\left(|Z_x - 1| \geqslant x^{-\frac{1}{3}}\right) \leqslant \dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.**

4. • Comme $X_x \hookrightarrow \mathcal{P}(x)$, on a $E(X_x) = V(X_x) = x$.

• Par suite, $Z_x = \dfrac{1}{x}X_x$ admet une espérance et une variance et

$$E(Z_x) = \frac{1}{x}E(X_x) = 1 \quad \text{et} \quad V(Z_x) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 V(X_x) = \frac{1}{x}.$$

Comme Z_x admet une variance, on peut lui appliquer l'énégalité de Bienaymé-Tchebychev et on a donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P(|Z_x - E(Z_x)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(Z_x)}{\varepsilon^2}, \quad \text{ie} \quad P(|Z_x - 1| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{x\varepsilon^2}.$$

En prenant $\varepsilon = x^{-1/3} > 0$, on a donc :

$$0 \leq P(|Z_x - 1| \geq x^{-1/3}) \leq \frac{1}{x(x^{-1/3})^2} = \frac{1}{x^{1/3}}.$$

Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{1/3}} = 0$, donc, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x\to+\infty} P(|Z_x - 1| \geq x^{-1/3}) = 0.$$

Question 5

Enoncé

5. Montrer que pour tout réel $x > 1$,

$$\left(1 - x^{-1/3}\right)^r \mathbf{P}\left(Z_x \geq 1 - x^{-1/3}\right) \leq \mathbf{E}\left((Z_x)^r\right).$$

Montrer en outre que

$$\left(1 - x^{-1/3}\right)^r \mathbf{P}\left(Z_x \geq 1 - x^{-1/3}\right) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Rapport de jury

Question 5. L'inégalité de Markov est souvent proposée. La convergence dans la deuxième partie de la question, qui utilise notamment Q4, est rarement traitée.

Corrigés

On a vu dans la question **3** que la variable $(Z_x)^r$ admet une espérance. Or, X_x est positive (car $X_x(\Omega)=\mathbb{N}$) et $x\in\mathbb{R}_+^*$, donc $(Z_x)^r$ est positive. On peut alors appliquer l'inégalité de Markov, soit pour tout $a\in\mathbb{R}_+^*$:

$$P\left((Z_x)^r \geq a\right) \leq \frac{E\left((Z_x)^r\right)}{a} \iff aP\left((Z_x)^r \geq a\right) \leq E\left((Z_x)^r\right).$$

Si $x>1$, on a $1-x^{-1/3}>0$ et en prenant $a=(1-x^{-1/3})^r>0$ dans l'inégalité ci-dessus, on obtient :

$$(1-x^{-1/3})^r P\left((Z_x)^r \geq (1-x^{-1/3})^r\right) \leq E\left((Z_x)^r\right).$$

Enfin comme $t\mapsto t^r$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ (car $r>0$), on a $\left((Z_x)^r \geq (1-x^{-1/3})^r\right)=\left(Z_x\geq 1-x^{-1/3}\right)$ et ainsi, pour tout réel $x>1$:

$$\boxed{(1-x^{-1/3})^r P\left(Z_x \geq 1-x^{-1/3}\right) \leq E\left((Z_x)^r\right)}$$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x^{-1/3})^r = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x^{1/3}}\right)^r=1$, on veut donc montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} P\left(Z_x\geq 1-x^{-1/3}\right)=1$.

Or, d'après la question précédente, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} P\left(|Z_x-1|\geq x^{-1/3}\right)=0$. Or :

$$\left(|Z_x-1|\geq x^{-1/3}\right)=\left(Z_x-1\geq x^{-1/3}\right)\cup\left(Z_x-1\leq -x^{-1/3}\right)=\left(Z_x\geq 1+x^{-1/3}\right)\cup\left(Z_x\leq 1-x^{-1/3}\right).$$

Et :

$$\left(Z_x\leq 1-x^{-1/3}\right)=\left(Z_x<1-x^{-1/3}\right)\cup\left(Z_x=1-x^{-1/3}\right).$$

Donc :

$$\left(Z_x<1-x^{-1/3}\right)\subset\left(Z_x\leq 1-x^{-1/3}\right)\subset\left(|Z_x-1|\geq x^{-1/3}\right).$$

Et ainsi :

$$0\leq P\left(Z_x<1-x^{-1/3}\right)\leq P\left(|Z_x-1|\geq x^{-1/3}\right).$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes, on a alors $\lim\limits_{x\to+\infty} P\left(Z_x<1-x^{-1/3}\right)=0$, soit :

$$\lim_{x\to+\infty} P\left(Z_x\geq 1-x^{-1/3}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[1-P\left(Z_x<1-x^{-1/3}\right)\right]=1.$$

Finalement, $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x^{-1/3})^r = \lim\limits_{x\to+\infty} P\left(Z_x\geq 1-x^{-1/3}\right)=1$, donc :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}(1-x^{-1/3})^r P\left(Z_x\geq 1-x^{-1/3}\right)=1}$$

5.

• La première inégalité découle directement de l'inégalité de Markov appliquée à Z_x^r (qui est positive et d'espérance finie) ainsi que de la croissance de la fonction $t \mapsto t^r$ sur $\mathbb{R}_p$:

$\mathbb{P}\left(Z_x \geq 1 - x^{-1/3}\right) = \mathbb{P}\left(Z_x^r \geq (1 - x^{-1/3})^r\right) \leq \dfrac{\mathbb{E}\left(Z_x^r\right)}{(1 - x^{-1/3})^r}$.

• On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \left((1 - x^{-1/3})^r\right) = 1$ et de plus :

$\left[|Z_x - 1| \leq x^{1/3}\right] \subset \left[\mathbb{Z}_x - 1 \geq -x^{1/3}\right]$ donc $\mathbb{P}\left(|Z_x - 1| \leq x^{1/3}\right) \leq \mathbb{P}\left(\mathbb{Z}_x - 1 \geq -x^{1/3}\right)$.

Or la question 4 assure par passage au complémentaire que $\mathbb{P}\left(|Z_x - 1| \leq x^{1/3}\right) \underset{x\to+\infty}{\to} 1$ et on en déduit donc que $\mathbb{P}\left(\mathbb{Z}_x - 1 \geq -x^{1/3}\right) \underset{x\to+\infty}{\to} 1$.

En conclusion, on a bien $(1 - x^{-1/3})^r \mathbb{P}\left(\mathbb{Z}_x \geq 1 - x^{1/3}\right) \underset{x\to+\infty}{\to} 1$

---

5. • Pour $x > 1$ le réel $a = \left(1 - x^{-\frac{1}{3}}\right)^r$ est strictement positif et la $v.a.r.$ $(Z_x)^r$ admet une espérance d'après 3°). L'inégalité de Markov donne alors : $\mathbb{P}\left((Z_x)^r \geqslant a\right) \leqslant \frac{\mathbf{E}((Z_x)^r)}{a}$. Or $t \mapsto t^r$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ (car $r > 0$) donc : $\left((Z_x)^r \geqslant a\right) = \left(Z_x \geqslant 1 - x^{-\frac{1}{3}}\right)$ et il vient bien, en multipliant par le réel positif a :

$$\left(1 - x^{-\frac{1}{3}}\right)^r \mathbb{P}\left(Z_x \geqslant 1 - x^{-\frac{1}{3}}\right) \geqslant \mathbf{E}\left((Z_x)^r\right)$$

• On a déjà $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 - x^{-\frac{1}{3}}\right)^r = 1$ et on a par ailleurs $\left(Z_x < 1 - x^{-\frac{1}{3}}\right) \subset \left(|Z_x - 1| \geqslant x^{-\frac{1}{3}}\right)$ donc, avec la croissance de $\mathbb{P}$ et la question 4 :

$$0 \leqslant \mathbb{P}\left(Z_x < 1 - x^{-\frac{1}{3}}\right) \leqslant \mathbb{P}\left(|Z_x - 1| \geqslant x^{-\frac{1}{3}}\right) \longrightarrow 0$$

En passant au complémentaire : $\mathbb{P}\left(Z_x \geqslant 1 - x^{-\frac{1}{3}}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(Z_x < 1 - x^{-\frac{1}{3}}\right) \longrightarrow 1$ et le produit tend encore vers 1 :

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 - x^{-\frac{1}{3}}\right)^r \mathbb{P}\left(Z_x \geqslant 1 - x^{-\frac{1}{3}}\right) = 1$$

---

5. Soit $x > 1$.

• Comme $(Z_x)^r$ admet une espérance (question 3), on a, d'après l'inégalité de Markov :

$$\forall a > 0, \quad P((Z_x)^r \geq a) \leq \frac{E((Z_x)^r)}{a}.$$

Or, comme $x > 1$, $x^{-1/3} \in]0, 1[$, donc $(1 - x^{-1/3})^r > 0$, et on a donc, en prenant $a = (1 - x^{-1/3})^r$, on obtient

$$P((Z_x)^r \geq (1 - x^{-1/3})^r) \leq \frac{E((Z_x)^r)}{(1 - x^{-1/3})^r}, \quad \text{ie} \quad (1 - x^{-1/3})^r P((Z_x)^r \geq (1 - x^{-1/3})^r) \leq E((Z_x)^r).$$

Enfin, comme $Z_x(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$, on a $(Z_x)^r \geq (1 - x^{-1/3})^r \Leftrightarrow (Z_x) \geq (1 - x^{-1/3})$, donc on a bien

$$(1 - x^{-1/3})^r P(Z_r \geq 1 - x^{-1/3}) = (1 - x^{-1/3})^r P((Z_x)^r \geq (1 - x^{-1/3})^r) \leq E((Z_x)^r).$$

• Pour tout $x > 0$,

$$|Z_x - 1| \leq x^{-1/3} \Rightarrow Z_x - 1 \geq -x^{-1/3} \Rightarrow Z_x \geq 1 - x^{-1/3},$$

donc

$$1 \geq P(Z_x \geq 1 - x^{-1/3}) \geq P(|Z_x - 1| \leq x^{-1/3}) = 1 - P(|Z_x - 1| > x^{-1/3}) \geq 1 - P(|Z_x - 1| \geq x^{-1/3}).$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - P(|Z_x - 1| \geq x^{-1/3}) = 1$ d'après la question 4, donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} P(Z_x \geq 1 - x^{-1/3}) = 1$.

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} (1 - x^{-1/3})^r = 1$, donc on a bien

$$\lim_{x\to+\infty} (1 - x^{-1/3})^r P(Z_x \geq 1 - x^{-1/3}) = 1.$$

Question 6

Enoncé

6. Soit $N \in \mathbf{N}^*$ et $x \in \mathbf{R}_+^*$. Montrer que $Y_{x,N}$ admet une espérance et que

$$\mathbf{E}(Y_{x,N}) = x^N.$$

Rapport de jury

Question 6. Les correcteurs ont été surpris par le grand nombre de copies dans lesquelles figuraient les arguments suivants : un produit de variables aléatoires admettant une espérance, admet une espérance, la linéarité de l'espérance donne que l'espérance d'un produit est le produit des espérances. L'espérance d'une constante est nulle. Bien sûr, tous ces arguments sont incorrects.

Corrigés

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$.

On a $Y_{x,N} = Q(X_x)$ où $Q = \prod_{k=0}^{N-1}(T-k)$ est un polynôme unitaire de degré N (et d'indéterminée notée T).

On a alors $Q(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n^N$, donc :

$$Q(n)P(X_x = n) = Q(n)e^{-x}\frac{x^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\sim} n^N e^{-x}\frac{x^n}{n!}.$$

Or, on a vu plus haut que la série $\sum \frac{e^{-x}}{x^r}\frac{n^r x^n}{n!}$, et donc la série $\sum n^r e^{-x}\frac{x^n}{n!}$, convergent pour tout pour tout réel $r > 0$. En particulier pour $r = N > 0$, la série $\sum n^N e^{-x}\frac{x^n}{n!}$ converge et comme elle est à termes positifs, on peut conclure que la série $\sum Q(n)P(X_x = n)$, converge absolument, donc que :

$$\boxed{\text{La variable } Y_{x,N} \text{ admet une espérance.}}$$

Par le théorème du transfert, on a alors :

$$E(Y_{x,N}) = \sum_{n=0}^{+\infty} Q(n)P(X_x = n).$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $Q(n) = \prod_{k=0}^{N-1}(n-k)$, donc $Q(n) = 0$ quand $n < N$ et $Q(n) = \frac{n!}{(n-N)!}$. Alors :

$$E(Y_{x,N}) = \sum_{n=N}^{+\infty} Q(n)P(X_x = n) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n!}{(n-N)!}e^{-x}\frac{x^n}{n!} = x^N e^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n-N}}{(n-N)!}.$$

Et après réindexation $k = n - N$, on obtient $E(Y_{x,N}) = x^N e^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!} = x^N e^{-x}e^x$, soit :

$$\boxed{E(Y_{x,N}) = x^N}$$

6.

On pose la fonction $f : t \mapsto \prod_{k=0}^{N-1} (t-k)$ et on applique le théorème de transfert (où la série considérée est absolument convergente) :

$$\mathbb{E}(Y_{x,N}) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n)\mathbb{P}(X_x = n) = \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{n!}{(n-N)!}\mathrm{e}^{-x}\frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^{-x}x^N \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{x^{n-N}}{(n-N)!} = x^N.$$

6. A nouveau, l'espérance de $Y_{x,N}$ existe (la série qui suit est bien AC), car avec le théorème de transfert :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(Y_{x,N}) &= \mathbf{E}(X_x(X_x-1)\cdots(X_x-N+1)) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-N+1)\mathbb{P}(X_x=n) \\ &= \sum_{n=N}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-N+1)e^{-x}\frac{x^n}{n!} = x^N e^{-x}\sum_{n=N}^{+\infty}\frac{x^{n-N}}{(n-N)!} = x^N\end{aligned}$$

6. Sous réserve de convergence,

$$\begin{aligned}\sum_{n\in X_x(\Omega)} n(n-1)\dots(n-N+1)P(X_x=n) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-N+1)\frac{e^{-x}x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{n(n-1)\dots(n-N+1)}_{=0}\frac{e^{-x}x^n}{n!} + \sum_{n=N}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-N+1)\frac{e^{-x}x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=N}^{+\infty}\frac{e^{-x}x^n}{(n-N)!} = \sum_{j=0}^{+\infty}\frac{e^{-x}x^{j+N}}{j!} \quad \text{(en posant } j=n-N) \\ &= x^N e^{-x}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{x^j}{j!}.\end{aligned}$$

Or cette dernière série converge (exponentielle), donc la série de départ converge, donc converge absolument (série à termes positifs), donc, d'après le théorème de transfert, $Y_{x,N} = X_x(X_x-1)\dots(X_x-N+1)$ admet une espérance et

$$E(Y_{x,N}) = \sum_{n\in X_x(\Omega)} n(n-1)\dots(n-N+1)P(X_x=n) = x^N e^{-x}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{x^j}{j!} = x^N e^{-x}e^x = x^N.$$

Question 7

Enoncé

7. Soit $N \in \mathbf{N}^*$. Montrer qu'il existe des réels $a_1, \ldots, a_N$ tels que

$$a_N = 1 \quad \text{et} \quad \forall x > 0,\ (X_x)^N = \sum_{k=1}^{N} a_k Y_{x,k}.$$

On pourra introduire la famille $(H_j)_{j\in\mathbf{N}}$ de polynômes à coefficients réels définie par

$$H_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall j \in \mathbf{N}^*,\ H_j = \prod_{i=0}^{j-1}(T-i),$$

où l'indéterminée est notée T.

En déduire que

$$\mathbf{E}\left((Z_x)^N\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Rapport de jury

Question 7. Question très inégalement traitée ; seul le dernier point est généralement correct.

Corrigés

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

Si on pose $H_0 = 1$ et pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $H_j = \prod_{i=0}^{j-1}(T-i)$ (polynôme d'indéterminée notée T).

On a $\deg H_j = j$ pour tout $j \in \mathbb{N}$, donc $(H_0, H_1, \ldots, H_N)$ est une famille échelonnée en degrés de $N+1$ polynômes de $\mathbb{R}_N[T]$, qui est de dimension $N+1$: c'est donc une base de $\mathbb{R}_N[T]$ et ainsi, il existe des réels $a_0, a_1, \ldots, a_N$ tels que :

$$T^N = a_0 H_0 + a_1 H_1 + \ldots + a_N H_N .$$

De plus, $0 = 0^N = a_0 H_0(0) + a_1 H_1(0) + \ldots + a_N H_N(0) = a_0$, donc :

$$T^N = a_1 H_1 + \ldots + a_N H_N .$$

Enfin, $\deg H_j < N$ pour tout entier $j \in [\![1, N-1]\!]$ (s'il y a lieu, c'est-à-dire si $N \geq 2$), et on peut écrire $H_N = T^N + R(T)$ avec $\deg R < N$. Donc, $T^N = a_N T^N + (a_1 H_1 + \ldots + a_N R)$ avec $\deg(a_1 H_1 + \ldots + a_N R) < N$ et ainsi, on a $a_N = 1$.

Alors, pour tout réel $x > 0$, on a :

$$(X_x)^N = \sum_{k=1}^{N} a_k H_k(X_x) = \sum_{k=1}^{N} a_k \prod_{i=0}^{k-1}(X_x - i) = \sum_{k=1}^{N} a_k Y_{x,k} .$$

Finalement, il existe bien des réels $a_1, \ldots, a_N$ tels que $a_N = 1$ et pour tout réel $x > 0$:

$$\boxed{(X_x)^N = \sum_{k=1}^{N} a_k Y_{x,k}}$$

On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$(Z_x)^N = \left(\frac{X_x}{x}\right)^N = \frac{(X_x)^N}{x^N} = \frac{1}{x^N}\sum_{k=1}^{N} a_k Y_{x,k} .$$

Et, par linéarité de l'espérance :

$$E\left((Z_x)^N\right) = E\left(\frac{1}{x^N}\sum_{k=1}^{N} a_k Y_{x,k}\right) = \frac{1}{x^N}\sum_{k=1}^{N} a_k E(Y_{x,k}) .$$

Avec la question précédente, on obtient $E\left((Z_x)^N\right) = a_N \dfrac{x^N}{x^N}$ si $N=1$ et si $N \geq 2$:

$$E\left((Z_x)^N\right) = \frac{1}{x^N}\sum_{k=1}^{N} a_k x^k = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{a_k}{x^{N-k}} + a_N \frac{x^N}{x^N} .$$

En $i = N-k$ et avec $a_N = 1$, on obtient $E\left((Z_x)^N\right) = 1$ si $N=1$ et si $N \geq 2$:

$$E\left((Z_x)^N\right) = \sum_{k=i}^{N-1} \frac{a_{N-i}}{x^i} + 1 .$$

Enfin, comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a_{N-i}}{x^i} = 0$ pour tout $i \in [\![1, N-1]\!]$ (si $N \geq 2$), donc dans tous les cas :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} E\left((Z_x)^N\right) = 1}$$

7.

• La famille $(H_0, \ldots, H_N)$ est une famille de polynômes de degrés échelonnés (de 0 à N) et est donc une base de $\mathbb{R}_N[T]$, ce qui assure que T^N se décompose dans cette base et donc qu'il existe des réels $a_0, \ldots, a_N$ tels que $T^N = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_k H_k(T)$.

En évaluant en 0 on obtient $a_0 = 0$ et en considérant le coefficient de degré N on obtient $a_N = 1$.

On a alors pour tout $x > 0$, $X_x^N = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} a_k H_k(X_x) = \sum_{k=1}^{N} a_k Y_{x,k}$.

• Par linéarité de l'espérance on a $\mathbb{E}\left(Z_x^N\right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} a_k \frac{\mathbb{E}\left(Y_{x,k}\right)}{x^N}$.

Pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, $\dfrac{\mathbb{E}\left(Y_{x,k}\right)}{x^N} \underset{x \to +\infty}{\sim} x^{k-N} \underset{x \to +\infty}{\to} \begin{cases} 0 \text{ si } k \leq N-1 \\ 1 \text{ si } k = N \end{cases}$.

Donc $\mathbb{E}\left(Z_x^N\right) \underset{x \to +\infty}{\to} a_N = 1$.

7. Pour $N \in \mathbb{N}^*$ fixé, la famille $(H_j)_{0 \leqslant j \leqslant N}$ est échelonnée en degré ($\deg H_j = j$) et de cardinal $N+1$ dans $\mathbb{R}_N[T]$ qui est de dimension $N+1$. C'est donc une base de cet espace vectoriel et le polynôme T^N (l'indéterminée est T ici) se décompose en $T^N = \sum_{k=0}^{N} a_k H_k$ pour un unique $(a_0, \cdots, a_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$. Comme $N \geqslant 1$ on a par évaluation en 0 : $0 = a_0$ et aussi $a_N = 1$ (coefficient dominant) donc

$$T^N = \sum_{k=1}^{N} a_k H_k \quad \text{et} \quad a_N = 1$$

Alors il vient pour tout $x > 0$: $(X_x)^N = \sum_{k=1}^{N} a_k H_k(X_x) = \sum_{k=1}^{N} a_k Y_{x,k}$. Ensuite, la linéarité de l'espérance et la question **6** (puisque tous les indices k sont $\geqslant 1$) donnent :

$$\mathbf{E}\left((Z_x)^N\right) = \frac{1}{x^N}\mathbf{E}\left((X_x)^N\right) = \frac{1}{x^N}\sum_{k=1}^{N} a_k \mathbf{E}(Y_{x,k}) \overset{6°)}{=} \frac{1}{x^N}\sum_{k=1}^{N} a_k x^k$$

En conséquence : $\mathbf{E}\left((Z_x)^N\right) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{x^N} \times a_N x^N = a_N = 1$.

7. • Soit $(H_j)_{j \in \mathbb{N}}$ la famille de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par

$$H_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall j \in \mathbb{N}^*, \quad H_j(X) = \prod_{i=0}^{j-1}(X - i).$$

La famille $(H_0, \ldots, H_N)$ est libre (degrés échelonnés) et formée de $N+1$ éléments de $\mathbb{R}_N[X]$, espace de dimension $N+1$, donc c'est une base de $\mathbb{R}_N[X]$.

Par suite, comme $X^N \in \mathbb{R}_N[X]$, il existe $(a_0, \ldots, a_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$ tels que $X^N = \sum_{k=0}^{N} a_k H_k$.

De plus, comme $H_i(0) = 0$ pour tout $i \in [\![1, N]\!]$, on a, en appliquant en 0, $0 = a_0 H_0(0) + \sum_{k=1}^{N} a_k H_k(0) = a_0$, et, en identifiant les coefficients de degré N, on a $a_N = 1$.

On a donc $X^N = \sum_{k=1}^{N} a_k H_k(X)$ avec $a_N = 1$.

Par suite, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $t^N = \sum_{k=1}^{N} a_k H_k(t)$, donc, pour tout $\omega \in \Omega$, comme $X_x(\omega) \in \mathbb{R}$, on a

$$(X_x(\omega))^n = \sum_{k=1}^{N} a_k H_k(X_x(\omega)) = \sum_{k=1}^{N} a_k Y_{x,k}(\omega) = \left(\sum_{k=1}^{N} a_k Y_{x,k}\right)(\omega),$$

donc $(X_x)^N = \sum_{k=1}^{N} a_k Y_{x,k}$ avec $a_N = 1$.

• Par suite, $(Z_x)^N = \dfrac{(X_x)^N}{x^N} = \sum_{k=1}^{N} \dfrac{a_k}{x^N} Y_{x,k}$ admet une espérance comme combinaison linéaire de variables admettant une espérance et, par linéarité de l'espérance,

$$\begin{aligned} E((Z_x)^N) &= \sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{x^N} E(Y_{x,k}) = \sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{x^N} x^k \quad \text{(d'après la question 6)} \\ &= \frac{1}{x^N}\sum_{k=1}^{N} a_k x^k \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{x^N} a_N x^N \quad (\text{car } a_N \neq 0) \\ &\underset{x \to +\infty}{\to} a_N = 1. \end{aligned}$$

Question 8

Enoncé

8. On pose $N := \lfloor r \rfloor$ et $s := r - N$. Montrer l'inégalité

$$\forall t \in \mathbf{R}_+, \quad t^s \leq s(t-1) + 1,$$

et en déduire

$$\forall x > 0, \ (Z_x)^r \leq (1-s)\,(Z_x)^N + s\,(Z_x)^{N+1}.$$

Rapport de jury

Question 8. L'inégalité est rarement prouvée. En revanche l'application à la variable aléatoire est souvent juste.

Corrigés

On pose $N = \lfloor r \rfloor \in \mathbb{N}$ (car $r > 0$) et $s = r - N = r - \lfloor r \rfloor \in [0,1[$.

- Si $s = 0$ (c'est-à-dire si r est entier), on a $t^s = 1$ et $s(t-1) = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, donc l'inégalité $t^s \leq s(t-1)+1$ est vérifiée (c'est même une égalité).
- Si $s \in]0,1[$, posons pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $h(t) = t^s - s(t-1) - 1$.

  La fonction h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que différence de telles fonctions et pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$:

  $$h'(t) = s(t^{s-1} - 1).$$

  Comme $s \in]0,1[$, on a alors :

  $$h'(t) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad t^{s-1} \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad t \leq 1.$$

  Donc, h est croissante sur $]0,1]$ et décroissante sur $[1,+\infty[$: elle admet un maximum en 1, qui est $h(1) = 0$. Ainsi, $h(t) \leq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ et, avec $\lim_{t \to 0} h(t) = s - 1 < 0$, on obtient l'inégalité voulue pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Finalement, quel que soit $s \in [0,1[$, on a bien pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\boxed{t^s \leq s(t-1)+1}$$

Comme Z_x est positive (vu question **5**), on a $(Z_x)^s \leq s(Z_x - 1) + 1$, soit :

$$(Z_x)^{r-N} \leq 1 - s + sZ_x.$$

Et en multipliant par $(Z_x)^N \geq 0$, on obtient pour tout réel $x > 0$:

$$\boxed{(Z_x)^r \leq (1-s)(Z_x)^N + s(Z_x)^{N+1}}$$

8.

• On étudie les variations de la fonction $g : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto t^s - s(t-1) - 1$.

On a pour $t > 0$, $g'(t) = s(t^{s-1} - 1)$ où $s - 1 < 0$ ce qui assure que g admet un maximum en 1, or $g(1) = 0$ on en déduit que g est négative sur $\mathbb{R}_+$ ce qui assure le résultat souhaité.

• En multipliant pour tout $t \geq 0$ l'inégalité obtenue par t^N on obtient :

$t^r \leq s(t-1)t^N + t^N = (1-s)t^N + st^{N+1}$.

Cela assure que pour tout $x > 0$, puisque $Z_x \geq 0$ on a $Z_x^r \leq (1-s)Z_x^N + sZ_x^{N+1}$.

---

8. • Soit $N = \lfloor r \rfloor$, $s = r - N \in [0, 1[$. On peut étudier sur $\mathbb{R}_+$ la fonction $t \mapsto s(t-1) + 1 - t^s$ mais appliquons plutôt le TAF à la fonction $f : t \mapsto t^s$. Pour $t \in \mathbb{R}_+$ cette fonction est continue "$[1, t]$" et dérivable sur "$]1, t[$". Il existe donc $c = c_t \in$ "$]1, t[$" tel que

$$t^s - 1 = (t-1) f'(c) = sc^{s-1}(t-1)$$

Remarquons que, puisque $s - 1 < 0$, $t \mapsto t^{s-1}$ est décroissante et :

- si $t = 1$ la majoration est triviale.
- si $t > 1$ alors $1 < c < t$ donc $c^{s-1} < 1$ et comme $s(t-1) > 0$: $t^s - 1 \leqslant s \times 1 \times (t^s - 1)$
- si $0 < t < 1$ alors $t < c < 1$ donc $c^{s-1} > 1$ et comme $s(t-1) < 0$ on a encore $t^s - 1 \leqslant sc^{s-1}(t-1) < s(t-1)$.

CQFD.

• On a alors, avec $t = Z_x$: $(Z_x)^r = (Z_x)^N \times (Z_x)^s \leqslant (Z_x)^N [s(Z_x - 1) + 1] = (s-1)(Z_x)^N + s(Z_x)^{N+1}$.

---

8. On pose $N := \lfloor r \rfloor$ et $s := r - N = r - \lfloor r \rfloor$, donc $s \in [0, 1[$.

• Supposons $s \in]0, 1[$.

Posons $f : t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto t^s - (s(t-1) - 1$. f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $t > 0$,

$$f'(t) = st^{s-1} - s = s(t^{s-1} - 1).$$

Par suite, comme $s - 1 < 0$, on a le tableau de variations suivant :

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$	$\|$	$+$	0	-	
$f(t)$			0		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	s-1				$-\infty$

D'où, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $f(t) \leq 0$, donc $t^s \leq s(t-1) + 1$.

• Si $s = 0$, alors pour tout $t \geq 0$, $t^s = 1$ et $s(t-1) + 1 = 1$, donc on a aussi $t^s \leq s(t-1) + 1$.

• Dans tous les cas, on a bien : $\forall t \geq 0, \quad t^s \leq s(t-1) + 1$.

• Pour tout $x > 0$, pour tout $\omega \in \Omega$, $Z_x(\omega) \in \mathbb{R}_+$, donc

$$(Z_x(\omega))^r = (Z_x(\omega))^N (Z_x(\omega))^s \leq (Z_x(\omega))^N (s(Z_x(\omega) - 1) + 1) = (1-s)(Z_x(\omega))^N + s(Z_x(\omega))^{N+1}.$$

Ceci étant valable pour tout $\omega \in \Omega$, on a bien :

$$(Z_x)^r \leq (1-s)(Z_x)^N + s(Z_x)^{N+1}.$$

Question 9

Enoncé

9. En combinant les résultats précédents, établir la convergence

$$\mathbf{E}((Z_x)^r) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

et conclure à la validité de l'énoncé $H_{r,1}$.

Rapport de jury

Question 9. Il suffisait ici de combiner les résultats des questions précédentes.

Corrigés

Avec la croissance et la linéarité de l'espérance, la question précédente donne pour tout réel $x > 0$:

$$E\left((Z_x)^r\right) \leq E\left((1-s)(Z_x)^N + s(Z_x)^{N+1}\right) = (1-s)\,E\left((Z_x)^N\right) + s\,E\left((Z_x)^{N+1}\right).$$

Alors, avec la question **5**, on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$(1-x^{-1/3})^r\,P\left(Z_x \geq 1-x^{-1/3}\right) \leq E\left((Z_x)^r\right) \leq (1-s)\,E\left((Z_x)^N\right) + s\,E\left((Z_x)^{N+1}\right).$$

Et toujours avec la question **5**, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} (1-x^{-1/3})^r\,P\left(Z_x \geq 1-x^{-1/3}\right) = 1.$$

Avec la question **7**, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} E\left((Z_x)^N\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} E\left((Z_x)^{N+1}\right) = 1$, donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \left[(1-s)\,E\left((Z_x)^N\right) + s\,E\left((Z_x)^{N+1}\right)\right] = (1-s) + s = 1.$$

Le théorème des gendarmes permet de conclure que :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} E\left((Z_x)^r\right) = 1}$$

Enfin, d'après la question **3**, on a $E\left((Z_x)^r\right) = \dfrac{e^{-x}}{x^r} S_{r,1}(x)$, donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{x^r} S_{r,1}(x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad S_{r,1}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^x x^r.$$

Ainsi, $S_{r,1}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{1} x^r e^x$, autrement dit :

$$\boxed{\text{L'énoncé } (H_{r,1}) \text{ est validé.}}$$

9.

• Les résultats obtenus aux questions 5 et 8 donnent l'encadrement suivant :
$(1-x^{-1/3})^r\mathbb{P}\left(Z_x \geq 1-x^{-1/3}\right) \leq \mathbb{E}\left(Z_x^r\right) \leq (1-s)Z_x^N + sZ_x^{N+1}$.
Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\left((1-x^{-1/3})^r\mathbb{P}\left(\mathbb{Z}_x \geq 1-x^{1/3}\right)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left((1-s)Z_x^N + sZ_x^{N+1}\right) = 1$.
Le fameux théorème des gendarmes permet alors de conclure : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\mathbb{E}\left(Z_x^r\right)\right) = 1$

• En reprenant l'expression de $\mathbb{E}\left(Z_x^r\right)$ de la question 3 on a donc montré que
$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x^r}S_{r,1}(x)\right) = 1$ i.e. que $S_{r,1}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^r\mathrm{e}^x$ ce qui assure la validité de $H_{r,1}$.

---

9. La minoration de la question **5** et la linéarité de l'espérance donnent :

$$p(x) = \mathbb{P}\left(Z_x \geqslant 1 - x^{-\frac{1}{3}}\right)\left(1 - x^{-\frac{1}{3}}\right)^r \leqslant \mathbf{E}\left((Z_x)^r\right) \leqslant (s-1)\,\mathbf{E}\left((Z_x)^N\right) + s\mathbf{E}\left((Z_x)^{N+1}\right) = q(x)$$

On a vu à la question **5** que $\lim\limits_{x\to+\infty} p(x) = 1$ et de plus N étant fixé dans $\mathbb{N}^*$ la question **7** donne $\lim\limits_{x\to+\infty} q(x) = (s-1)\times 1 + s\times 1 = 1$. Par pincement on obtient alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathbf{E}\left((Z_x)^r\right) = 1$.

---

9. • D'où, par croissance de l'espérance, $(Z_x)^r$ admet une espérance et

$$E((Z_x)^r) \leq E((1-s)(Z_x)^N + s(Z_x)^{N+1}) = (1-s)E((Z_x)^N) + sE((Z_x)^{N+1}) \quad \text{(linéarité de l'espérance)}.$$

En combinant cette majoration avec la minoration obtenue en question 5, on a donc

$$(1-x^{-1/3})^r P(Z_r \geq 1-x^{-1/3}) \leq E((Z_x)^r) \leq (1-s)E((Z_x)^N) + sE((Z_x)^{N+1}).$$

Or, d'après la question 5, $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x^{-1/3})^r P(Z_r \geq 1-x^{-1/3}) = 1$ et, d'après la question 7, avec $N \in \mathbb{N}^*$ et $N+1 \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-s)E((Z_x)^N) + sE((Z_x)^{N+1}) = (1-s) + s = 1$, donc, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x\to+\infty} E((Z_x)^r) = 1.$$

Question 10

Enoncé

10. On fixe un réel $x > 0$. Étudier le signe de la fonction

$$\varphi_x : t \in [1, +\infty[\mapsto t^{1-r}(t-1)^r - x.$$

On montrera en particulier que φ_x s'annule en un unique élément de $[1, +\infty[$ que l'on notera t_x. En déduire que la suite finie $(u_n(x))_{0 \leq n \leq \lfloor t_x \rfloor}$ est croissante et que la suite $(u_n(x))_{n \geq \lfloor t_x \rfloor}$ est décroissante.

Rapport de jury

Question 10. Cette question est abordée dans presque toutes les copies. La dérivation d'un produit est parfois égale au produit des dérivées. La donnée d'un tableau de variation est nettement préférable à un long discours filandreux. La seconde partie de la question n'est pas toujours convaincante.

Corrigés

On fixe un réel $x > 0$.

La fonction $\varphi : t \mapsto t^{1-r}(t-1)^r$ est définie, continue sur $[1, +\infty[$ et dérivable sur $]1, +\infty[$ en tant que produit de telles fonctions et pour tout $t \in]1, +\infty[$:

$$\varphi'(t) = (1-r)t^{-r}(t-1)^r + rt^{1-r}(t-1)^{r-1} = \frac{(t-1)^{r-1}}{t^r}\big[(1-r)(t-1) + rt\big] = \frac{(t-1)^{r-1}}{t^r}(t-1+r).$$

Sur $]1, +\infty[$, $\varphi'(t) > 0$, donc sur $[1, +\infty[$, φ est continue et strictement croissante de $\varphi(1) = 0$ à $\lim\limits_{t \to +\infty} \varphi(t) = +\infty$ (car $\varphi(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} t$). Donc, d'après le théorème de la bijection continue, φ réalise une bijection de $[1, +\infty[$ vers $[0, +\infty[$ et $x > 0$ admet un unique antécédent $t_x = \varphi^{-1}(x)$ dans $[1, +\infty[$.

Comme $\varphi_x = \varphi - x$, φ_x s'annule en un unique élément de $[1, +\infty[$.

De plus, comme φ est strictement croissante sur $[1, +\infty[$, on a pour tout $t \in [1, +\infty[$:

$$\varphi_x(t) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(t) - x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(t) > x \quad \Leftrightarrow \quad t > \varphi^{-1}(x) = t_x.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{Il existe un unique } t_x \in [1, +\infty[\text{ tel que } \varphi_x(t_x) = 0 \text{ et } \varphi_x < 0 \text{ sur } [1, t_x[\text{ et } \varphi_x > 0 \text{ sur }]t_x, +\infty[.}$$

Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$u_{n+1}(x) - u_n(x) = \frac{(n+1)^r}{(n+1)!}x^{n+1} - \frac{n^r}{n!}x^n = \frac{(n+1)^{r-1}}{n!}x^{n+1} - \frac{n^r}{n!}x^n = \frac{(n+1)^{r-1}}{n!}x^n\left(x - n^r(n+1)^{1-r}\right).$$

Donc, $u_{n+1}(x) - u_n(x) = -\dfrac{(n+1)^{r-1}}{n!}x^n\varphi_x(n+1)$ et comme $\dfrac{(n+1)^{r-1}}{n!}x^n > 0$, $u_{n+1}(x) - u_n(x)$ est du signe opposé à celui de $\varphi_x(n+1)$. Ainsi :

$$u_{n+1}(x) - u_n(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi_x(n+1) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad n+1 \in [1, t_x] \quad \Leftrightarrow \quad n+1 \leq \lfloor t_x \rfloor = N_x.$$

Et ainsi, $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante jusqu'au rang N_x, donc :

$$\boxed{(u_n(x))_{0 \leq n \leq N_x} \text{ est croissante et } (u_n(x))_{n \geq N_x} \text{ est décroissante.}}$$

10.

• La fonction φ_x est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,+\infty[$ et on a pour tout $t \in [1,+\infty[$: $\varphi_x'(t) = t^{1-r}(t-1)^{r-1} > 0$.

De plus $\varphi_x(1) = -x$ et $\varphi_x(t) \underset{t\to+\infty}{\to} +\infty$ ce qui assure que φ_x réalise une bijection strictement croissante de $[1,+\infty[$ dans $[-x,+\infty[$.

Puisque $0 \in [-x,+\infty[$, on en déduit que 0 admet un unique antécédent par la fonction φ_x .

• Pour tout $n \geq 1$ on a $x\left(\dfrac{u_{n-1}(x)}{u_n(x)} - 1\right) = \varphi_x(n)$ donc :

— si $n \leq \lfloor t_x \rfloor$, on a $\left(\dfrac{u_{n-1}(x)}{u_n(x)} - 1\right) \leq 0$ i.e. $u_{n-1}(x) \leq u_n(x)$;

— si $n \geq \lfloor t_x \rfloor + 1$, on a $\left(\dfrac{u_{n-1}(x)}{u_n(x)} - 1\right) \geq 0$ i.e. $u_{n-1}(x) \geq u_n(x)$.

On en déduit que la famille $(u_n(x))_{n\leq\lfloor t_x\rfloor}$ est croissante et que la suite $(u_n(x))_{n\geq\lfloor t_x\rfloor}$ est décroissante.

---

10. • Soit $x > 0$. La fonction $\varphi_x : [1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} : t \longmapsto t^{1-r}(t-1)^r - x$ est de classe C^1 et pour tout $t \geqslant 1$:

$$\varphi_x'(t) = (1-r)t^{-r}(t-1)^r + rt^{1-t}(t-1)^{r-1} = t^{-r}(t-1)^{r-1}(t+r-1) > 0 \text{ si } t \neq 1$$

Ainsi φ_x est une bijection continue strictement croissante de $[1,+\infty[$ sur $[\varphi_x(1), \lim\limits_{t\to+\infty}\varphi_x(t)[= [-x,+\infty[$.

Comme $-x < 0$ la fonction φ_x s'annule une unique fois, en un réel $t_x > 1$ qui est donc tel que :

$$\forall t \in [1, t_x[\quad \varphi_x(t) < 0 \quad \text{et} \quad \forall t \in [t_x, +\infty[\quad \varphi_x(t) > 0$$

• On a alors pour $n \geqslant 1$:

$$u_n(x) - u_{n-1}(x) = \frac{n^r}{n!}x^n - \frac{(n-1)^r}{(n-1)!}x^{n-1} = -\frac{n^r}{n!}x^{n-1}\left[n^{1-r}(n-1)^r - x\right] - \frac{n^r}{n!}x^{n-1}\varphi_x(n)$$

et donc pour $n \leqslant \lfloor t_x \rfloor$ $u_n(x) - u_{n-1}(x) \geqslant 0$ et pour $n \geqslant \lfloor t_x \rfloor + 1$ $u_n(x) - u_{n-1}(x) \leqslant 0$, ce qui donne le résultat annoncé.

---

10. • φ_x est continue et dérivable sur $[1,+\infty[$ par opérations sur les fonctions usuelles et pour tout $t \geq 1$,

$$\begin{aligned}\varphi_x'(t) &= (1-r)t^{-r}(t-1)^r + rt^{1-r}(t-1)^{r-1} = (1-r)\frac{(t-1)^r}{t^r} + rt\frac{(t-1)^{r-1}}{t^r} \\ &= \frac{(t-1)^{r-1}((1-r)(t-1)+rt)}{t^r} = \frac{(t-1)^{r-1}(t-1+r)}{t^r}.\end{aligned}$$

Par suite, $\varphi_x'(t) > 0$ sur $]1,+\infty[$, donc φ_x est continue et strictement croissante sur $[1,+\infty[$.
φ_x réalise donc une bijection de $[1,+\infty[$ sur $[-x,+\infty[$ car $\varphi_x(1) = -x$ et $\varphi_x(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} t^{1-r}t^r = t \underset{t\to+\infty}{\to} +\infty$.
Or $0 \in [-x,+\infty[$ (car $x > 0$), donc l'équation $\varphi_x(t) = 0$ admet une unique solution sur $[1,+\infty[$, notée t_x.
• Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= \frac{(n+1)^r}{(n+1)!}x^{n+1} - \frac{n^r}{n!}x^n = \frac{x^n}{n!}\left((n+1)^{r-1}x - n^r\right) \\ &= \frac{x^n(n+1)^{r-1}}{n!}\left(x - (n+1)^{1-r}n^r\right) = -\frac{x^n(n+1)^{r-1}}{n!}\varphi_x(n+1).\end{aligned}$$

Or, comme φ_x est strictement croissante sur $[1,+\infty[$ et s'annule en t_x, on a

$$\varphi_x(n+1) \geq 0 \Leftrightarrow n+1 \geq t_x \Leftrightarrow n \geq \lfloor t_x \rfloor.$$

Par suite, pour tout $n \in [\![0, \lfloor t_x \rfloor - 1]\!]$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$, donc $(u_n(x))_{0\leq n\leq\lfloor t_x\rfloor-1}$ est croissante et, pour tout $n \geq \lfloor t_x \rfloor$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$, donc $(u_n(x))_{n\geq\lfloor t_x\rfloor}$ est décroissante.

Question 11

Enoncé

11. Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Déterminer la limite de $\varphi_x(x+\alpha)$ quand x tend vers $+\infty$. En déduire que

$$t_x - x - r \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Pour établir ce dernier résultat, on pourra revenir à la définition d'une limite.

Rapport de jury

Question 11. La première partie de l'étude est rarement correcte. La suite est peu abordée.

Corrigés

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $x+\alpha \in [1,+\infty[$, soit $x \geq 1-\alpha$, on a :

$$\varphi_x(x+\alpha) = (x+\alpha)^{1-r}(x+\alpha-1)^r - x = x^{1-r}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{1-r} x^r \left(1+\frac{\alpha-1}{x}\right)^r - x$$

$$= x\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{1-r}\left(1+\frac{\alpha-1}{x}\right)^r - x = x\left[1+(1-r)\frac{\alpha}{x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)\right]\left[1+r\frac{\alpha-1}{x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)\right] - x$$

$$= x\left[1+r\frac{\alpha-1}{x}+(1-r)\frac{\alpha}{x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)\right] - x = \alpha - r + \underset{x\to+\infty}{o}(1)$$

Donc :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \varphi_x(x+\alpha) = \alpha - r}$$

On a vu que φ réalise une bijection strictement croissante de $[1,+\infty[$ vers $[0,+\infty[$, donc φ^{-1} réalise une bijection strictement croissante de $[0,+\infty[$ vers $[1,+\infty[$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi^{-1}(x) = +\infty$. De plus :

$$\varphi(t) = t^{1-r}(t-1)^r = t^{1-r}t^r\left(1-\frac{1}{t}\right)^r = t\left(1-\frac{1}{t}\right)^r = t\left(1-r\frac{1}{t} + \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t}\right)\right) = t - r + \underset{t\to+\infty}{o}(1).$$

Donc $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(t-\varphi(t)\right) = r$ et comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi^{-1}(x) = +\infty$, on a en posant $t = \varphi^{-1}(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\varphi^{-1}(x) - x\right) = r.$$

Enfin, comme $t_x = \varphi^{-1}(x)$, on obtient :

$$\boxed{t_x - x - r \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0}$$

11.

• On effectue un développement asymptotique pour $x \to +\infty$:

$\varphi_x(x+\alpha) = x\left(\left(1+\dfrac{\alpha}{x}\right)^{1-r} + \left(1+\dfrac{\alpha-1}{x}\right)^{r} - 1\right)$

$= x\left(\left(1+(1-r)\dfrac{\alpha}{x}+o\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)\left(1+r\dfrac{\alpha-1}{x}+o\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)-1\right)$

$= x\left(\dfrac{\alpha-r}{x}++o\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) \underset{x\to+\infty}{\to} \alpha - r$

• On fixe maintenant $\epsilon > 0$;

— on considère $\alpha = r+\epsilon$, on a donc $\varphi_x(x+\alpha) \underset{x\to+\infty}{\to} \alpha - r = \epsilon > 0$ donc il existe x_1 tel que pour tout $x \geq x_1$:
$\varphi_x(x+\alpha) \geq 0$ où $0 = \varphi_x(t_x)$ et donc par croissance de φ_x on a $x+\alpha \geq t_x$ i.e. $x+r+\epsilon \geq t_x$ i.e. $t_x - x - r \leq \epsilon$;

— on considère $\alpha = r-\epsilon$, on a donc $\varphi_x(x+\alpha) \underset{x\to+\infty}{\to} \alpha - r = -\epsilon < 0$ donc il existe x_2 tel que pour tout $x \geq x_2$:
$\varphi_x(x+\alpha) \leq 0$ où $0 = \varphi_x(t_x)$ et donc par croissance de φ_x on a $x+\alpha \leq t_x$ i.e. $x+r-\epsilon \leq t_x$ i.e. $t_x - x - r \geq -\epsilon$;

— on pose enfin $x_0 = \max(x_1, x_2)$ et on a pour tout $x \geq x_0$: $-\epsilon \leq t_x - x - r \leq \epsilon$.

On a donc démontré que $\lim\limits_{x\to+\infty} (t_x - x - r) = 0$.

---

11. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi_x(x+\alpha) = \alpha - r$ puisque :

$$\begin{aligned}
\varphi_x(x+\alpha) &= (x+\alpha)^{1-r}(x+\alpha-1)^r - x = x^{1-r+r}\left[\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{1-r}\left(1+\frac{\alpha-1}{x}\right)^r - 1\right] \\
&= x\left[\left(1+\frac{\alpha(1-r)}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\left(1+\frac{(\alpha-1)r}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)-1\right] \\
&= x\left[\frac{\alpha-r}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right] = \alpha - r + o(1)
\end{aligned}$$

Montrons alors que $\lim\limits_{x\to+\infty} t_x - x - r = 0$. Soit $\varepsilon > 0$.

- Pour $\alpha = r+\varepsilon$ on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi_x(x+r+\varepsilon) = \varepsilon > 0$ et il existe donc $x^+ > 0$ tel que : $\forall x \geqslant x^+\ \varphi_x(x+r+\varepsilon) > 0$.
Les variations de φ_x donne alors :

$$\forall x \geqslant x^+ \qquad t_x < x+r+\varepsilon$$

- De même avec $\alpha = r-\varepsilon$ on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi_x(x+r-\varepsilon) = -\varepsilon < 0$ et il existe donc $x^- > 0$ tel que : $\forall x \geqslant x^-\ \varphi_x(x+r+\varepsilon) < 0$ et alors :

$$\forall x \geqslant x^- \qquad x+r-\varepsilon < t_x$$

En posant $x_0 = \max(x^+, x^-)$ il vient : $\forall x \geqslant x_0 \quad -\varepsilon < t_x - x - r < \varepsilon$. CQFD.

11. • Pour tout $x > 0$ tel que $x \geq 1 - \alpha$,

$$\begin{aligned}
\varphi_x(x+\alpha) &= (x+\alpha)^{1-r}(x+\alpha-1)^r - x \\
&= x^{1-r}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{1-r} x^r \left(1+\frac{\alpha-1}{x}\right)^r - x \\
&= x\left(\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{1-r}\left(1+\frac{\alpha-1}{x}\right)^r - 1\right) \\
&= x\left(\left(1+(1-r)\frac{\alpha}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\left(1+r\frac{\alpha-1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)-1\right) \\
&= x\left(1+(1-r)\frac{\alpha}{x}+r\frac{\alpha-1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)-1\right) \\
&= (1-r)\alpha + r(\alpha-1) + o(1) \underset{x\to+\infty}{\to} \alpha - r.
\end{aligned}$$

• Soit $\varepsilon > 0$.
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi_x(x+r+\varepsilon) = \varepsilon > 0$, il existe $x_1 \geq 1$ tel que pour tout $x \geq x_1$, $\varphi_x(x+r+\varepsilon) \geq 0$.
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi_x(x+r-\varepsilon) = -\varepsilon < 0$, il existe $x_2 \geq 1$ tel que pour tout $x \geq x_2$, $\varphi_x(x+r-\varepsilon) \leq 0$.
Par suite, pour tout $x \geq x_0 = \max(x_1, x_2)$, on a $\varphi_x(x+r-\varepsilon) \leq 0 = \varphi_x(t_x) \leq \varphi_x(x+r+\varepsilon)$.
Comme φ_x est strictement croissante sur $[1, +\infty[$, on obtient $x+r-\varepsilon \leq t_x \leq x+r+\varepsilon$.
On a montré que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \geq 1 : \forall x \geq x_0, |t_x - x - r| \leq \varepsilon,$$

ce qui est la définition de $t_x - x - r \underset{x\to+\infty}{\to} 0$.

Question 12

Enoncé

12. Montrer que pour tout entier relatif k,

$$u_{\lfloor x\rfloor+k}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} u_{\lfloor x\rfloor}(x).$$

Rapport de jury

Question 12. On trouve souvent l'assertion : $\lfloor x\rfloor$ est équivalent à $\lfloor x\rfloor + k$, ce qui est vrai, donc $\lfloor x\rfloor!$ est équivalent à $(\lfloor x\rfloor + k)!$, ce qui est faux.

Corrigés

Soit $k\in\mathbb{Z}$ et $x\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $\lfloor x\rfloor+k\geq 0$ et $\lfloor x\rfloor>0$. On a toujours $u_{\lfloor x\rfloor}(x)\neq 0$ et :

$$\frac{u_{\lfloor x\rfloor+k}(x)}{u_{\lfloor x\rfloor}(x)}=\frac{\dfrac{(\lfloor x\rfloor+k)^r}{(\lfloor x\rfloor+k)!}x^{\lfloor x\rfloor+k}}{\dfrac{\lfloor x\rfloor^r}{\lfloor x\rfloor!}x^{\lfloor x\rfloor}}=\frac{\lfloor x\rfloor!}{(\lfloor x\rfloor+k)!}\left(\frac{\lfloor x\rfloor+k}{\lfloor x\rfloor}\right)^r x^k.$$

Si $k=0$, on a $u_{\lfloor x\rfloor+k}(x)=u_{\lfloor x\rfloor}(x)$, sinon :

$$\frac{u_{\lfloor x\rfloor+k}(x)}{u_{\lfloor x\rfloor}(x)}=\begin{cases}\dfrac{x^k}{(\lfloor x\rfloor+1)\dots(\lfloor x\rfloor+k)}\left(1+\dfrac{k}{\lfloor x\rfloor}\right)^r & \text{si } k>0\\[2ex] \dfrac{\lfloor x\rfloor\dots(\lfloor x\rfloor-|k|+1)}{x^{|k|}}\left(1+\dfrac{k}{\lfloor x\rfloor}\right)^r & \text{si } k<0\end{cases}$$

Or, $\left(1+\dfrac{k}{\lfloor x\rfloor}\right)^r \underset{x\to+\infty}{\sim} 1$ et $\lfloor x\rfloor\dots(\lfloor x\rfloor-|k|+1)\underset{x\to+\infty}{\sim}(\lfloor x\rfloor+1)\dots(\lfloor x\rfloor+k)\underset{x\to+\infty}{\sim}\lfloor x\rfloor^k$, donc, dans tous les cas :

$$\frac{u_{\lfloor x\rfloor+k}(x)}{u_{\lfloor x\rfloor}(x)}\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{x^k}{\lfloor x\rfloor^k}=\left(\frac{x}{\lfloor x\rfloor}\right)^k.$$

De plus, on a $0<\lfloor x\rfloor\leq x<\lfloor x\rfloor+1$ donc $1\leq\dfrac{x}{\lfloor x\rfloor}<1+\dfrac{1}{\lfloor x\rfloor}$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\lfloor x\rfloor}=1$, qui implique que :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\lfloor x\rfloor}\right)^k=1.$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{u_{\lfloor x\rfloor+k}(x)}{u_{\lfloor x\rfloor}(x)}=1$, soit :

$$\boxed{u_{\lfloor x\rfloor+k}(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}u_{\lfloor x\rfloor}(x)}$$

12.
Pour $k\in\mathbb{Z}$ et $x\to+\infty$:
$\dfrac{u_{\lfloor x\rfloor+k}(x)}{u_{\lfloor x\rfloor}(x)}=\left(\dfrac{\lfloor x\rfloor+k}{\lfloor x\rfloor}\right)^r x^k\dfrac{\lfloor x\rfloor!}{(\lfloor x\rfloor+k)!}\underset{x\to+\infty}{\sim}\left(\dfrac{x}{\lfloor x\rfloor}\right)^k\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}1$, d'où l'équivalence souhaitée.

12. Soit $k \in \mathbb{Z}$ fixé. Pour x assez grand on a $\lfloor x \rfloor + k \in \mathbb{N}$ et (avec $\lfloor x \rfloor \underset{+\infty}{\sim} x$) $$\begin{aligned} \frac{u_{\lfloor x \rfloor + k}(x)}{u_{\lfloor x \rfloor}(x)} &= \frac{(\lfloor x \rfloor + k)^r}{(\lfloor x \rfloor + k)!} x^{\lfloor x \rfloor + k} \times \frac{\lfloor x \rfloor !}{\lfloor x \rfloor^r x^{\lfloor x \rfloor}} \\ &= \left(\frac{\lfloor x \rfloor + k}{\lfloor x \rfloor} \right)^r \times \frac{x^k}{(\lfloor x \rfloor + k)(\lfloor x \rfloor + k - 1) \cdots (\lfloor x \rfloor + 1)} \underset{+\infty}{\sim} 1 \end{aligned}$$
12. Pour tout entier relatif k, pour tout $x > 1$ tel que $\lfloor x \rfloor \geq -k$, $$\begin{aligned} \frac{u_{\lfloor x \rfloor + k}(x)}{u_{\lfloor x \rfloor}(x)} &= \frac{(\lfloor x \rfloor + k)^r}{(\lfloor x \rfloor + k)!} x^{\lfloor x \rfloor + k} \frac{(\lfloor x \rfloor)!}{(\lfloor x \rfloor)^r x^{\lfloor x \rfloor}} \\ &= \frac{(\lfloor x \rfloor + k)^r}{(\lfloor x \rfloor)^r} \frac{(\lfloor x \rfloor)!}{(\lfloor x \rfloor + k)!} x^k \\ &= \left(1 + \frac{k}{\lfloor x \rfloor}\right)^r \frac{(\lfloor x \rfloor)!}{(\lfloor x \rfloor + k)!} x^k \\ &= \begin{cases} \left(1 + \frac{k}{\lfloor x \rfloor}\right)^r \prod_{i=1}^{k} \frac{x}{\lfloor x \rfloor + i} & \text{si } k > 0 \\ 1 & \text{si } k = 0 \\ \left(1 + \frac{k}{\lfloor x \rfloor}\right)^r \prod_{i=0}^{-k-1} \frac{\lfloor x \rfloor - i}{x} & \text{si } k < 0 \end{cases} \\ &\underset{x \to +\infty}{\sim} \begin{cases} 1 \times \left(\frac{x}{\lfloor x \rfloor}\right)^k & \text{si } k > 0 \\ 1 & \text{si } k = 0 \\ 1 \times \left(\frac{\lfloor x \rfloor}{x}\right)^{-k} & \text{si } k < 0 \end{cases} \underset{x \to +\infty}{\to} 1, \end{aligned}$$ car, comme pour tout $x \geq 1$, $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$, on a $1 \leq \frac{x}{\lfloor x \rfloor} \leq 1 + \frac{1}{\lfloor x \rfloor}$, donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\lfloor x \rfloor} = 1$.

Question 13

Enoncé

13. Soit $m \in \mathbf{N}^*$. Montrer que

$$\sum_{i=\lfloor x\rfloor - m}^{\lfloor x\rfloor} u_i(x) \geq m\, u_{\lfloor x\rfloor}(x) \quad \text{pour } x \text{ voisin de } +\infty.$$

En déduire que, pour x voisin de $+\infty$,

$$u_{\lfloor x\rfloor}(x) \leq \frac{x^r e^x}{m}.$$

Rapport de jury

Question 13. Dans la plupart des copies traitant cette question, on invoque la décroissance de la suite, ce qui contredit le résultat de Q10.

Corrigés

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $x \geq m$, donc $\lfloor x\rfloor \geq m$.

On a vu que $t_x - x \xrightarrow[x\to+\infty]{} r > 0$, donc il existe $A \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout réel $x \geq A$, $t_x - x \geq 0$, soit $x \leq t_x$ qui, avec $\lfloor x\rfloor \geq m$, implique que $0 \leq \lfloor x\rfloor - m \leq \lfloor x\rfloor \leq N_x$. D'après la question 2, on a alors :

$$u_{\lfloor x\rfloor-m}(x) \leq u_{\lfloor x\rfloor-m+1}(x) \leq \ldots \leq u_{\lfloor x\rfloor}(x) \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=\lfloor x\rfloor-m}^{\lfloor x\rfloor} u_i(x) \geq \sum_{i=\lfloor x\rfloor-m}^{\lfloor x\rfloor} u_{\lfloor x\rfloor-m}(x) = (m+1)\, u_{\lfloor x\rfloor-m}(x).$$

Or, d'après la question précédente, $u_{\lfloor x\rfloor-m}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} u_{\lfloor x\rfloor}(x)$, donc il existe $B_m \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout réel $x \geq B_m$, on a :

$$\left(1-\frac{1}{m}\right)u_{\lfloor x\rfloor-m}(x) \leq u_{\lfloor x\rfloor}(x) \leq \left(1+\frac{1}{m}\right)u_{\lfloor x\rfloor-m}(x) \quad \Rightarrow \quad (m+1)\,u_{\lfloor x\rfloor-m}(x) = m\left(1+\frac{1}{m}\right)u_{\lfloor x\rfloor-m}(x) \geq m\,u_{\lfloor x\rfloor}(x).$$

Alors, pour tout réel $x \geq \max(m, A, B_m)$, on a :

$$\boxed{\sum_{i=\lfloor x\rfloor-m}^{\lfloor x\rfloor} u_i(x) \geq m\,u_{\lfloor x\rfloor}(x)}$$

Comme pour tout $i \in [\![\lfloor x\rfloor - m, \lfloor x\rfloor]\!]$, $i^r \leq \lfloor x\rfloor^r \leq x^r$ et pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\dfrac{x^i}{i!} \geq 0$, on peut écrire :

$$\sum_{i=\lfloor x\rfloor-m}^{\lfloor x\rfloor} u_i(x) = \sum_{i=\lfloor x\rfloor-m}^{\lfloor x\rfloor} \frac{i^r}{i!}x^i \leq \lfloor x\rfloor^r \sum_{i=\lfloor x\rfloor-m}^{\lfloor x\rfloor} \frac{x^i}{i!} \leq x^r \sum_{i=\lfloor x\rfloor-m}^{\lfloor x\rfloor} \frac{x^i}{i!} \leq x^r \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^i}{i!} = x^r e^x.$$

Ainsi, pour tout réel $x \geq \max(m, A, B_m)$, on a $m\,u_{\lfloor x\rfloor}(x) \leq \sum_{i=\lfloor x\rfloor-m}^{\lfloor x\rfloor} u_i(x) \leq x^r e^x$, donc :

$$\boxed{u_{\lfloor x\rfloor}(x) \leq \frac{x^r e^x}{m}}$$

13.

• On a montré que $\lim\limits_{x\to+\infty}(t_x - x - r) = 0$ où $r > 0$.

On peut donc se placer pour x au voisinage de $+\infty$ tel que $t_x > x$, et on a alors, pour tout $i \in [\![\lfloor x\rfloor - m, \lfloor x\rfloor]\!]$, $u_i(x) \geq u_{\lfloor x\rfloor - m}(x)$ ce qui assure que $\displaystyle\sum_{i=\lfloor x\rfloor-m}^{\lfloor x\rfloor} u_i(x) \geq (m+1)u_{\lfloor x\rfloor-m}(x)$.

D'où $\dfrac{\displaystyle\sum_{i=\lfloor x\rfloor-m}^{\lfloor x\rfloor} u_i(x)}{m u_{\lfloor x\rfloor}(x)} \geq \dfrac{m+1}{m}\dfrac{u_{\lfloor x\rfloor-m}(x)}{u_{\lfloor x\rfloor}(x)} \underset{x\to+\infty}{\to} \dfrac{m+1}{m} > 1$ ce qui assure qu'au voisinage de $+\infty$ on a bien $\displaystyle\sum_{i=\lfloor x\rfloor-m}^{\lfloor x\rfloor} u_i(x) \geq m u_{\lfloor x\rfloor}(x)$.

• L'inégalité précédente permet alors d'écrire, pour x au voisinage de $+\infty$:

$u_{\lfloor x\rfloor}(x) \leq \dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{i=\lfloor x\rfloor-m}^{\lfloor x\rfloor} \frac{i^r}{i!}x^i \leq \frac{x^r}{m}\sum_{i=\lfloor x\rfloor-m}^{\lfloor x\rfloor}\frac{x^i}{i!} \leq \frac{x^r}{m}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{x^i}{i!} = \frac{x^r e^x}{m}$.

13. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On a, d'après ce qui précède :

$$\frac{\displaystyle\sum_{i=\lfloor x\rfloor-m}^{\lfloor x\rfloor} u_i(x)}{u_{\lfloor x\rfloor}(x)} = \frac{\displaystyle\sum_{k=-m}^{0} u_{\lfloor x\rfloor+k}(x)}{u_{\lfloor x\rfloor}(x)} = \sum_{k=-m}^{0}\frac{u_{\lfloor x\rfloor+k}(x)}{u_{\lfloor x\rfloor}(x)} \longrightarrow m+1$$

et donc pour x assez grand ce quotient est supérieur ou égal à m. CQFD.

Soit donc $x_1 > 0$ tel que :

$$\forall x \geqslant x_1 \quad u_{\lfloor x\rfloor}(x) \leqslant \frac{1}{m}\sum_{i=\lfloor x\rfloor-m}^{\lfloor x\rfloor} u_i(x) = \frac{1}{m}\sum_{i=\lfloor x\rfloor-m}^{\lfloor x\rfloor} i^r\frac{x^i}{i!}$$

Pour les indices i de cette somme on a $i^r \leqslant \lfloor x\rfloor^r \leqslant x^r$ et les termes sommés sont positifs donc :

$$\forall x \geqslant x_1 \quad u_{\lfloor x\rfloor}(x) \leqslant \frac{x^r}{m}\sum_{i=\lfloor x\rfloor-m}^{\lfloor x\rfloor}\frac{x^i}{i!} \leqslant \frac{x^r}{m}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{x^i}{i!} = \frac{x^r e^x}{m}$$

13. • D'après la question 12,

$$\frac{\sum_{i=\lfloor x\rfloor-m}^{\lfloor x\rfloor} u_i(x)}{u_{\lfloor x\rfloor}(x)} = \sum_{k=-m}^{0} \underbrace{\frac{u_{\lfloor x\rfloor+k}(x)}{u_{\lfloor x\rfloor}(x)}}_{\to 1} \underset{x\to+\infty}{\to} \sum_{k=-m}^{0} 1 = m+1,$$

donc, il existe $x_3 > 1$ tel que pour tout $x \geq x_3$, ce quotient est supérieur à m et donc, comme $u_{\lfloor x\rfloor}(x) > 0$,

$$\sum_{i=\lfloor x\rfloor-m}^{\lfloor x\rfloor} u_i(x) \geq m u_{\lfloor x\rfloor}(x).$$

• Pour tout $x \geq x_3$ tel que $x \geq m$,

$$\begin{aligned}
u_{\lfloor x\rfloor}(x) &\leq \frac{1}{m} \sum_{i=\lfloor x\rfloor-m}^{\lfloor x\rfloor} u_i(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=\lfloor x\rfloor-m}^{\lfloor x\rfloor} \frac{i^r}{i!} x^i \\
&\leq \frac{1}{m} \sum_{i=\lfloor x\rfloor-m}^{\lfloor x\rfloor} \frac{x^r}{i!} x^i \quad \text{(car pour tout } i \in [\![\lfloor x\rfloor - m, \lfloor x\rfloor]\!],\ i \leq \lfloor x\rfloor \leq x) \\
&= \frac{x^r}{m} \sum_{i=\lfloor x\rfloor-m}^{\lfloor x\rfloor} \frac{x^i}{i!} \\
&\leq \frac{x^r}{m} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^i}{i!} = \frac{x^r}{m} e^x.
\end{aligned}$$

Question 14

Enoncé

14. En déduire que pour tout entier relatif k,

$$u_{\lfloor x\rfloor+k}(x) = o_{x\to+\infty}(x^r e^x)$$

puis que

$$M_x = o_{x\to+\infty}(x^r e^x).$$

En vue de ce dernier résultat, on pourra commencer par démontrer que, pour x assez grand, $M_x = u_{\lfloor x\rfloor+i}(x)$ pour un entier i compris entre $\lfloor r\rfloor - 1$ et $\lfloor r\rfloor + 2$.

Rapport de jury

Question 14. Peu de réponses correctes.

Corrigés

Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$. Si on pose $m=\left\lfloor \dfrac{1}{\varepsilon}\right\rfloor+1\in\mathbb{N}^*$ et $C=\max\left(m,A,B_m\right)$ tel que défini dans la question précédente, on a $\dfrac{1}{m}<\varepsilon$ et pour tout réel $x\geq C$, $u_{\lfloor x\rfloor}(x)\leq\dfrac{x^r e^x}{m}<\varepsilon x^r e^x$.

Ainsi, pour tout $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$ il existe $C\in\mathbb{R}$ tel que pour tout réel $x\geq C$, $u_{\lfloor x\rfloor}(x)<\varepsilon x^r e^x$. Ceci permet de conclure que :

$$u_{\lfloor x\rfloor}(x)=\underset{x\to+\infty}{o}\left(x^r e^x\right).$$

Enfin, comme d'après la question 4, on a $u_{\lfloor x\rfloor+k}(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}u_{\lfloor x\rfloor}(x)$ pour tout $k\in\mathbb{Z}$, on obtient :

$$\boxed{u_{\lfloor x\rfloor+k}(x)=\underset{x\to+\infty}{o}\left(x^r e^x\right)\text{ pour tout } k\in\mathbb{Z}.}$$

Rappelons que $M_x=u_{N_x}(x)$ avec $N_x=\lfloor t_x\rfloor$ et que $t_x-x-r\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$, donc il existe $D\in\mathbb{R}$ tel que pour tout réel $x\geq D$, $-1\leq t_x-x-r\leq 1$, et :

$$\lfloor r\rfloor-1\leq\lfloor t_x-x\rfloor\leq\lfloor r\rfloor+1.$$

De plus, pour tous réels a et b, on a :

$$\begin{cases}a+b-1<\lfloor a+b\rfloor\leq a+b\\ a-1\leq\lfloor a\rfloor\leq a\\ b-1\leq\lfloor b\rfloor\leq b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b-1<\lfloor a+b\rfloor\leq a+b\\ -a\leq-\lfloor a\rfloor<-a+1\\ -b\leq-\lfloor b\rfloor<-b+1\end{cases}\Rightarrow -1<\lfloor a+b\rfloor-\lfloor a\rfloor-\lfloor b\rfloor<2.$$

Et comme $\lfloor a+b\rfloor-\lfloor a\rfloor-\lfloor b\rfloor$ est entier, on obtient $0\leq\lfloor a+b\rfloor-\lfloor a\rfloor-\lfloor b\rfloor\leq 1$, soit :

$$\lfloor a+b\rfloor=\lfloor a\rfloor+\lfloor b\rfloor+\varepsilon\text{ avec }\varepsilon=0\text{ ou }1.$$

Ainsi, $N_x=\lfloor t_x\rfloor=\lfloor t_x-x+x\rfloor=\lfloor t_x-x\rfloor+\lfloor x\rfloor+\varepsilon$ avec $0\leq\varepsilon\leq 1$ et :

$$\lfloor r\rfloor-1\leq\lfloor t_x-x\rfloor\leq\lfloor r\rfloor+1\ \Rightarrow\ \lfloor r\rfloor-1+\lfloor x\rfloor+\varepsilon\leq N_x\leq\lfloor r\rfloor+1+\lfloor x\rfloor+\varepsilon.$$

D'où, avec $0 \leq \varepsilon \leq 1$:

$$\lfloor r \rfloor - 1 \leq \lfloor r \rfloor - 1 + \varepsilon \leq N_x - \lfloor x \rfloor \leq \lfloor r \rfloor + 1 + \varepsilon \leq \lfloor r \rfloor + 2 .$$

Ainsi, $N_x = \lfloor x \rfloor + i$ où i est un entier compris entre $\lfloor r \rfloor - 1$ et $\lfloor r \rfloor + 2$.

On a alors :

$$\left.\begin{aligned} u_{\lfloor x \rfloor + \lfloor r \rfloor - 1}(x) &= \underset{x \to +\infty}{o}\left(x^r e^x\right) \\ u_{\lfloor x \rfloor + \lfloor r \rfloor}(x) &= \underset{x \to +\infty}{o}\left(x^r e^x\right) \\ u_{\lfloor x \rfloor + \lfloor r \rfloor + 1}(x) &= \underset{x \to +\infty}{o}\left(x^r e^x\right) \\ u_{\lfloor x \rfloor + \lfloor r \rfloor + 2}(x) &= \underset{x \to +\infty}{o}\left(x^r e^x\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow M_x = u_{N_x}(x) = u_{\lfloor x \rfloor + i}(x) = \underset{x \to +\infty}{o}\left(x^r e^x\right).$$

Donc :

$$\boxed{M_x = \underset{x \to +\infty}{o}\left(x^r e^x\right)}$$

14.

• On a montré à la question 13 que : $\forall m \in \mathbb{N}^*, \exists x_m > 0, \forall x \geq x_m, u_{\lfloor x \rfloor}(x) \leq \dfrac{x^r \mathrm{e}^x}{m}$ ce qui assure que $u_{\lfloor x \rfloor}(x) = \underset{x \to +\infty}{o}(x^r \mathrm{e}^x)$.

L'équivalent de la question 12 permet alors de conclure que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $u_{\lfloor x \rfloor + k}(x) = \underset{x \to +\infty}{o}(x^r \mathrm{e}^x)$

• Justifions l'indication de l'énoncé, on utilise pour cela le fait que $\lim\limits_{x \to +\infty}(t_x - x - r) = 0$ ce qui assure que pour x au voisinage de $+\infty$ on a l'encadrement suivant $x + r - 1 \leq t_x \leq x + r + 1$ et par croissance de la partie entière $\lfloor x + r \rfloor - 1 \leq \lfloor t_x \rfloor \leq \lfloor x + r \rfloor + 1$.

Or $\lfloor x \rfloor + \lfloor r \rfloor \leq \lfloor x + r \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor r \rfloor + 1$ ce qui assure que $\lfloor x \rfloor + \lfloor r \rfloor - 1 \leq \lfloor t_x \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor r \rfloor + 2$.

On a donc, pour x au voisinage de $+\infty$, $M_x = \max\limits_{i \in [\![-1,2]\!]}(u_{\lfloor x \rfloor + \lfloor r \rfloor + i}(x))$.

Or, pour tout $i \in [\![-1, 2]\!]$, on a $u_{\lfloor x \rfloor + \lfloor r \rfloor + i}(x) = \underset{x \to +\infty}{o}(x^r \mathrm{e}^x)$, d'où $M_x = \underset{x \to +\infty}{o}(x^r \mathrm{e}^x)$.

14. • *Première étape :* Soit $k \in \mathbb{Z}$ fixé. Montrons que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{u_{\lfloor x \rfloor + k}(x)}{x^r e^x} = 0$.

Pour $\varepsilon > 0$, notons $m = \left\lfloor \frac{2}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$, de sorte que $\frac{2}{\varepsilon} \leqslant m$ et $\frac{2}{m} \leqslant \varepsilon$.

La question **12** donne $a > 0$ tel que : $\forall x \geqslant a \quad u_{\lfloor x \rfloor + k}(x) \leqslant 2u_{\lfloor x \rfloor}(x)$

La question **13** donne pour cet m là l'existence de $A > a > 0$ tel que : $\forall x \geqslant A \quad 0 \leqslant u_{\lfloor x \rfloor}(x) \leqslant \frac{x^r e^x}{m}$ et finalement :

$$\forall x \geqslant A \quad 0 \leqslant u_{\lfloor x \rfloor + k}(x) \leqslant 2u_{\lfloor x \rfloor}(x) \leqslant 2\frac{x^r e^x}{m} \leqslant \varepsilon x^r e^x \qquad \text{CQFD}$$

• *Deuxième étape (indiquée par l'énoncé).*

La question **11** donne $B > 0$ tel que $\forall x \geqslant B \quad -1 < t_x - x - r < 1$ et donc, puisque $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$ et $\lfloor r \rfloor \leqslant r < \lfloor r \rfloor + 1$ il vient :

$$\forall x \geqslant B \quad \lfloor x \rfloor + \lfloor r \rfloor - 1 \leqslant t_x < \lfloor x \rfloor + \lfloor r \rfloor + 3$$

Comme les bornes de l'encadrement sont des entiers, on en déduit que :

$$(1) \quad \forall x \geqslant B \quad \lfloor t_x \rfloor = \lfloor x \rfloor + i_x \quad \text{avec } i_x \in I = \{\lfloor r \rfloor - 1,\ \lfloor r \rfloor,\ \lfloor r \rfloor + 1,\ \lfloor r \rfloor + 2\}$$

Remarquons que ce "i" de l'énoncé *dépend* a priori de x mais que l'ensemble I est fixe et fini.

• *Troisième étape :* Montrons enfin que $M_x = o_{x \to +\infty}(x^r e^x)$.

Notons d'abord que, d'après la question **10** on a : $M_x = u_{\lfloor t_x \rfloor}(x)$.

Soit alors $\varepsilon > 0$.

La première étape de cette question donne, pour tout $k \in I \subset \mathbb{Z}$ (de cardinal 4) un réel "A" $= A_k > 0$ tel que :

$$(2_k) \qquad \forall x \geqslant A_k \quad u_{\lfloor x \rfloor + k}(x) \leqslant \varepsilon x^r e^x$$

Si on pose $A_\varepsilon = \max\left(A_{\lfloor r \rfloor - 1}, A_{\lfloor r \rfloor}, A_{\lfloor r \rfloor + 1}, A_{\lfloor r \rfloor + 2}, B\right)$ on a alors :

$$\forall x \geqslant A_\varepsilon \quad 0 \leqslant M_x \leqslant \varepsilon x^r e^x$$

En effet pour un tel $x \geqslant A_\varepsilon$ la propriété (1) donne que $M_x = u_{\lfloor t_x \rfloor}(x) = u_{\lfloor x \rfloor + i_x}(x)$ avec $k = i_x \in I$ et (2_k) donne alors $u_{\lfloor x \rfloor + i_x}(x) \leqslant \varepsilon x^r e^x$. CQFD.

14. • Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{1}{m} \leq \varepsilon$.

De plus, d'après la question précédente, pour cette valeur de m, pour x assez grand,

$$0 \leq \frac{u_{\lfloor x \rfloor}(x)}{x^r e^x} \leq \frac{1}{m} \leq \varepsilon,$$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{u_{\lfloor x \rfloor}(x)}{x^r e^x} = 0$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ fixé, en posant "$x = x + k$", on a aussi $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{u_{\lfloor x + k \rfloor}(x)}{(x+k)^r e^x} = 0$, et donc, comme $(x+k)^r \underset{x \to +\infty}{\sim} x^r$, on a aussi $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{u_{\lfloor x + k \rfloor}(x)}{r^r e^x} = 0$, ie $u_{\lfloor x \rfloor + k}(x) = \underset{x \to +\infty}{o}(x^r e^x)$.

• D'après la question 11, $\lim\limits_{x \to +\infty} t_x - x = r$, donc il existe $x_4 \geq 1$ tel que pour tout $x \geq x_4$, $t_x \in [x + r - 1/2, x + r + 1/2]$, donc $\lfloor t_x \rfloor \in [\![\lfloor x + r - 1/2 \rfloor, \lfloor x + r + 1/2 \rfloor]\!]$. Or, $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$, $\lfloor r \rfloor \leq r < \lfloor r \rfloor + 1$, donc

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor r \rfloor - 1 \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor r \rfloor - 1/2 \leq x + r - 1/2,$$

donc, comme $\lfloor x \rfloor + \lfloor r \rfloor - 1 \in \mathbb{Z}$, on a $\lfloor x + r - 1/2 \rfloor \geq \lfloor x \rfloor + \lfloor r \rfloor - 1$, et

$$\lfloor x \rfloor + 1 + \lfloor r \rfloor + 1 + 1 \geq \lfloor x \rfloor + 1 + \lfloor r \rfloor + 1 + 1/2 > x + r - 1/2,$$

donc, comme $\lfloor x \rfloor + \lfloor r \rfloor + 3 \in \mathbb{Z}$, on a $\lfloor x + r + 1/2 \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor r \rfloor + 2$. On a donc

$$\lfloor t_x \rfloor \in [\![\lfloor x \rfloor + \lfloor r \rfloor - 1, \lfloor x \rfloor + \lfloor r \rfloor + 2]\!].$$

Par suite,

$$0 \leq M_x = u_{\lfloor t_x \rfloor}(x) \leq \sum_{k=-1}^{2} u_{\lfloor x \rfloor + \lfloor r \rfloor + k}(x) = \sum_{k=-1}^{2} o(x^r e^x) = o(x^r e^x),$$

donc on a bien $M_x = o(x^r e^x)$.

Question 15

Enoncé

15. Dans cette question et la suivante, on fixe un nombre complexe z tel que $|z| = 1$ et $z \neq 1$. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose

$$D_n := \sum_{k=0}^{n-1} z^k.$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ |D_n| \leq \frac{2}{|1-z|}$$

et que les séries $\sum_n D_n\, u_{n-1}(x)$ et $\sum_n D_n\, u_n(x)$ sont absolument convergentes.

Rapport de jury

Question 15. Cette question est souvent abordée et correctement traitée dans une moitié des copies.

Corrigés

Comme $z \neq 1$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|D_n| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} z^k\right| = \left|\frac{1-z^n}{1-z}\right| = \frac{|1-z^n|}{|1-z|} \leq \frac{|1|+|z^n|}{|1-z|} = \frac{1+|z|^n}{|1-z|}.$$

Et comme $|z| = 1$, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{|D_n| \leq \frac{2}{|1-z|}}$$

D'après la question 1 (en prenant $p = 1$), la série $\sum u_n(x) = \sum \frac{n^r}{n!} x^n$ est absolument convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$. Comme la suite $(D_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée :

$$\boxed{\text{Les séries } \sum D_n u_{n-1}(x) \text{ et } \sum D_n u_n(x) \text{ sont absolument convergentes.}}$$

15.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $D_n = \dfrac{z^n - 1}{z-1}$ donc $|D_n| \leq \dfrac{|z^n|+1}{|z-1|} = \dfrac{2}{|z-1|}$.

• *On remarque ici que x n'est pas défini par l'énoncé, ce qui est la seule occurrence d'un tel défaut dans un énoncé généralement très rigoureux quant à la définition des objets considérés, on peut néanmoins considérer un réel quelconque.*

Pour tout réel x, la suite $(D_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant bornée, l'absolue convergence de $\sum u_n(x)$ (établie dès la question 1) assure celles de $\sum D_n u_{n-1}(x)$ et de $\sum D_n u_n(x)$.

15. Pour $z \in \mathbb{Z}$ tel que $|z| = 1$ et $z \neq 1$ on a $D_n = \frac{1-z^n}{1-z}$ et donc $|D_n| \leqslant \frac{1+|z^n|}{|1-z|} = \frac{2}{|1-z|}$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad |D_n u_n(x)| \leqslant \frac{2}{|1-z|} \frac{n^r}{n!} |x|^n$$

Or on a vu à la question 1, pour $p = 1$, que la série entière $\sum \frac{n^r}{n!} z^n$ est de rayon infini , donc la série majorante est convergente et, par majoration de séries à termes positifs, $\sum |D_n u_n(x)|$ converge.

De même $|D_n u_{n-1}(x)| \leqslant \frac{2}{|1-z|} \frac{(n-1)^r}{(n-1)!} |x|^{n-1}$ permet de conclure que $\sum |D_n u_{n-1}(x)|$ converge.

15. • Comme $z \neq 1$,

$$D_n = \sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1-z^n}{1-z},$$

donc $|D_n| = \dfrac{|1-z^n|}{|1-z|} \leq \dfrac{1+|z|^n}{|1-z|} = \dfrac{2}{|1-z|}$.

• Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|D_n u_{n-1}(x)| \leq \frac{2}{|1-z|} u_{n-1}(x) \quad \text{et} \quad |D_n u_n(x)| \leq \frac{2}{|1-z|} u_n(x).$$

Or $\sum_{n\geq 0} u_n(x)$ converge (d'après la question 1 avec $p = 1$), donc, par comparaison, les séries $\sum_n D_n u_{n-1}(x)$ et $\sum_n D_n u_n(x)$ sont absolument convergentes.

Question 16

Enoncé

16. On conserve le nombre complexe z introduit dans la question précédente. Montrer que

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*, \ \sum_{n=1}^{+\infty} D_n \left(u_{n-1}(x) - u_n(x)\right) = S_{r,1}(zx)$$

puis que, pour x voisin de $+\infty$,

$$|S_{r,1}(zx)| \leq \frac{4\,M_x}{|1-z|},$$

et conclure à la relation

$$S_{r,1}(zx) = o_{x\to+\infty}(x^r e^x).$$

Rapport de jury

Questions 16 et 17. Peu de réponses satisfaisantes à ces questions.

Corrigés

Comme les séries $\sum D_n u_{n-1}(x)$ et $\sum D_n u_n(x)$ sont absolument convergentes, donc convergentes, on peut écrire pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} D_n\left(u_{n-1}(x)-u_n(x)\right) &= \sum_{n=1}^{+\infty} D_n u_{n-1}(x) - \sum_{n=1}^{+\infty} D_n u_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} D_{n+1} u_n(x) - \sum_{n=1}^{+\infty} D_n u_n(x)\\
&= D_1 u_0(x) + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(D_{n+1}-D_n\right) u_n(x) = u_0(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} z^n u_n(x)\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} z^n u_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \frac{n^r}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^r}{n!}(zx)^n\end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} D_n\left(u_{n-1}(x)-u_n(x)\right) = S_{r,1}(zx)}$$

La série $\sum D_n\left(u_{n-1}(x)-u_n(x)\right)$ est absolument convergente, car $\sum D_n u_{n-1}(x)$ et $\sum D_n u_n(x)$ le sont et on a :

$$|S_{r,1}(zx)| = \left|\sum_{n=1}^{+\infty} D_n\left(u_{n-1}(x)-u_n(x)\right)\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty}\left|D_n\left(u_{n-1}(x)-u_n(x)\right)\right| = \sum_{n=1}^{+\infty}|D_n|\left|u_{n-1}(x)-u_n(x)\right|.$$

De même, la série $\sum\left(u_{n-1}(x)-u_n(x)\right)$ est absolument convergente, car $\sum u_n(x)$, et donc $\sum u_{n-1}(x)$, le sont, donc, avec la question précédente, on peut écrire :

$$\begin{aligned}|S_{r,1}(zx)| &\leq \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{|1-z|}\left|u_{n-1}(x)-u_n(x)\right| = \frac{2}{|1-z|}\sum_{n=1}^{+\infty}\left|u_{n-1}(x)-u_n(x)\right|\\
&\leq \frac{2}{|1-z|}\left(\sum_{n=1}^{N_x}\left|u_{n-1}(x)-u_n(x)\right| + \sum_{n=N_x+1}^{+\infty}\left|u_{n-1}(x)-u_n(x)\right|\right)\end{aligned}.$$

On a vu que la suite $\left(u_n(x)\right)_{n\geq N_x}$ est croissante jusqu'au rang N_x, puis décroissante, donc :

- pour $n\leq N_x$, $u_{n-1}(x)-u_n(x)\leq 0$ et $|u_{n-1}(x)-u_n(x)|=u_n(x)-u_{n-1}(x)$;
- pour $n>N_x$, $u_{n-1}(x)-u_n(x)\geq 0$ et $|u_{n-1}(x)-u_n(x)|=u_{n-1}(x)-u_n(x)$.

Alors :

$$|S_{r,1}(zx)|\leq\frac{2}{|1-z|}\left(\sum_{n=1}^{N_x}[u_n(x)-u_{n-1}(x)]+\sum_{n=N_x+1}^{+\infty}[u_{n-1}(x)-u_n(x)]\right).$$

Or :

$$\sum_{n=1}^{N_x}[u_n(x)-u_{n-1}(x)]+\sum_{n=N_x+1}^{+\infty}[u_{n-1}(x)-u_n(x)]=u_{N_x}(x)-u_0(x)+u_{N_x}(x)=2M_x-u_0(x)\leq 2M_x.$$

Et ainsi :

$$\boxed{|S_{r,1}(zx)|\leq\frac{4M_x}{|1-z|}}$$

On a établi dans la question 6 que $M_x=\underset{x\to+\infty}{o}\left(x^re^x\right)$.

L'inégalité ci-dessus donne alors immédiatement :

$$\boxed{S_{r,1}(zx)=\underset{x\to+\infty}{o}\left(x^re^x\right)}$$

16.

• Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$, en utilisant les convergences des séries considérées :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}D_n(u_{n-1}(x)-u_n(x))=\sum_{n=1}^{+\infty}D_nu_{n-1}(x)-\sum_{n=1}^{+\infty}D_nu_n(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}D_{n+1}u_n(x)-\sum_{n=1}^{+\infty}D_nu_n(x)$$

$$=D_1u_0(x)+\sum_{n=1}^{+\infty}(D_{n+1}-D_n)u_n(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}z^nu_n(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^r}{n!}(zx)^n=S_{r,1}(zx).$$

• On a donc $|S_{r,1}(x)|\leq\sum_{n=1}^{+\infty}|D_n|\,|u_{n-1}(x)-u_n(x)|\leq\frac{2}{|z-1|}\sum_{n=1}^{+\infty}|u_{n-1}(x)-u_n(x)|$.

Or pour $n\leq\lfloor t_x\rfloor$ on a $|u_{n-1}(x)-u_n(x)|=u_n(x)-u_{n-1}(x)$ et pour $n\geq\lfloor t_x\rfloor+1$ on a $|u_{n-1}(x)-u_n(x)|=u_{n-1}(x)-u_n(x)$, ce qui permet d'écrire que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}|u_{n-1}(x)-u_n(x)|=\sum_{n=1}^{\lfloor t_x\rfloor}(u_n(x)-u_{n-1}(x))+\sum_{n=\lfloor t_x\rfloor+1}^{+\infty}(u_{n-1}(x)-u_n(x))\,;$$

puis par « télescopages » : $\sum_{n=1}^{+\infty}|u_{n-1}(x)-u_n(x)|=2u_{\lfloor t_x\rfloor}(x)=2M_x$;

on en déduit enfin l'inégalité demandée : $|S_{r,1}(x)|\leq\frac{4M_x}{|z-1|}$.

• Le fait que $M_x=\underset{x\to+\infty}{o}(x^r\mathrm{e}^x)$ assure alors immédiatement que $S_{r,1}(x)=\underset{x\to+\infty}{o}(x^r\mathrm{e}^x)$.

16. • Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Pour $N \in \mathbb{N}^*$ on a (transformation d'Abel) en notant u_n pour $u_n(x)$:

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^{N} D_n(u_{n-1} - u_n) = \sum_{n=1}^{N} D_n u_{n-1} - \sum_{n=1}^{N} D_n u_n = \sum_{n=0}^{N-1} D_{n+1} u_n - \sum_{n=1}^{N} D_n u_n \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} (D_{n+1} - D_n) u_n + D_1 u_0 - D_N u_N = \sum_{n=1}^{N-1} z^n u_n + 0 - D_N \frac{N^r}{N!} x^N \end{aligned}$$

D'après la question **15** la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est convergente en tant que somme partielle d'une série (absolun convergente et de plus $\left|D_N \frac{N^r}{N!} x^N\right| \leqslant \frac{2}{|1-z|}\left|\frac{N^r}{N!} x^N\right| \longrightarrow 0$ (puisque la série correspondante converge). E passant à la limite quand $N \to +\infty$ on obtient (si $x \in \mathbb{R}$ et $|z| = 1$, $z \neq 1$) :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} D_n(u_{n-1}(x) - u_n(x)) = \sum_{n=1}^{+\infty} z^n u_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} z^n \frac{n^r}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^r}{n!} (zx)^n = S_{r,1}(zx)$$

• Comme les séries $\sum D_n u_n(x)$ et $\sum D_n u_{n-1}(x)$ sont absolument convergentes on peut appliquer l'inégalité triangulaire généralisée. Elle donne pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|S_{r,1}(zx)| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} |D_n| \, |u_{n-1}(x) - u_n(x)| \leqslant \frac{2}{|1-z|} \sum_{n=1}^{+\infty} |u_{n-1}(x) - u_n(x)|$$

On connaît le signe de $u_{n-1}(x) - u_n(x)$ grâce à la question **10** . Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} |S_{r,1}(zx)| &\leqslant \frac{2}{|1-z|} \left\{ \sum_{n=1}^{\lfloor t_x \rfloor} (u_n(x) - u_{n-1}(x)) + \sum_{n=\lfloor t_x \rfloor + 1}^{+\infty} (u_{n-1}(x) - u_n(x)) \right\} \\ &\leqslant \frac{2}{|1-z|} \left\{ \left(u_{\lfloor t_x \rfloor}(x) - \underbrace{u_0(x)}_{0} \right) + \left(u_{\lfloor t_x \rfloor}(x) - 0 \right) \right\} = \frac{4u_{\lfloor t_x \rfloor}(x)}{|1-z|} \leqslant \frac{4M_x}{|1-z|} \end{aligned}$$

Comme on a vu en question **14** que $M_x = o_{x\to+\infty}(x^r e^x)$ il vient, par cette majoration, que

$$|S_{r,1}(zx)| = o_{x\to+\infty}(x^r e^x)$$

16. • Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} D_n(u_{n-1}(x)-u_n(x)) &= \sum_{n=1}^{+\infty} D_n u_{n-1}(x) - \sum_{n=1}^{+\infty} D_n u_n(x) \quad \text{(ces deux séries convergent)}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} D_{n+1} u_n(x) - \sum_{n=1}^{+\infty} D_n u_n(x)\\ &= D_1 u_0(x) + \sum_{n=1}^{+\infty}(D_{n+1}-D_n)u_n(x) = 1 \times \frac{0^r}{0!}x^0 + \sum_{n=1}^{+\infty} z^n \frac{n^r}{n!}x^n\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^r}{n!}(zx)^n = S_{r,1}(zx).\end{aligned}$$

• Comme $\sum_{n\geq 1} D_n u_n(x)$ et $\sum_{n\geq 1} D_n u_{n-1}(x)$ sont absolument convergentes, on a, d'après l'inégalité triangulaire généralisée :

$$|S_{r,1}(zx)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |D_n|\,|u_{n-1}(x)-u_n(x)| \leq \frac{2}{|1-z|}\sum_{n=1}^{+\infty}|u_{n-1}(x)-u_n(x)|.$$

Par suite, en utilisant les variations de la suite $(u_n(x))$ obtenues à la question 10, on a :

$$\begin{aligned}|S_{r,1}(zx)| &\leq \frac{2}{|1-z|}\left(\sum_{n=1}^{\lfloor t_x\rfloor} u_n(x)-u_{n-1}(x) + \sum_{n=\lfloor t_x\rfloor+1}^{+\infty} u_{n-1}(x)-u_n(x)\right)\\ &= \frac{2}{|1-z|}\left(u_{\lfloor t_x\rfloor}(x) - u_0(x) + u_{\lfloor t_x\rfloor}(x) - \underbrace{\lim_{n\to+\infty} u_n(x)}_{=0}\right) \qquad = \frac{4M_x}{|1-z|}\end{aligned}$$

Enfin, comme, d'après la question 14, $M_x = \underset{x\to+\infty}{o}(x^r e^x)$, on a $\dfrac{4M_x}{|1-z|} = \underset{x\to+\infty}{o}(x^r e^x)$, donc, par majoration,

$$S_{r,1}(zx) = \underset{x\to+\infty}{o}(x^r e^x).$$

Question 17

Enoncé

17. On pose $\xi := \exp\left(\frac{2i\pi}{p}\right)$. Pour tout réel x, montrer que

$$\sum_{k=0}^{p-1} S_{r,1}(\xi^k x) = p\, S_{r,p}(x)$$

et en déduire la validité de $H_{r,p}$.

Rapport de jury

Questions 16 et 17. Peu de réponses satisfaisantes à ces questions.

Corrigés

Pour tout réel x, on a :

$$\sum_{k=0}^{p-1} S_{r,1}(\omega^k x) = \sum_{k=0}^{p-1}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^r}{n!}(\omega^k x)^n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{p-1}\frac{n^r}{n!}(\omega^k x)^n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n^r}{n!}x^n\sum_{k=0}^{p-1}(\omega^n)^k\right).$$

Comme $\omega = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{p}\right)$, $\omega^n = 1$ si et seulement si p divise n et dans ce cas, $\sum_{k=0}^{p-1}(\omega^n)^k = \sum_{k=0}^{p-1} 1 = p$.

Dans tous les autres cas, on a $\omega^n \neq 1$ et :

$$\sum_{k=0}^{p-1}(\omega^n)^k = \frac{1-(\omega^n)^p}{1-\omega^n} = \frac{1-(e^{2i\pi})^n}{1-\omega^n} = 0.$$

Ainsi :

$$\sum_{k=0}^{p-1} S_{r,1}(\omega^k x) = \sum_{\substack{n=1\\ p\mid n}}^{+\infty}\frac{n^r}{n!}x^n p = p\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(pn)^r}{(pn)!}x^{pn} = p\, S_{r,p}(x).$$

On a donc bien pour tout réel x :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{p-1} S_{r,1}(\omega^k x) = p\, S_{r,p}(x)}$$

On a :

$$\sum_{k=0}^{p-1} S_{r,1}(\omega^k x) = S_{r,1}(x) + \sum_{k=1}^{p-1} S_{r,1}(\omega^k x).$$

Et, pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, $\left|\omega^k\right| = 1$ et $\omega^k \neq 1$, donc $S_{r,1}(\omega^k x) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(x^r e^x\right)$ d'après la question précédente. Alors :

$$\sum_{k=1}^{p-1} S_{r,1}(\omega^k x) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(x^r e^x\right).$$

De plus, on a admis la propriété désirée pour $p = 1$, soit $S_{r,1}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^r e^x$ ou bien :

$$S_{r,1}(x) = x^r e^x + \underset{x\to+\infty}{o}\left(x^r e^x\right).$$

Ainsi :

$$p\, S_{r,p}(x) = \sum_{k=0}^{p-1} S_{r,1}(\omega^k x) = S_{r,1}(x) + \sum_{k=1}^{p-1} S_{r,1}(\omega^k x) = x^r e^x + \underset{x\to+\infty}{o}\left(x^r e^x\right).$$

Soit $p\,S_{r,p}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^r e^x$ et donc, on a bien le résultat désiré pour $p \geq 2$:

$$\boxed{S_{r,p}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{p} x^r e^x}$$

17.

• On remarque que ξ est une racine p–ième de l'unité.

Pour tout réel x, en utilisant les convergences des p séries considérées on a :
$$\sum_{k=0}^{p-1} S_{r,1}(\xi^k x) = \sum_{k=0}^{p-1}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^r}{n!}\xi^{nk}x^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n^r}{n!}x^n \sum_{k=0}^{p-1}(\xi^n)^k\right).$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}(\xi^n)^k = \left\{\begin{array}{c} p \text{ si } n \equiv 0[p] \\ 0 \text{ sinon}\end{array}\right.$, à l'aide du changement d'indice « $n = qp$ » on a alors : $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} S_{r,1}(\xi^k x) = \sum_{q=1}^{+\infty}\frac{(qp)^r}{(qp)!}x^{qp}p = pS_{r,p}(x)$.

• On a $S_{r,p}(x) = \dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} S_{r,1}(\xi^k x)$.

Pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, $|\xi^k| = 1$ et $\xi^k \neq 1$ donc d'après la question 16, $S_{r,1}(\xi^k x) = \underset{x\to+\infty}{o}(x^r \mathrm{e}^x)$, ce qui assure $S_{r,p}(x) = \dfrac{1}{p}(S_{r,1}(x) + \underset{x\to+\infty}{o}(x^r\mathrm{e}^x))$ où $S_{r,1}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^r\mathrm{e}^x$.

On a donc $S_{r,p}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{p}x^r\mathrm{e}^x$ ce qui assure la validité de $H_{r,p}$.

17. • Soit alors $p \geqslant 2$ et $\xi = e^{\frac{2i\pi}{p}}$. On a pour tout réel x :
$$\sum_{k=0}^{p-1} S_{r,1}\left(\xi^k x\right) = \sum_{k=0}^{p-1}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^r}{n!}\left(\xi^k x\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^r}{n!}x^n\sum_{k=0}^{p-1}(\xi^n)^k$$

Or si n est multiple de p on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}(\xi^n)^k = p$ et sinon $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}(\xi^n)^k = \frac{1-(\xi^n)^p}{1-\xi^n} = 0$. Il ne reste donc dans la somme que les indices multiples de p , les pj, $j \in \mathbb{N}^*$ et donc :
$$\sum_{k=0}^{p-1} S_{r,1}\left(\xi^k x\right) = \sum_{j=1}^{+\infty}\frac{(pj)^r}{(pj)!}x^{pj}\times p = pS_{r,p}(x)$$

• Faisons alors le quotient par $x^r e^x$, en isolant le terme pour $k = 0$:
$$px^{-r}e^{-x}\ S_{r,p}(x) = x^{-r}e^{-x}S_{r,1}(x) + \sum_{k=1}^{p-1}x^{-r}e^{-x}S_{r,1}\left(\xi^k x\right)$$

Or pour $k \in \{1, \cdots, p-1\}$ le nombre complexe $z = \xi^k$ est de module 1 et différent de 1 donc la question **16** donne $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{-r}e^{-x}S_{r,1}\left(\xi^k x\right) = 0$ et la propriété $\mathcal{H}_{r,1}$ (prouvée en **9**) donne $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{-r}e^{-x}S_{r,1}(x) = 1$.
Finalement, puisque le nombre de termes de la somme est constant : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} px^{-r}e^{-x}\ S_{r,p}(x) = 1$. CQFD.

17. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{k=0}^{p-1} S_{r,1}(\xi^k x) = \sum_{k=0}^{p-1}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^r}{n!}(\xi^k x)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^r}{n!} x^n \left(\sum_{k=0}^{p-1} \xi^{nk}\right)$$

Or, $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} (\xi^n)^k = \begin{cases} p & \text{si } \xi^n = 1 \Leftrightarrow p|n \\ \dfrac{1-\xi^{np}}{1-\xi^n} & \text{si } \xi^n \neq 1 \end{cases} = \begin{cases} p & \text{si } p|n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{p-1} S_{r,1}(\xi^k x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^r}{n!} x^n \left(\sum_{k=0}^{p-1} \xi^{nk}\right) \\ &= \sum_{\substack{n=1 \\ p|n}}^{+\infty} \frac{n^r}{n!} x^n \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{p-1} \xi^{nk}\right)}_{=p} + \sum_{\substack{n=1 \\ p\nmid n}}^{+\infty} \frac{n^r}{n!} x^n \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{p-1} \xi^{nk}\right)}_{=0} \\ &= p\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(pk)^r}{(pk)!} x^{pk} = pS_{r,p}(x).\end{aligned}$$

• Enfin, comme $H_{r,1}$ est valide, on a $S_{r,1}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^r e^x$, et, pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, $|\xi^k| = 1$ et $\xi^k \neq 1$, donc, d'après la question 16, $S_{r,1}(\xi^k x) = \underset{x\to+\infty}{o}(x^r e^x)$, donc

$$\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p-1} S_{r,1}(\xi^k x) = \underset{x\to+\infty}{o}(x^r e^x) \quad \text{(car la somme est finie avec } p \text{ fixé).}$$

On a donc

$$\begin{aligned} S_{r,p}(x) &= \frac{1}{p} S_{r,1}(x) + \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p-1} S_{r,1}(\xi^k x) \\ &\underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{p} x^r e^x. \end{aligned}$$

Question 18

Enoncé

18. Montrer que, parmi les solutions de (E) sur $\mathbf{R}$ à valeurs réelles, il en existe une et une seule, notée f, qui soit la somme d'une série entière et vérifie $f'(0) = 1$. Expliciter la suite $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que

$$\forall t \in \mathbf{R},\ f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n\, t^n.$$

Rapport de jury

Question 18. La majorité des candidats aborde cette question. La suite (c_n) n'est pas toujours explicitée. Le rayon de convergence de la série entière est rarement étudié.

Corrigés

Soit $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n$ une éventuelle solution de (E), développable en série entière sur $]-R,R[$ avec $R>0$.

On a alors pour tout $t\in\,]-R,R[$, $f''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)c_n t^{n-2}$, et :

$$\begin{aligned} t f''(t) - f(t) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)c_n t^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)\,c_n t^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)n\,c_{n+1} t^n - \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(n+1)n\,c_{n+1} - c_n\right] t^n \end{aligned}$$

Comme f est solution de (E), on a $t f''(t) - f(t) = 0$ pour tout $t\in\,]-R,R[$ et, par unicité du développement en série entière, on obtient pour tout $n\in\mathbb{N}$, $(n+1)n\,c_{n+1} - c_n = 0$, soit $c_0 = 0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$c_{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} c_n .$$

Remarquons que si $c_n \neq 0$, alors $c_{n+1} \neq 0$, donc avec l'hypothèse supplémentaire $f'(0)=1$, soit $c_1 = 1 \neq 0$, on a $c_n \neq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et on peut écrire pour tout entier $n \geq 2$:

$$c_n = \frac{c_n}{c_1} = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{c_{k+1}}{c_k} = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} = \left(\prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\right)\left(\prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{(n-1)!\,n!}.$$

L'expression ci-dessus reste vraie pour $n=1$ et ainsi, $f : t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{(n-1)!\,n!}$.

Remarquons que $\frac{1}{(n-1)!\,n!} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n!}\right)$ et $\sum \frac{t^n}{n!}$ converge pour tout réel t, donc le rayon de convergence de de la série entière $\sum \frac{t^n}{(n-1)!\,n!}$ est infini.

Finalement :

> L'équation (E) admet une unique solution développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et telle que $f'(0)=1$; c'est la fonction :
>
> $$f : t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{(n-1)!\,n!}.$$

18.

Soit $\sum c_n x^n$ une série entière de rayon de convergence non nul R et de somme f, cette fonction f est solution de (E) sur $]-R,R[$ si, et seulement si :

$\forall x \in]-R,R[, \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)c_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = 0.$

Par un changement d'indice dans la première somme cette condition équivaut à :

$\forall x \in]-R,R[, \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+1)nc_{n+1} - c_n)x^n = 0$

Par unicité du développement en série entière, cette condition équivaut à :

$\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)nc_{n+1} - c_n = 0$

i.e. à $c_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, c_{n+1} = \dfrac{c_n}{n(n+1)}$

et enfin à $c_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, c_n = \dfrac{n}{n!^2} c_1$.

On remarque que la série entière obtenue admet $+\infty$ pour rayon de convergence et que $f'(0) = c_1$, l'unique solution f de (E) développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et telle que $f'(0) = 1$ est donc la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n}{n!^2} x^n$.

---

18. *Analyse* : Supposons que f existe telle que dans l'énoncé et écrivons

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n$$

On a $c_1 = f(0) = 1$ et l'équation différentielle (E) vérifiée par f donne $c_0 = f(0) = 0$. De plus, d'après le cours sur les séries entières, on peut dériver 2 fois terme à terme $f(t)$ et (E) donne alors :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad t\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)c_n t^{n-2} - \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n = 0$$

ce qui donne après arrangements (sachant que $c_0 = 0$) :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} [n(n+1)c_{n+1} - c_n]\, t^n = 0$$

Par unicité du développement en série entière de la fonction nulle il vient

$$c_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad c_{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} c_n$$

et, sachant que $c_1 = 1$, on prouve par récurrence sur $\mathbb{N}$ que : $\boxed{\forall n \geqslant 1 \quad c_n = \frac{1}{n!(n-1)!}}$

Synthèse : La série entière $\sum_{n \geqslant 1} \frac{x^n}{n!(n-1)!}$ a bien un rayon de convergence infini (aisé ...), sa somme f vérifie (E) (en repensant les calculs, puisque les coefficients ont été choisis pour annuler $n(n+1)c_{n+1} - c_n$) et de plus $f'(0) = c_1 = 1$.

18. **Analyse :** Supposons qu'il existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ développable en série entière sous la forme $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n$ qui soit solution de (E) sur $\mathbb{R}$ et qui vérifie $f'(0) = 1 \Leftrightarrow c_1 = 1$.
Alors, comme f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n c_n t^{n-1} \quad \text{et} \quad f''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) c_n t^{n-2},$$

donc

$$\begin{aligned} tf''(t) - f(t) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)c_n t^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)n c_{n+1} t^n - c_0 - \sum_{n=1}^{+\infty} c_n t^n \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} ((n+1)n c_{n+1} - c_n) t^n \end{aligned}$$

Comme 0 est son propre déveoppement en série entière (de rayon de convergence $+\infty$), on a, par unicité du développement en série entière,

$$\begin{aligned} f \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \quad tf''(t) - f(t) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \quad c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} ((n+1)n c_{n+1} - c_n) t^n = 0 \\ &\Leftrightarrow c_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1, (n+1)n c_{n+1} - c_n = 0 \\ &\Leftrightarrow c_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1, c_{n+1} = \frac{c_n}{n(n+1)} \end{aligned}$$

Comme on a de plus $c_1 = 1$, on montre par récurrence immédiate que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n = \frac{1}{n!(n-1)!} = \frac{n}{(n!)^2}$.

D'où, si f existe, alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n!)^2} t^n$.

Synthèse : Réciproquement, soit $f : t \mapsto \frac{n}{(n!)^2} t^n$. Alors

– pour tout $n \geq 1$, $0 \leq \frac{n}{(n!)^2} = \frac{1}{n!(n-1)!} \leq \frac{1}{n!}$.
Or $\sum_{n\geq 1} \frac{t^n}{n!}$ a pour rayon de convergence $+\infty$, donc, par comparaison, $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{(n!)^2} t^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$.
– f est alors solution de (E) sur $\mathbb{R}$ d'après les calculs faits dans l'analyse
– $f'(0) = 1$.

Conclusion : D'où, par analyse-synthèse, il existe une unique fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ développable en série entière qui soit solution de (E) sur $\mathbb{R}$ et qui vérifie $f'(0) = 1 \Leftrightarrow c_1 = 1$:

$$f : t \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n!)^2} t^n.$$

Question 19

Enoncé

19. Démontrer que

$$c_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{n}}{(2n)!} 4^n.$$

Rapport de jury

Question 19. La formule de Stirling est souvent citée et parfois utilisée à bon escient.

Corrigés

La formule de Stirling donne $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$, donc $(n-1)! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi(n-1)}\left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1}$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1} = \left(\frac{n-1}{e}\right)^n \frac{e}{n-1} = \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \frac{e}{n-1} = \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{1+n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)} \frac{1}{n-1}$$

Comme $1+n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on obtient :

$$\left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{1}{n}.$$

Alors, $(n-1)! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{1}{n}$ et :

$$c_n = \frac{1}{(n-1)!n!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{1}{n}\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{e}{n}\right)^{2n}.$$

Par ailleurs :

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{n}}{(2n)!}4^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi(2n)}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}} 4^n = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{e}{n}\right)^{2n}.$$

Donc par transitivité de $\underset{n\to+\infty}{\sim}$, on obtient bien :

$$\boxed{c_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{n}}{(2n)!} 4^n}$$

19.

On applique la formule de Stirling pour chacune des expressions :

— $c_n = \dfrac{n}{n!^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{2\pi n \dfrac{n^{2n}}{e^{2n}}} = \dfrac{1}{2\pi} \dfrac{e^{2n}}{n^{2n}}$;

— $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \dfrac{\sqrt{n}}{(2n)!} 4^n \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{4\pi n}\dfrac{(2n)^{2n}}{e^{2n}}} 4^n = \dfrac{1}{2\pi} \dfrac{e^{2n}}{n^{2n}}$;

on a bien l'équivalence souhaitée : $c_n \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \dfrac{\sqrt{n}}{(2n)!} 4^n$.

19. **Utilisons la formule de Stirling $n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$:**

$$(2n)!\ c_n = \frac{n\,(2n)!}{[n!]^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}\, e^{-2n}}{\left(n^{n+\frac{1}{2}}\, e^{-n}\right)^2} = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{2^{2n+\frac{1}{2}}\ n^{2n+\frac{1}{2}}}{n^{2n+1}} = \frac{4^n\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}$$

CQFD.

19. En utilisant l'équivalent de Stirling, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{c_n}{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{n}}{(2n)!}4^n} &= \frac{n\sqrt{\pi}(2n)!}{(n!)^2\sqrt{n}4^n} \\ &\sim \sqrt{\pi}\frac{n\sqrt{2\pi(2n)}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^2\sqrt{n}4^n} \\ &= \frac{n^{3/2}\sqrt{4\pi^2}2^{2n}n^{2n}e^{2n}}{2\pi n^{3/2}n^{2n}e^{2n}4^n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1,\end{aligned}$$

donc on a bien $c_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{n}}{(2n)!}4^n$.

Question 20

Enoncé

20. En exploitant la validité de $H_{r,p}$ pour un couple (r,p) bien choisi, démontrer l'équivalent

$$f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{t^{1/4}}{2\sqrt{\pi}}\, e^{2\sqrt{t}}.$$

Rapport de jury

Question 20. Quelques bonnes réponses à cette ultime question.

Corrigés

D'après ce qui précède, on a, avec $c_n = \dfrac{1}{(n-1)!\,n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

(i) La série entière $\sum c_n z^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$.

(ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n > 0$.

(iii) $c_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \dfrac{\sqrt{n}}{(2n)!} 4^n$.

Alors, d'après le résultat admis, la série entière $\sum \left(\dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \dfrac{\sqrt{n}}{(2n)!} 4^n \right) z^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$ et :

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n t^n \underset{t\to+\infty}{\sim} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{n}}{(2n)!} 4^n \right) t^n .$$

Or, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{n}}{(2n)!} 4^n \right) t^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{2n}}{(2n)!} \left(2\sqrt{t}\right)^{2n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)^{1/2}}{(2n)!} \left(2\sqrt{t}\right)^{2n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} S_{1/2,2}\left(2\sqrt{t}\right).$$

D'après la partie précédente, on a $S_{r,p}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{p} x^r e^x$ pour tout entier naturel $p \geq 2$ et tout réel $r > 0$, donc pour $p = 2$ et $r = \dfrac{1}{2}$, on peut écrire :

$$S_{1/2,2}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2} x^{1/2} e^x .$$

Et quand $t \to +\infty$, $2\sqrt{t} \to +\infty$, donc :

$$S_{1/2,2}\left(2\sqrt{t}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\left(2\sqrt{t}\right)^{1/2} e^{2\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{2}} t^{1/4} e^{2\sqrt{t}} .$$

Et comme $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} S_{1/2,2}\left(2\sqrt{t}\right)$, on obtient bien :

$$\boxed{f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} t^{1/4} e^{2\sqrt{t}}}$$

20.
Les conditions d'application du lemme admis étant satisfaites on a (pour $t>0$) :
$f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{n}}{(2n)!}4^n t^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)^{1/2}}{(2n)!}(2\sqrt{t})^{2n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}S_{1/2,2}(2\sqrt{t})$;
or $S_{1/2,2}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{x}\mathrm{e}^x$ donc $S_{1/2,2}(2\sqrt{t}) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}}t^{1/4}\mathrm{e}^{2\sqrt{t}}$;
on a enfin : $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{t^{1/4}}{2\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{2\sqrt{t}}$.

---

20. **Les hypothèse du lemme étant présentes on a, en notant $b_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{n}}{(2n)!}4^n$:**

$$f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n$$

Or pour $t \in \mathbb{R}_+$:

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)^{\frac{1}{2}}}{(2n)!}4^n t^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)^{\frac{1}{2}}}{(2n)!}\left(2\sqrt{t}\right)^{2n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}S_{\frac{1}{2},2}\left(2\sqrt{t}\right)$$

et, puisque $\lim_{t\to+\infty} 2\sqrt{t} = +\infty$, la propriété $\mathcal{H}_{\frac{1}{2},2}$ donne enfin par compostion :

$$f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} g(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{1}{2}\left(2\sqrt{t}\right)^{\frac{1}{2}} e^{2\sqrt{t}} = \frac{t^{\frac{1}{4}}}{2\sqrt{\pi}}e^{2\sqrt{t}}$$

---

20. Comme
(i) $\sum_{n\geq 1} c_n z^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$ (question 18),
(ii) $c_n > 0$ pour tout $n \geq 1$,
(iii) $c_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{n}}{(2n)!}4^n$ (d'après la question 19),
d'après le lemme de comparaison asymptotique des séries entières, on a

$$\begin{aligned} f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n t^n &\underset{t\to+\infty}{\sim} \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sqrt{2n}}{(2n)!}4^n t^n \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n^{1/2}}{(2n)!}(2\sqrt{t})^{2n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}S_{1/2,2}(2\sqrt{t}) \\ &\underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{2}(2\sqrt{t})^{1/2}e^{2\sqrt{t}} = \frac{t^{1/4}}{2\sqrt{\pi}}e^{2\sqrt{t}}. \end{aligned}$$