Préparation aux oraux : Corrigés des planches CCINP

Série 1

Planche n° 1

Exercice I

On a :

$$u_1 + u_2 = \frac{a_1}{1+a_1} + \frac{a_2}{(1+a_1)(1+a_2)} = \frac{a_1(1+a_2) + a_2}{(1+a_1)(1+a_2)} = \frac{a_1 + a_1a_2 + a_2}{(1+a_1)(1+a_2)}.$$

Comme $(1+a_1)(1+a_2) = 1 + a_1 + a_1a_2 + a_2$, on obtient :

$$u_1 + u_2 = 1 - \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)}$$

On a aussi $u_1 = \frac{a_1}{1+a_1} = 1 - \frac{1}{1+a_1}$ et :

$$u_1 + u_2 + u_3 = 1 - \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)} + \frac{a_3}{(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)} = 1 - \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)}.$$

Supposons qu'à un rang $n \in \mathbb{N}^*$, $u_1 + u_2 + \dots + u_n = 1 - \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)}$, alors :

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + \dots + u_n + u_{n+1} &= 1 - \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)} + \frac{a_{n+1}}{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)(1+a_{n+1})} \\ &= 1 - \frac{1+a_{n+1}}{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)(1+a_{n+1})} + \frac{a_{n+1}}{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)(1+a_{n+1})} \\ &= 1 - \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)(1+a_{n+1})} \end{aligned}$$

Ainsi, la relation est vraie au rang $n+1$.

Ceci prouve par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = 1 - \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)}$$

Posons $v_n = \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)}$.

Comme $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est positive, on a $1+a_n \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc $v_n > 0$ et :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{1+a_{n+1}} \leq 1.$$

Ainsi, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée, donc converge. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^n u_k = 1 - v_n.$$

Donc, la suite $\left(\sum_{k=1}^n u_k\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge, autrement dit :

La série $\sum u_n$ converge.

On prend pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Alors,

$$\ln[(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)] = \sum_{k=1}^n \ln(1+a_k) = \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}}\right).$$

Or, $\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{k}}$ et la série $\sum \frac{1}{\sqrt{k}}$ diverge. Alors, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}}\right) = +\infty$, donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} [(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)] = +\infty.$$

Et ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n u_k\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - v_n) = 1$, soit :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1$$

Exercice II

On a $E = C([0,1], \mathbb{R})$ et $\Phi : (f, g) \mapsto \langle f, g \rangle = \int_0^1 t^2 f(t)g(t) dt$.

Pour $(f, g) \in E^2$, $t \mapsto t^2 f(t)g(t)$ est continue sur $[0,1]$ comme produit de telles fonctions, donc $\langle f, g \rangle$ existe bien.

- Φ est clairement symétrique et bilinéaire du fait de la linéarité de l'intégrale.

- De plus, pour tout $f \in E$, on a $\Phi(f) = \int_0^1 t^2 f(t)^2 dt = \int_0^1 (t f(t))^2 dt$.

Or, $(t f(t))^2 \geq 0$ pour tout $t \in [0,1]$, donc par positivité de l'intégrale, on a $\Phi(f) \geq 0$ et Φ est positive.

- Enfin, pour tout $f \in E$, $t \mapsto (t f(t))^2$ est continue et positivité sur $[0,1]$, donc :

$$\begin{aligned} \Phi(f) = \int_0^1 (t f(t))^2 dt &\Leftrightarrow (t f(t))^2 = 0 \text{ pour tout } t \in [0,1] \\ &\Leftrightarrow f(t) = 0 \text{ pour tout } t \in]0,1] \\ &\Leftrightarrow f = 0 \text{ par continuité en } 0. \end{aligned}$$

Ainsi, Φ est définie.

Finalemment :

$$(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle = \int_0^1 t^2 f(t) g(t) dt \text{ est un produit scalaire sur } E.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto x^n \ln x$ est de classe C^1 sur $]0, 1]$ en tant que produit de telles fonctions et l'intégrale $I_n = \int_0^1 x^n \ln x dx$ est impropre en 0.

Or, $I_0 = \int_0^1 \ln x dx$ converge (c'est du cours) avec $I_0 = [x \ln x - x]_0^1 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$\lim_{x \rightarrow 0} x^n \ln x = 0$, donc $x \mapsto x^n \ln x$ se prolonge par continuité en 0 et $I_n = \int_0^1 x^n \ln x dx$ converge.

Ainsi, I_n est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

De plus, la dérivée de $h : x \mapsto x^{n+1} \ln x$ est $h' : x \mapsto (n+1)x^n \ln x + x^n$, donc pour tout $a \in]0, 1]$:

$$\begin{aligned} \int_a^1 h'(x) dx &= [h(x)]_a^1 = [x^{n+1} \ln x]_a^1 = -a^{n+1} \ln a \\ &= \int_a^1 [(n+1)x^n \ln x + x^n] dx = (n+1) \int_a^1 x^n \ln x dx + \left[\frac{1-a^{n+1}}{n+1} \right] \end{aligned}$$

En faisant tendre a vers 0, on obtient $(n+1)I_n + \frac{1}{n+1} = 0$, soit pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^1 x^n \ln x dx = -\frac{1}{(n+1)^2}$$

Notons $f_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} ; x \mapsto x^k$ pour $k=0$ ou 1 , F le sous-espace des fonctions affines de E , soit $F = \text{Vect}(f_0, f_1)$ (de dimension 2) et $h = af_0 + bf_1$ le projeté orthogonal $g : x \mapsto x \ln x$ sur F , avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a $g - h \in F^\perp$, soit :

$$\begin{cases} \langle f_0, g - h \rangle = 0 \\ \langle f_1, g - h \rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \langle f_0, h \rangle = \langle f_0, g \rangle \\ \langle f_1, h \rangle = \langle f_1, g \rangle \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \langle f_0, af_0 + bf_1 \rangle = a \langle f_0, f_0 \rangle + b \langle f_0, f_1 \rangle = \langle f_0, g \rangle \\ \langle f_1, af_0 + bf_1 \rangle = a \langle f_1, f_0 \rangle + b \langle f_1, f_1 \rangle = \langle f_1, g \rangle \end{cases}$$

Et :

$$\begin{aligned} \langle f_0, f_0 \rangle &= \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3} & \langle f_0, g \rangle &= \int_0^1 t^3 \ln t dt = -\frac{1}{16} \\ \langle f_0, f_1 \rangle &= \int_0^1 t^3 dt = \frac{1}{4} & \langle f_1, g \rangle &= \int_0^1 t^4 \ln t dt = -\frac{1}{25} \\ \langle f_1, f_1 \rangle &= \int_0^1 t^4 dt = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{cases} \frac{1}{3}a + \frac{1}{4}b = -\frac{1}{16} \\ \frac{1}{4}a + \frac{1}{5}b = -\frac{1}{25} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{5} \\ b = \frac{11}{20} \end{cases}$$

Ainsi :

$$\text{Le projeté orthogonal } x \mapsto x \ln x \text{ sur le sous-espace des fonctions affines de } E \text{ est } x \mapsto \frac{11}{20}x - \frac{3}{5}.$$

Avec les notations précédentes, on a :

$$\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (at + b - t \ln t)^2 t^2 dt = \inf_{f \in F} \|f - g\|^2 = d(g, F)^2 = \|h - g\|^2.$$

Soit :

$$\begin{aligned} \|h - g\|^2 &= \int_0^1 t^2 (h(t) - g(t))^2 dt = \int_0^1 t^2 \left(\frac{11}{20}t - \frac{3}{5} - t \ln t \right)^2 dt \\ &= \int_0^1 t^2 \left(\left(\frac{11}{20} \right)^2 t^2 + \left(\frac{3}{5} \right)^2 + t^2 (\ln t)^2 - 2 \frac{11}{20} \frac{3}{5} t - 2 \frac{11}{20} t^2 \ln t + 2 \frac{3}{5} t \ln t \right) dt \\ &= \int_0^1 \left(\left(\frac{11}{20} \right)^2 t^4 + \left(\frac{3}{5} \right)^2 t^2 + t^4 (\ln t)^2 - \frac{33}{50} t^3 - \frac{11}{10} t^4 \ln t + \frac{6}{5} t^3 \ln t \right) dt \\ &= \left(\frac{11}{20} \right)^2 \int_0^1 t^4 dt + \left(\frac{3}{5} \right)^2 \int_0^1 t^2 dt + \int_0^1 t^4 (\ln t)^2 dt - \frac{33}{50} \int_0^1 t^3 dt - \frac{11}{10} \int_0^1 t^4 \ln t dt + \frac{6}{5} \int_0^1 t^3 \ln t dt \end{aligned}$$

Une intégration par parties (à rédiger !) donne $\int_0^1 t^4 (\ln t)^2 dt = -\frac{2}{5} \int_0^1 t^4 \ln t dt = \frac{2}{125}$ et donc :

$$\|h - g\|^2 = \left(\frac{11}{20} \right)^2 \frac{1}{5} + \left(\frac{3}{5} \right)^2 \frac{1}{3} + \frac{2}{125} - \frac{33}{50} \frac{1}{4} + \frac{11}{10} \frac{1}{25} - \frac{6}{5} \frac{1}{16}.$$

Soit finalement :

$$\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (at + b - t \ln t)^2 t^2 dt = \frac{1}{2000}$$

Planche n° 2

Exercice I

Comme $x^2 + y^2 = 0$ si et seulement si $(x, y) = (0, 0)$, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, car elle est rationnelle sur cet ensemble.

De plus, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$:

$$|f(x, y)| = \left| \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{x^2 |x| + y^2 |y|}{x^2 + y^2} = \frac{x^2}{x^2 + y^2} |x| + \frac{y^2}{x^2 + y^2} |y| \leq |x| + |y|.$$

Comme $|x| + |y| \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$, on a $f(x, y) \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0 = f(0, 0)$, donc f est continue en $(0, 0)$.

Ainsi :

f est continue sur $\mathbb{R}^2$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

De plus, $t \mapsto f(t,0) = t$ et $t \mapsto f(0,t) = -t$ sont dérivables en 0, donc :

$\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent en $(0,0)$ et valent $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -1$.

On a, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x^4 + 3x^2y^2 + 2xy^3}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{y^4 + 3x^2y^2 + 2x^3y}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Et :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 1 \neq \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = 0 \neq \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = -1 \end{cases}$$

Donc :

f n'est pas de classe C^1 en $(0,0)$.

Exercice II

On a $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si on note $\mathcal{B}_c = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, $e = e_1 + 2e_2 + \dots + ne_n$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A . On a $f(e_1) = e$ et pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $f(e_i) = ie_1$.

Alors :

$$\text{Im } A = \text{Im } f = \text{Vect}(e, 2e_1, \dots, ne_1) = \text{Vect}(e, e_1).$$

Comme $n \geq 3$, e et e_1 ne sont pas colinéaires, donc :

$$\text{rg}(A) = 2$$

D'après le théorème du rang, $\dim(\ker A) = n - \text{rg}(A) = n - 2$.

Or, pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $f(e_i) = ie_1$, donc :

$$f(2e_i - ie_2) = 2f(e_i) - if(e_2) = 0.$$

Or, la famille $(2e_3 - 3e_2, \dots, 2e_n - ne_2)$ est libre et contient $n-2$ vecteurs, donc :

$$\ker A = \text{Vect}(2e_3 - 3e_2, \dots, 2e_n - ne_2)$$

La matrice A est symétrique réelle, donc, d'après le théorème spectral :

A est diagonalisable.

On a vu que 0 est valeur propre de A , avec $\dim(\ker A) = n-2$ et $\text{Im } A = \text{Vect}(e, e_1)$.

Or, $f(e_1) = e$ et :

$$f(e) = f(e_1 + 2e_2 + \dots + ne_n) = f(e_1) + 2f(e_2) + \dots + nf(e_n) = e + 4e_1 + \dots + n^2e_1 = e + (4 + \dots + n^2)e_1.$$

Donc :

$$f(\text{Im } A) = \text{Vect}(f(e), f(e_1)) = \text{Vect}(e + (4 + \dots + n^2)e_1, e) = \text{Vect}(e, e_1) = \text{Im } A.$$

Ceci prouve que l'endomorphisme induit par f sur $\text{Im } A$ (qui est stable par f) est un isomorphisme, donc que $\text{Im } A \cap \ker A = \{0\}$, et ainsi $\mathcal{B} = (e, e_1, 2e_3 - 3e_2, \dots, 2e_n - ne_2)$ est une base de $\mathbb{R}^n$. Alors :

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ s_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ donc } \chi_A = \chi_f = \begin{vmatrix} X-1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -s_n & X & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & X & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & X \end{vmatrix} = (X^2 - X - s_n)X^{n-2}.$$

Les racines de χ_A sont $\frac{1 + \sqrt{1 + 4s_n}}{2} = \lambda$, $\frac{1 - \sqrt{1 + 4s_n}}{2} = 1 - \lambda$ et 0, et ainsi :

$$\text{A admet trois valeurs propres : } 0, \lambda \text{ et } 1 - \lambda \text{ avec } \lambda = \frac{1 + \sqrt{1 + 4(4 + \dots + n^2)}}{2}.$$

Comme A est diagonalisable, un polynôme annulateur de A de degré 3 est $X(X - \lambda)(X - (1 - \lambda))$.

Ainsi :

$$\text{Un polynôme annulateur de } A \text{ de degré 3 } X^3 - X^2 - (4 + \dots + n^2)X.$$

Planche n° 3

Exercice I

Posons $f_n(x) = x^n + x\sqrt{n} - 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est polynomiale, donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_n' : x \mapsto nx^{n-1} + \sqrt{n}$.

Sur $[0,1]$, f_n' est strictement positive, donc f_n est continue (car dérivable) et strictement croissante de $f_n(0) = -1 < 0$ à $f_n(1) = \sqrt{n} > 0$. D'après le théorème de la bijection continue, f_n s'annule exactement une fois dans $[0,1]$, autrement dit :

L'équation $x^n + x\sqrt{n} - 1$ admet une unique solution dans $[0,1]$, notée u_n .

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{\sqrt{n}} \in [0,1]$, $\frac{1}{n} \in [0,1]$ et :

$$f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$$

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^n} + \frac{1}{\sqrt{n}} - 1$$

On a $f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) > 0$ et $n^n \geq n$, donc pour $n \geq 3$:

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} - 1 \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} - 1 = \frac{3 - 2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} < 0.$$

Comme $f_n(u_n) = 0$, f_n est strictement croissante sur $[0,1]$, ceci donne pour tout entier $n \geq 3$:

$$\frac{1}{n} < u_n < \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Alors, par le théorème de gendarmes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

Comme la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge, par comparaison de séries positives :

La série $\sum u_n$ diverge.

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(u_n) = u_n^n + u_n\sqrt{n} - 1 = 0$, donc :

$$1 - u_n\sqrt{n} = u_n^n = \exp(n \ln u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi, $u_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$. Posons alors $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}(1 - \varepsilon_n)$ avec $\varepsilon_n \rightarrow 0$ (car $u_n\sqrt{n} \rightarrow 1$).

La relation $u_n^n + u_n\sqrt{n} - 1 = 0$ se réécrit :

$$u_n^n = 1 - u_n\sqrt{n} \iff \left[\frac{1}{\sqrt{n}}(1 - \varepsilon_n)\right]^n = \varepsilon_n \iff \frac{\ln \varepsilon_n}{n} = -\frac{1}{2} \ln n + \ln(1 - \varepsilon_n).$$

Donc :

$$\frac{\ln(n\varepsilon_n)}{n} = \frac{\ln \varepsilon_n}{n} + \frac{\ln n}{n} = -\frac{1}{2} \ln n + \frac{\ln n}{n} + \ln(1-\varepsilon_n).$$

Et comme $\frac{\ln n}{n} + \ln(1-\varepsilon_n) \rightarrow 0$, on a $\frac{\ln n}{n} + \ln(1-\varepsilon_n) = o_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2} \ln n \right)$ et ainsi :

$$\frac{\ln(n\varepsilon_n)}{n} \sim -\frac{1}{2} \ln n \Leftrightarrow \ln(n\varepsilon_n) \sim -\frac{1}{2} n \ln n.$$

On a donc $\ln(n\varepsilon_n) \rightarrow -\infty$, d'où $n\varepsilon_n \rightarrow 0$, autrement dit :

$$\varepsilon_n = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \right).$$

Ainsi :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}(1-\varepsilon_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n\sqrt{n}} \right).$$

Donc, $(-1)^n u_n - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n\sqrt{n}} \right)$ et comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$ converge, la série

$\sum \left((-1)^n u_n - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)$ converge. Or, la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ vérifie le critère spécial des séries alternées, donc converge et finalement :

La série $\sum (-1)^n u_n$ converge.

Exercice II

Si U et V sont semblables, il existe $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $V = Q^{-1}UQ$.

Soit $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$. On a :

$$P(V) = \sum_{k=0}^p a_k V^k = \sum_{k=0}^p a_k (Q^{-1}UQ)^k = \sum_{k=0}^p a_k (Q^{-1}U^k Q) = Q^{-1} \left(\sum_{k=0}^p a_k U^k \right) Q = Q^{-1} P(U) Q.$$

Donc :

Si U et V sont semblables, alors $P(U)$ et $P(V)$ le sont aussi pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$.

On a $M^2 = \begin{pmatrix} A^2 & 2AB \\ 0_n & A^2 \end{pmatrix}$, $M^3 = \begin{pmatrix} A^3 & 3A^2B \\ 0_n & A^3 \end{pmatrix}$. On conjecture que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$M^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^{k-1}B \\ 0_n & A^k \end{pmatrix}.$$

La formule est vraie au rang 1 (et 2, et 3).

Supposons que la formule est vraie à un rang $k \in \mathbb{N}^*$. On a alors :

$$\begin{aligned} M^{k+1} &= M^k M = \begin{pmatrix} A^k & kA^{k-1}B \\ 0_n & A^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{k+1} & A^k B + kA^{k-1}BA \\ 0_n & A^{k+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A^{k+1} & A^k B + kA^k B \\ 0_n & A^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{k+1} & (k+1)A^k B \\ 0_n & A^{k+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La formule est donc vraie au rang $k+1$.

Ainsi, la formule est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Soit alors $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$. Si $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} P(M) &= \sum_{k=0}^p a_k M^k = a_0 I_{2n} + \sum_{k=1}^p a_k M^k = a_0 \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^p a_k \begin{pmatrix} A^k & kA^{k-1}B \\ 0_n & A^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_0 I_n + \sum_{k=1}^p a_k A^k & \sum_{k=1}^p k a_k A^{k-1} B \\ 0_n & a_0 I_n + \sum_{k=1}^p a_k A^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^p a_k A^k & \left(\sum_{k=1}^p k a_k A^{k-1} \right) B \\ 0_n & \sum_{k=0}^p a_k A^k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Soit :

$$P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & P'(A)B \\ 0_n & P(A) \end{pmatrix}$$

On suppose que A est diagonalisable et $B = 0_n$.

Alors, il existe un polynôme scindé à racines simples tel que $P(A) = 0_n$. On a alors :

$$P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & P'(A)B \\ 0_n & P(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n & P'(A)0_n \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix} = 0_{2n}.$$

Ainsi, P est un polynôme scindé à racines simples annulateur de M , donc :

M est diagonalisable.

On suppose que M est diagonalisable.

Alors, il existe un polynôme scindé à racines simples tel que $P(M) = 0_{2n}$, soit :

$$\begin{pmatrix} P(A) & P'(A)B \\ 0_n & P(A) \end{pmatrix} = 0_{2n} \Leftrightarrow \begin{cases} P(A) = 0_n \\ P'(A)B = 0_n \end{cases}$$

Comme P est un polynôme scindé à racines simples qui annule A , donc A est diagonalisable (et le spectre de A est inclus dans l'ensemble des racines de P).

Alors, il existe $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $Q^{-1}AQ = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et :

$$Q^{-1}P'(A)Q = P'(D) = \text{diag}(P'(\lambda_1), \dots, P'(\lambda_n)).$$

Or, les λ_k sont les valeurs propres de A , donc racines de P , donc pas de P' (car les racines sont simples). Ainsi, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P'(\lambda_k) \neq 0$ et $P'(D)$ est inversible, donc $P'(A)$ l'est aussi.

Alors, $P'(A)B = 0_n$ implique que $B = 0_n$.

Finalement, si M est diagonalisable, alors A l'est aussi et $B = 0_n$: la réciproque est vraie.

D'où :

M est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable et $B = 0_n$.

Planche n° 4

Exercice I

Pour la définition du rayon de convergence d'une série entière, voir le cours.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\int_0^1 \frac{t^n}{2} dt \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt \leq \int_0^1 t^n dt \Leftrightarrow \frac{1}{2(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

Or, le rayon de convergence de $\sum \frac{x^n}{n+1}$ et $\sum \frac{x^n}{2(n+1)}$ est le même que celui de $\sum \frac{x^n}{n}$, qui est 1.

Donc :

Le rayon de convergence de $\sum u_n x^n$ est $R = 1$.

Soit $x \in]-1, 1[$.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0, 1]$, on a $|xt| < 1$ et :

$$\sum_{n=0}^N \frac{x^n t^n}{1+t^2} = \frac{1}{1+t^2} \sum_{n=0}^N (xt)^n = \frac{1}{1+t^2} \frac{1-(xt)^{N+1}}{1-xt}.$$

Donc :

$$\sum_{n=0}^N u_n x^n = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t^2} \frac{1-(xt)^{N+1}}{1-xt} \right) dt = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)(1-tx)} - x^{N+1} \int_0^1 \frac{t^{N+1}}{(1+t^2)(1-tx)} dt.$$

Et, pour tout $t \in [0, 1]$, $\frac{1}{(1+t^2)(1-tx)} \leq \frac{1}{1-|x|}$, donc :

$$\left| x^{N+1} \int_0^1 \frac{t^{N+1}}{(1+t^2)(1-tx)} dt \right| = |x|^{N+1} \int_0^1 \frac{t^{N+1}}{(1+t^2)(1-tx)} dt \leq |x|^{N+1} \int_0^1 \frac{t^{N+1}}{1-|x|} dt = \frac{1}{1-|x|} \frac{|x|^{N+1}}{N+2}.$$

Comme $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-|x|} \frac{|x|^{N+1}}{N+2} = 0$ (car $|x| < 1$), on a $\lim_{N \rightarrow +\infty} x^{N+1} \int_0^1 \frac{t^{N+1}}{(1+t^2)(1-tx)} dt = 0$ par comparaison et donc :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)(1-tx)}.$$

Or, pour tout $x \in]-1, 1[$ et tout $t \in [0, 1]$:

$$\frac{1}{(1+t^2)(1-tx)} = \frac{1}{x^2+1} \left(\frac{xt+1}{1+t^2} + \frac{x^2}{1-tx} \right).$$

Donc :

$$\begin{aligned} S(x) &= \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} \left(\frac{xt+1}{1+t^2} + \frac{x^2}{1-tx} \right) dt = \frac{1}{x^2+1} \left(\frac{x}{2} \int_0^1 \frac{2t}{1+t^2} dt + \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} + x^2 \int_0^1 \frac{dt}{1-tx} \right) \\ &= \frac{1}{x^2+1} \left(\frac{x}{2} [\ln(1+t^2)]_0^1 + [\arctan t]_0^1 + x [-\ln(1-tx)]_0^1 \right) \end{aligned}$$

Soit, pour tout $x \in]-1, 1[$;

$$S(x) = \frac{1}{x^2+1} \left(\frac{\ln 2}{2} x + \frac{\pi}{4} - x \ln(1-x) \right)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0, 1]$, on a $0 \leq \frac{t^{n+1}}{1+t^2} \leq \frac{t^n}{1+t^2} \leq t^n$, donc :

$$0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}.$$

Avec le théorème de gendarmes pour la limite, on peut conclure que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante de limite nulle, donc la série $\sum (-1)^n u_n$ vérifie le critère spécial des séries alternées, donc converge et ainsi :

$$S(-1) \text{ existe.}$$

On montre comme plus haut que pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=0}^N (-1)^n u_n = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)(1+t)} + (-1)^N \int_0^1 \frac{t^{N+1}}{(1+t^2)(1+t)} dt.$$

Puis que :

$$S(-1) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)(1+t)} = \int_0^1 \frac{1}{2} \left(\frac{1-t}{1+t^2} + \frac{1}{1+t} \right) dt = \frac{1}{2} \left(\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt + \int_0^1 \frac{dt}{1+t} \right).$$

Soit :

$$S(-1) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2} \right)$$

Exercice II

Si $f^2 = g^2 = id_E$, alors que f et g sont des symétries, donc :

f et g sont des automorphismes de E .

Comme f et g sont des symétries, on a $Sp(f) \subset \{-1; 1\}$, $Sp(g) \subset \{-1; 1\}$, et f et g sont diagonalisable (donc $Sp(f)$ et $Sp(g)$ ne sont pas vides). Ainsi :

$$Sp(f) = \{1\} \text{ ou } \{-1\} \text{ ou } \{-1; 1\}.$$

Et il en va de même pour $Sp(g)$.

- Si $Sp(f) = \{1\}$, alors, comme f est diagonalisable, $f = id_E$ et donc $fg + gf = 2g = 0$, mais ceci est impossible car $g^2 = id_E$, donc $g \neq 0$. Ainsi, $Sp(f) \neq \{1\}$.
- De la même façon, on a $Sp(f) \neq \{-1\}$, car sinon $f = -id_E$ et $fg + gf = -2g = 0$.

Finalement :

$Sp(f) = Sp(g) = \{-1; 1\}$ et f et g sont diagonalisables.

Soit $x \in \ker(f - id_E)$. On a $f(x) = x$, donc :

$$(fg + gf)(x) = f(g(x)) + g(f(x)) = f(g(x)) + g(x) = 0.$$

Soit, $g(x) \in \ker(f + id_E)$ et donc :

$$g(\ker(f - id_E)) \subset \ker(f + id_E).$$

Ainsi, g induit une application linéaire de $\ker(f - id_E)$ dans $\ker(f + id_E)$. Notons $\tilde{g}$ cette application linéaire.

De même, si $x \in \ker(f + id_E)$, on a $f(x) = -x$ et $f(g(x)) = -g(f(x)) = -g(-x) = g(x)$, donc $g(x) \in \ker(f - id_E)$ et ainsi :

$$g(\ker(f + id_E)) \subset \ker(f - id_E).$$

Or, f est la symétrie par rapport à $\ker(f - id_E)$, parallèlement à $\ker(f + id_E)$, donc :

$$E = \ker(f - id_E) \oplus \ker(f + id_E).$$

Donc :

$$g(\ker(f - id_E)) + g(\ker(f + id_E)) = g(\ker(f - id_E)) \oplus g(\ker(f + id_E)).$$

Et :

$$\dim[g(\ker(f - id_E)) \oplus g(\ker(f + id_E))] = \dim g(\ker(f - id_E)) + \dim g(\ker(f + id_E)).$$

Comme g est bijective, $\ker g = \{0\}$ et $g(E) = E$.

- $\ker \tilde{g} = \ker(f - id_E) \cap \ker g = \{0\}$, donc $\tilde{g}$ est injective.
- $E = g(E) \subset g(\ker(f - id_E)) \oplus g(\ker(f + id_E)) \subset \ker(f - id_E) \oplus \ker(f + id_E) = E$ donc :

$$g(\ker(f - id_E)) \oplus g(\ker(f + id_E)) = \ker(f - id_E) \oplus \ker(f + id_E).$$

Avec les inclusions $g(\ker(f - id_E)) \subset \ker(f + id_E)$ et $g(\ker(f + id_E)) \subset \ker(f - id_E)$, ceci donne $g(\ker(f - id_E)) = \ker(f + id_E)$ (et $g(\ker(f + id_E)) = \ker(f - id_E)$).

Ainsi, $\tilde{g}$ est surjective.

Finalement, $\tilde{g}$ est une application linéaire bijective, donc un isomorphisme et ainsi :

$$g \text{ induit un isomorphisme de } \ker(f - id_E) \text{ dans } \ker(f + id_E).$$

On a immédiatement $\dim \ker(f - id_E) = \dim \ker(f + id_E)$ et donc :

$$\begin{aligned} \dim E &= \dim[\ker(f - id_E) \oplus \ker(f + id_E)] \\ &= \dim \ker(f - id_E) + \dim \ker(f + id_E) \\ &= 2 \dim \ker(f - id_E) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$E \text{ est de dimension paire.}$$

On pose $\dim E = 2n$. On a $\dim \ker(f - id_E) = \dim \ker(f + id_E) = n$.

Soit alors $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $\ker(f - id_E)$. Comme $g(\ker(f - id_E)) = \ker(f + id_E)$, la famille $(g(e_1), \dots, g(e_n))$ une base de $\ker(f + id_E)$.

On a alors pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f(e_k) = e_k$ et $f(g(e_k)) = -g(e_k)$.

De plus, la famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n, g(e_1), \dots, g(e_n))$ est une base de E adaptée à la décomposition $E = \ker(f - id_E) \oplus \ker(f + id_E)$ et :

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & -I_n \end{pmatrix}.$$

Enfin, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $g(e_k) = g(e_k)$ (!) et $g(g(e_k)) = g^2(e_k) = e_k$, donc :

$$M_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}.$$

Finalement :

$$\text{Il existe une base de } E \text{ dans laquelle les matrices de } f \text{ et } g \text{ sont } \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & -I_n \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}.$$

Série 2

Planche n° 5**Exercice I**

Remarquons que $x \mapsto ax+b$ est solution de $(E): (x^2-1)y'' + 2xy' - 2y = 0$ si et seulement si $2ax - 2(ax+b) = 0$, soit $b = 0$, donc les fonctions linéaires $x \mapsto ax$ sont solutions de (E) est la seule fonction constante solution de (E) est la fonction nulle.

Soit maintenant $h: x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$ avec $n \geq 2$ et $a_n \neq 0$, une éventuelle solution polynomiale de (E) .

On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} (x^2-1) \sum_{k=2}^n k(k-1)a_k x^{k-2} + 2x \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1} - 2 \sum_{k=0}^n a_k x^k &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n (k^2 + k - 2)a_k x^k - \sum_{k=2}^n k(k-1)a_k x^{k-2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n (k-1)(k+2)a_k x^k - \sum_{k=0}^{n-2} (k+2)(k+1)a_{k+2} x^k &= 0 \\ \Leftrightarrow (n-1)(n+2)a_n x^n + (n-2)(n+1)a_{n-1} x^{n-1} + \sum_{k=0}^n [(k-1)a_k - (k+1)a_{k+2}] (k+2)x^k &= 0 \end{aligned}$$

Par unicité des coefficients, on obtient $a_n = 0$, ce qui est absurde.

Finalement :

Les seules fonctions polynomiales solutions de (E) sont les fonctions linéaires.

On pose $y(x) = xz(x)$ en prenant z deux fois dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

On a, pour tout $x \in I$, $y'(x) = z(x) + xz'(x)$ et $y''(x) = 2z'(x) + xz''(x)$, donc :

$$\begin{aligned} (x^2-1)y''(x) + 2xy'(x) - 2y(x) = 0 &\Leftrightarrow (x^2-1)[2z'(x) + xz''(x)] + 2x[z(x) + xz'(x)] - 2xz(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x(x^2-1)z''(x) + 2(2x^2-1)z'(x) = 0 \end{aligned}$$

Donc :

La fonction z vérifie l'équation différentielle (E') : $x(x^2-1)z'' + 2(2x^2-1)z' = 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$:

$$\frac{2-4x^2}{x(x^2-1)} = -\frac{2}{x} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$$

La fonction z' est solution de (E') : $x(x^2 - 1)u' + 2(2x^2 - 1)u = 0$ qui est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1, dont les solutions sur tout intervalle I inclus dans $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$ sont de la forme :

$$x \mapsto K \exp\left(\int^x \frac{2-4t^2}{t(t^2-1)} dt\right) \text{ avec } K \in \mathbb{R}.$$

Or :

$$\int^x \frac{2-4t^2}{t(t^2-1)} dt = -\int^x \left(\frac{2}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{t+1}\right) dt = -(2\ln|x| + \ln|x-1| + \ln|x+1|) = -\ln|x^2(1-x^2)|.$$

Donc, pour tout $x \in I$, $x(1-x^2)$ est de signe constant, et :

$$\exp\left(\int^x \frac{2-4t^2}{t(t^2-1)} dt\right) = \pm \frac{1}{x^2(1-x^2)}.$$

Ainsi, z' est de la forme $z'(x) = \frac{\lambda}{x^2(1-x^2)}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, donc $z'(x) = \lambda \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{1-x}\right)$ et :

$$z(x) = \lambda \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln|1+x| - \frac{1}{2} \ln|1-x|\right) + \mu \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Et ainsi, les solutions de (E) sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$ sont les fonctions :

$$x \mapsto \lambda x \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) + \mu x = \lambda \left(\frac{x}{2} \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - 1\right) + \mu x$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Remarquons que les fonctions $f_1 : x \mapsto \frac{x}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 1$ et $f_2 : x \mapsto x$ sont de classe C^∞ sur $] -1, 1[$

(avec $\frac{1+x}{1-x} > 0$), et sont deux solutions non proportionnelles de l'équation (E) sur $] -1, 1[$.

Or, sur $] -1, 1[$, (E) se récrit $y'' + \frac{2x}{x^2-1}y' - \frac{2}{x^2-1}y = 0$ qui est une équation différentielle linéaire, homogène, normalisée d'ordre 2, donc l'ensemble de ses solutions est un espace vectoriel de dimension 2, qui contient $\text{Vect}(f_1, f_2)$ (qui est lui-même un espace vectoriel de dimension 2).

Ainsi :

$$\text{Les solutions de } (E) \text{ sur }] -1, 1[\text{ sont les fonctions } x \mapsto \lambda \left(\frac{x}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 1\right) + \mu x \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exercice II

L'application $(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle = \int_0^1 PQ$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$: c'est du cours.

Orthonormalisons la base canonique $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ par le procédé de Gram-Schmidt.

On a $\|1\|^2 = \int_0^1 1 = 1$, donc 1 est normé.

Cherchons $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\langle X + \alpha, 1 \rangle = 0$. On a :

$$\langle X + \alpha, 1 \rangle = \int_0^1 (t + \alpha) dt = \frac{1}{2} + \alpha.$$

Donc, $X - \frac{1}{2}$ est orthogonal à 1.

Cherchons $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $\langle X^2 + aX + b, 1 \rangle = \langle X^2 + aX + b, X \rangle = 0$. On a :

$$\langle X^2 + aX + b, 1 \rangle = \int_0^1 (t^2 + at + b) dt = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}a + b$$

$$\langle X^2 + aX + b, X \rangle = \int_0^1 (t^3 + at^2 + bt) dt = \frac{1}{4} + \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b$$

Donc :

$$\begin{cases} \langle X^2 + aX + b, 1 \rangle = 0 \\ \langle X^2 + aX + b, X \rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} + \frac{1}{2}a + b = 0 \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{6} \\ a = -1 \end{cases}$$

Ainsi, $X^2 - X + \frac{1}{6}$ est orthogonal à 1 et X .

Enfin :

$$\left\| X - \frac{1}{2} \right\|^2 = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2} \right)^2 dt = \left[\frac{1}{3} \left(t - \frac{1}{2} \right)^3 \right]_0^1 = \frac{1}{12}$$

$$\left\| X^2 - X + \frac{1}{6} \right\|^2 = \int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{6} \right)^2 dt = \left[t^4 - 2t^3 + \frac{4}{3}t^2 - \frac{1}{3}t + \frac{1}{36} \right]_0^1 = \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{4}{9} - \frac{1}{6} + \frac{1}{36} = \frac{1}{180}$$

Ainsi :

Une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ est $(1, \sqrt{3}(2X - 1), \sqrt{5}(6X^2 - 6X + 1))$.

On a :

$$\begin{aligned} \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt &= \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \|X^2 - (aX + b)\|^2 \\ &= \inf_{P \in \mathbb{R}_1[X]} \|X^2 - P\|^2 = [d(X^2, \mathbb{R}_1[X])]^2 = \|X^2 - p(X^2)\|^2 \end{aligned}$$

Où $p(X^2)$ est le projeté orthogonale de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$. Or, on a vu que $X^2 - X + \frac{1}{6}$ est orthogonal

à 1 et X , donc $X^2 - X + \frac{1}{6} \in (\mathbb{R}_1[X])^\perp$ et $p(X^2) = X - \frac{1}{6}$.

Ainsi :

$$\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt = \left\| X^2 - X + \frac{1}{6} \right\|^2 = \frac{1}{180}$$

Planche n° 6**Exercice I**

Notons Φ l'application qui à $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ associe $(P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n)) \in \mathbb{R}^n$.

Comme, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'application évaluation $P \mapsto P(\lambda_k)$ est linéaire, Φ est linéaire.

Soit $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. Soit $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. On a :

$$(P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n)) = (b_1, \dots, b_n) \Leftrightarrow \begin{cases} a_{n-1}\lambda_1^{n-1} + \dots + a_1\lambda_1 + a_0 = b_1 \\ a_{n-1}\lambda_2^{n-1} + \dots + a_1\lambda_2 + a_0 = b_2 \\ \vdots \\ a_{n-1}\lambda_n^{n-1} + \dots + a_1\lambda_n + a_0 = b_n \end{cases} \Leftrightarrow V \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } V = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Comme les réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont deux à deux distincts, la matrice de Vandermonde V est inversible.

Ainsi, il existe un unique $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que $V \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$. Ainsi, il existe un unique

$P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $\Phi(P) = (P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n)) = (b_1, \dots, b_n)$, donc Φ est bijective et finalement :

$$\Phi : \mathbb{R}_{n-1}[X] \rightarrow \mathbb{R}^n ; P \mapsto (P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n)) \text{ est un isomorphisme.}$$

Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $fg = gf$, $\lambda \in Sp(f)$ et $E_\lambda = \ker(f - \lambda id_E)$.

Comme f est endomorphisme d'un espace E de dimension n admettant n valeurs propres distinctes, f est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont des droites.

Pour tout $x \in E_\lambda$ tel que $x \neq 0$, on a $E_\lambda = \text{Vect}(x)$ et :

$$f(g(x)) = g(f(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x).$$

Ainsi, $g(x) \in E_\lambda = \text{Vect}(x)$, donc $g(x)$ est colinéaire à x , autrement dit :

$$\text{Tout vecteur propre de } f \text{ est vecteur propre de } g.$$

Comme f est diagonalisable, il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E composée de vecteurs propres de f . Or, tous ces vecteurs sont aussi vecteurs propres de g , donc :

$$f \text{ et } g \text{ admettent une base commune de vecteurs propres.}$$

Exercice II

Pour $Z = X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu)$, c'est du cours.

Soient $k, n \in \mathbb{N}$ avec $k \leq n$. On a :

$$P(X = k | Z = n) = \frac{P((X = k) \cap (Z = n))}{P(Z = n)} = \frac{P((X = k) \cap (Y = n - k))}{P(Z = n)}.$$

Comme X et Y sont indépendantes, $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ et $Z \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu)$, on obtient :

$$P(X = k | Z = n) = \frac{P(X = k)P(Y = n - k)}{P(Z = n)} = \frac{e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\mu} \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}}{e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{\lambda^k \mu^{n-k}}{(\lambda+\mu)^n}.$$

Soit :

$$P(X = k | Z = n) = \binom{n}{k} \frac{\lambda^k \mu^{n-k}}{(\lambda + \mu)^n}$$

En posant $p = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$, on a $1 - p = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$, donc :

$$P(X = k | Z = n) = \binom{n}{k} \frac{\lambda^k}{(\lambda + \mu)^k} \frac{\mu^{n-k}}{(\lambda + \mu)^{n-k}} = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

Alors :

$$\text{On reconnaît une loi binomiale de paramètres } n \text{ et } p = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

Planche n° 7**Exercice I**

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K})$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(0) \neq 0$ et $XP(X)$ annule u .

On a $P(X) = XQ(X) + P(0)$ avec $Q \in \mathbb{K}[X]$, donc $XP(X) = Q(X)X^2 + P(0)X$ et :

$$Q(u)u^2 + P(0)u = 0.$$

- On a toujours $\ker u \subset \ker u^2$.
- Soit $x \in \ker u^2$. On a $u^2(x) = 0$ et :

$$Q(u)u^2(x) + P(0)u(x) = 0 \Leftrightarrow P(0)u(x) = 0 \Leftrightarrow u(x) = 0 \text{ (car } P(0) \neq 0 \text{)}.$$

Donc, $x \in \ker u$ et ainsi, $\ker u^2 \subset \ker u$.

Ainsi :

$$\ker u = \ker u^2$$

Si u est nilpotent, alors il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$.

Prouvons alors par récurrence descendante sur k que $u^k = 0$ pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$.

Par hypothèse, la propriété est vraie au rang p .

Supposons la propriété vraie à un rang $k \in \llbracket 2, p \rrbracket$ (s'il y a lieu, autrement dit si $p \geq 2$).

Alors, en composant $Q(u)u^2 + P(0)u = 0$ à droite par u^{k-2} , on obtient, avec $P(0) \neq 0$:

$$Q(u)u^k + P(0)u^{k-1} = 0 \Leftrightarrow u^{k-1} = -\frac{1}{P(0)}Q(u)u^k.$$

Or, par hypothèse de récurrence $u^k = 0$, donc $u^{k-1} = 0$ et la propriété est vraie au rang $k-1$.

Ainsi, la propriété est initialisée et héréditaire donc vraie pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, et en particulier pour $k=1$, soit :

$$\boxed{u = 0}$$

Exercice II

Montrons par récurrence double sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < \frac{a_n}{n!} \leq 1$.

- On a $a_0 = a_1 = 1$, donc $0 < \frac{a_0}{0!} = 1 \leq 1$ et $0 < \frac{a_1}{1!} = 1 \leq 1$. La propriété est vraie aux rangs 0 et 1.
- Supposons la propriété vraie à des rangs n et $n+1$. On a donc $0 < \frac{a_n}{n!} \leq 1$ et $0 < \frac{a_{n+1}}{(n+1)!} \leq 1$, donc :

$$0 < a_n \leq n! \text{ et } 0 < a_{n+1} \leq (n+1)!$$

Alors :

$$0 < a_{n+2} = a_{n+1} + (n+1)a_n \leq (n+1)! + (n+1)n! = 2(n+1)! \leq (n+2)(n+1)! = (n+2)!$$

Donc, $0 < \frac{a_{n+2}}{(n+2)!} \leq 1$ et la propriété est vraie au rang $n+2$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit :

$$\boxed{0 < \frac{a_n}{n!} \leq 1}$$

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < \frac{a_n}{n!} \leq 1$, le rayon de convergence R de la série entière $\sum \frac{a_n}{n!} x^n$ est au

moins égal à 1. Pour tout $x \in]-R, R[$, $f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} x^n$ et :

$$f'(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n!} n x^{n-1} = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n \geq 0} \frac{a_{n+1}}{n!} x^n.$$

Et :

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \sum_{n \geq 1} \frac{a_{n+1}}{n!} n x^{n-1} = \sum_{n \geq 1} \frac{a_{n+1}}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n \geq 0} \frac{a_{n+2}}{n!} x^n = \sum_{n \geq 0} \frac{a_{n+1} + (n+1)a_n}{n!} x^n \\
 &= \sum_{n \geq 0} \frac{a_{n+1}}{n!} x^n + \sum_{n \geq 0} \frac{na_n}{n!} x^n + \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} x^n = \sum_{n \geq 0} \frac{a_{n+1}}{n!} x^n + x \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{(n-1)!} x^{n-1} + \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} x^n \\
 &= \sum_{n \geq 0} \frac{a_{n+1}}{n!} x^n + x \sum_{n \geq 0} \frac{a_{n+1}}{n!} x^n + \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} x^n = (1+x) \sum_{n \geq 0} \frac{a_{n+1}}{n!} x^n + \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} x^n \\
 &= (1+x)f'(x) + f(x)
 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$f : x \mapsto \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} x^n \text{ est solution de } (E) : y'' - (1+x)y' - y = 0.$$

On vient de voir que (E) admet au moins f pour solution.

Soit maintenant g une solution de (E) sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On a pour tout $x \in I$:

$$g''(x) = (1+x)g'(x) + g(x) = h'(x)$$

avec $h : x \mapsto (1+x)g(x)$. Alors, $g'(x) = h(x) + k$ avec $k \in \mathbb{R}$, soit :

$$g'(x) = (1+x)g(x) + k.$$

Les solutions de $y' - (1+x)y = 0$ sont les fonctions $x \mapsto Ke^{\frac{1}{2}x^2}$ et la méthode de variation de la constante donne $x \mapsto ke^{\frac{1}{2}x^2} \int^x e^{-t-\frac{1}{2}t^2} dt$ comme solution particulière de $y' - (1+x)y = k$, donc :

$$g : x \mapsto \lambda e^{\frac{1}{2}x^2} \int_0^x e^{-t-\frac{1}{2}t^2} dt + \mu e^{\frac{1}{2}x^2} \text{ avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Ces fonctions étant définies sur $\mathbb{R}$:

$$\text{Les solutions de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sont les fonctions } x \mapsto e^{\frac{1}{2}x^2} \left(\lambda \int_0^x e^{-t-\frac{1}{2}t^2} dt + \mu \right) \text{ avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Remarquons que $f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} x^n = a_0 + a_1 x + \sum_{n \geq 2} \frac{a_n}{n!} x^n = f(0) + f'(0)x + \sum_{n \geq 2} \frac{a_n}{n!} x^n$, donc :

$$f(0) = a_0 = 1 \text{ et } f'(0) = a_1 = 1.$$

Comme f est solution de (E) sur $] -R, R[$ (avec $R \geq 1$), il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout

$x \in] -R, R[$, on a $f(x) = \lambda e^{\frac{1}{2}x^2} \int_0^x e^{-t-\frac{1}{2}t^2} dt + \mu e^{\frac{1}{2}x^2}$ et :

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 1 \\ \lambda + \mu = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 1 \end{cases}$$

Ainsi, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} x^n = e^{x + \frac{1}{2}x^2}.$$

Or, $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{\frac{1}{2}x^2}$ sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$, donc $R = +\infty$.

On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = e^x e^{\frac{1}{2}x^2} = \left(\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} \right) \left(\sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n}}{2^n n!} \right) = \left(\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} \right) \left(\sum_{n \geq 0} b_n x^n \right)$$

avec $b_{2p+1} = 0$ et $b_{2p} = \frac{1}{2^p p!}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Avec le produit de Cauchy, on obtient :

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)!} b_k \right) x^n.$$

Donc, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \frac{a_{2p}}{(2p)!} &= \sum_{k=0}^{2p} \frac{1}{(2p-k)!} b_k = \sum_{k=0}^p \frac{1}{(2p-2k)!} \frac{1}{2^k k!} \\ \frac{a_{2p+1}}{(2p+1)!} &= \sum_{k=0}^{2p+1} \frac{1}{(2p+1-k)!} b_k = \sum_{k=0}^p \frac{1}{(2p+1-2k)!} \frac{1}{2^k k!} \end{aligned}$$

Soit, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} a_{2p} &= \sum_{k=0}^p \frac{(2p)!}{2^k k! (2(p-k))!} \\ a_{2p+1} &= \sum_{k=0}^p \frac{(2p+1)!}{2^k k! (2(p-k)+1)!} \end{aligned}$$

Planche n° 8

Exercice I

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $|u_n(x)| = \frac{e^{-nx}}{n}$ et la suite $\left(\frac{e^{-nx}}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ décroît vers 0, donc la série numérique $\sum u_n(x)$ vérifie le critère spécial des séries alternées, donc converge. Ainsi :

La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

Remarquons que si $x < 0$, $|u_n(x)| = \frac{e^{-nx}}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et $\sum u_n(x)$ diverge grossièrement, donc l'ensemble de définition de $f = \sum_{n \geq 1} u_n$ est $\mathbb{R}_+$ (et pas plus).

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, avec la propriété de majoration du reste d'une série alternée, on a :

$$\left| f(x) - \sum_{k=1}^n u_k(x) \right| \leq |u_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{n+1}.$$

Comme $\frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on a $\sup_{x \in \mathbb{R}_+} \left| f(x) - \sum_{k=1}^n u_k(x) \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ et comme toutes les fonctions u_n sont continues sur $\mathbb{R}_+$ (car proportionnelles à une fonction exponentielle) :

$$\text{La somme } f = \sum_{n \geq 1} u_n \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ (car proportionnelle à une fonction exponentielle) avec $u_n' : x \mapsto (-1)^{n+1} e^{-nx}$.

Pour $x > 0$, $\sum u_n'$ vérifie encore le critère spécial des séries alternées et pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $x \in [a, +\infty[$, on a, à nouveau grâce à la propriété de majoration du reste d'une série alternée, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| \sum_{k=1}^{+\infty} u_k'(x) - \sum_{k=1}^n u_k'(x) \right| \leq |u_{n+1}'(x)| = e^{-(n+1)x} \leq e^{-(n+1)a}.$$

Comme $e^{-(n+1)a} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on a $\sup_{x \in \mathbb{R}_+} \left| \sum_{k=1}^{+\infty} u_k'(x) - \sum_{k=1}^n u_k'(x) \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc la série de fonctions $\sum u_n'$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$, ce qui permet de conclure que $f = \sum_{n \geq 1} u_n$ est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ et $f' = \sum_{n \geq 1} u_n'$. Ceci est vrai pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, donc :

$$f = \sum_{n \geq 1} u_n \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et } f' = \sum_{n \geq 1} u_n'.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $0 < e^{-x} < 1$ et :

$$f'(x) = \sum_{n \geq 1} u_n'(x) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} e^{-nx} = - \sum_{n \geq 1} (-e^{-x})^n = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}.$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = -\ln(1 + e^{-x}) + k$ avec k constante réelle. Et f est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc $f(0) = -\ln 2 + k$, soit :

$$k = f(0) + \ln 2 = \sum_{n \geq 1} u_n(0) + \ln 2 = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} + \ln 2 = -\ln 2 + \ln 2 = 0.$$

Le résultat $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$ se prouve (par exemple) avec la formule $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^N (-1)^n x^n + \frac{(-x)^{N+1}}{1+x}$, puis en faisant tendre N vers l'infini dans :

$$\left| \int_0^1 \frac{dx}{1+x} - \sum_{n=0}^N \int_0^1 (-1)^n x^n dx \right| = \left| \ln 2 + \sum_{n=1}^{N+1} \frac{(-1)^n}{n} \right| = \left| \int_0^1 \frac{(-x)^{N+1}}{1+x} dx \right| \leq \int_0^1 x^{N+1} dx = \frac{1}{N+2}.$$

Finalement, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$f(x) = -\ln(1 + e^{-x})$$

Exercice II

Notons (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{C}^2$, identifié à $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$. On a :

$$C(e_1 - e_2) = 0$$

$$C(e_1) = e_1$$

Donc, $Sp(C) = \{0, 1\}$ et :

$$C = R \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} R^{-1} \text{ avec } R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = R^{-1}.$$

Posons $Q = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0_n & -I_n \end{pmatrix}$. On a $Q^2 = I_{2n}$, donc $Q \in GL_{2n}(\mathbb{C})$ et $Q^{-1} = Q$. De plus :

$$Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix}.$$

Si A est diagonalisable, il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP = D$ où D est diagonale.

Alors, en posant $P_1 = \begin{pmatrix} P & 0_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}$, on a $P_1 \in GL_{2n}(\mathbb{C})$ avec $P_1^{-1} = \begin{pmatrix} P^{-1} & 0_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}$ et :

$$(QP_1)^{-1}B(QP_1) = P_1^{-1}Q^{-1}BQP_1 = \begin{pmatrix} P^{-1} & 0_n \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0_n \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P^{-1}AP & 0_n \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & 0_n \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix} = \Delta.$$

Comme Δ est diagonale et $QP_1 \in GL_{2n}(\mathbb{C})$:

$$B \text{ est diagonalisable.}$$

De plus, si χ_M est le polynôme caractéristique d'une matrice M , on a :

$$\chi_B = \chi_\Delta = \begin{vmatrix} XI_n - D & 0_n \\ 0_n & XI_n \end{vmatrix} = \det(XI_n - D) \det(XI_n) = \chi_D X^n = \chi_A X^n.$$

Donc :

$$Sp(B) = Sp(A) \cup \{0\}$$

Préparation aux oraux : CCP – Série 3**Planche n° 9****Exercice I**

Soient $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$.

La fonction $t \mapsto t^k e^{-nt}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ en tant que produit de telles fonctions.

De plus :

- quand $n \neq 0$, on a $t^k e^{-nt} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées et $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge, donc, $\int_0^{+\infty} t^k e^{-nt} dt$ converge ;
- quand $n = 0$, on a $t^k \geq 1$ pour tout $t \geq 1$ et $\int_1^{+\infty} dt$ diverge, donc, $\int_0^{+\infty} t^k e^{-nt} dt$ diverge.

Ainsi, pour $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$I_{k,n} = \int_0^{+\infty} t^k e^{-nt} dt \text{ converge si et seulement si } n \neq 0.$$

Soient $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

La fonction $t \mapsto nt$ est une bijection de classe C^1 de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, donc en posant $u = nt$, on a :

$$I_{k,n} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{n^k} u^k e^{-u} \frac{1}{n} du = \frac{1}{n^{k+1}} \int_0^{+\infty} u^k e^{-u} du.$$

Et on a $\int_0^{+\infty} u^k e^{-u} du = k!$ (déjà vu ; se prouve par récurrence, à l'aide d'une intégration par parties entre 0 et $A \in \mathbb{R}_+$, qui donne $\int_0^{+\infty} u^{k+1} e^{-u} du = (k+1) \int_0^{+\infty} u^k e^{-u} du$ en faisant tendre A vers $+\infty$).

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_{k,n} = \frac{k!}{n^{k+1}}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\left| \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+2}} x^{n+1}}{\frac{n!}{n^{n+1}} x^n} \right| = \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1} |x| = \frac{n}{n+1} e^{-n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} |x| = \frac{n}{n+1} e^{-1 + o(1)} |x| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{|x|}{e}.$$

D'après la règle de d'Alembert, $\sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^{n+1}} x^n$ converge quand $\frac{|x|}{e} < 1$, soit $|x| < e$, et diverge quand $\frac{|x|}{e} > 1$, soit $|x| > e$. Ainsi :

$$\text{Le rayon de convergence de } \sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^{n+1}} x^n \text{ est } R = e.$$

Soit $x \in]-e, e[$.

Une étude rapide de la fonction $t \mapsto te^{-t}$ sur $\mathbb{R}_+$ donne $0 \leq te^{-t} \leq e^{-1}$ pour tout réel $t \geq 0$, et donc, avec $|x| < e$, on a $|txe^{-t}| \leq |x|e^{-1} < 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $e^t - tx \neq 0$ et :

$$\frac{tx}{e^t - tx} = \frac{txe^{-t}}{1 - txe^{-t}} = \sum_{n \geq 1} (txe^{-t})^n = \sum_{n \geq 1} t^n e^{-nt} x^n.$$

Posons $f_n(t) = t^n e^{-nt} x^n$ pour $t \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue, donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$, en tant que produit de telles fonctions et, d'après ce qui précède, f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ avec $\int_0^{+\infty} t^n e^{-nt} dt = \frac{n!}{n^{n+1}}$.
- La série $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction $t \mapsto \frac{tx}{e^t - tx}$, continue, donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$, en tant que quotient de telles fonctions.
- Enfin, comme $x \in]-e, e[$, la série $\sum_{n \geq 1} \int_0^{+\infty} |f_n| = \sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^{n+1}} |x|^n$ converge, toujours d'après ce qu'on a vu plus haut.

Tout ceci permet de conclure que pour tout $x \in]-e, e[$, $t \mapsto \frac{tx}{e^t - tx}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\int_0^{+\infty} \frac{tx}{e^t - tx} dt = \sum_{n \geq 1} \int_0^{+\infty} f_n, \text{ soit :}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{tx}{e^t - tx} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^{n+1}} x^n$$

Exercice II

Soit λ une valeur propre réelle ou complexe de M et Z un vecteur propre (non nul) associé.

On a $MZ = \lambda Z$, donc $M^2Z = M(\lambda Z) = \lambda MZ = \lambda^2 Z$ et de même, $M^3Z = \lambda^3 Z$.

Comme $M^3 - 4M^2 + 4M = 0_n$, on a $M^3Z - 4M^2Z + 4MZ = 0$, soit :

$$\lambda^3 Z - 4\lambda^2 Z + 4\lambda Z = (\lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda)Z = 0.$$

Et comme $Z \neq 0$, ceci donne $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda = 0$. Ainsi :

Les valeurs propres de M sont racines de $X^3 - 4X^2 + 4X$.

On a $X^3 - 4X^2 + 4X = X(X-2)^2$, donc les valeurs propres (réelles ou complexes) possibles de M , sont 0 et 2. Si note $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$ la multiplicité de 0 dans le polynôme caractéristique de M , $n-p \in \llbracket 0, n \rrbracket$ est celle de 2 et :

$$\text{Tr}(M) = p \times 0 + (n-p) \times 2 = 2(n-p).$$

Alors, $\text{Tr}(M) = 0$ donne $n-p = 0$, donc 0 est la seule valeur propre de M .

Ceci implique que $M - 2I_n$ est inversible, et il en va de même pour $(M - 2I_n)^2$.

Comme $M^3 - 4M^2 + 4M = (M - 2I_n)^2 M = 0_n$, on obtient $M = 0_n$ en multipliant par $((M - 2I_n)^2)^{-1}$.

Finalement :

La seule matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M^3 - 4M^2 + 4M = 0_n$ et $\text{Tr}(M) = 0$ est la matrice nulle.

Planche n° 10

Exercice I

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{nx^2}{1+nx} & \text{pour } x \in \mathbb{R}_+ \\ \frac{nx^3}{1+nx^2} & \text{pour } x \in \mathbb{R}_-^* \end{cases}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a, avec $\varepsilon = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0 \\ 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$:

$$f_n(x) = \frac{nx^{2+\varepsilon}}{1+nx^{1+\varepsilon}} = \frac{x^{2+\varepsilon}}{\frac{1}{n} + x^{1+\varepsilon}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{x^{2+\varepsilon}}{x^{1+\varepsilon}} = x.$$

De plus, $f_n(0) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Ainsi, (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $f : x \mapsto x$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$|f_n(x) - x| = \left| \frac{nx^2}{1+nx} - x \right| = \frac{x}{1+nx} = \frac{1}{n} \frac{nx}{1+nx} = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{1+nx} \right) \leq \frac{1}{n}.$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$:

$$|f_n(x) - x| = \left| \frac{nx^3}{1+nx^2} - x \right| = \frac{|x|}{1+nx^2} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \frac{2\sqrt{n}|x|}{1+(\sqrt{n}|x|)^2} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

car pour tout réel t , on a $1+t^2 - 2t = (1-t)^2 \geq 0$, donc $\frac{2t}{1+t^2} \leq 1$.

Comme $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$ quand $n \geq 4$, on obtient pour tout entier $n \geq 4$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $|f_n(x) - x| \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$,

soit pour tout entier $n \geq 4$:

$$\sup_{\mathbb{R}} |f_n - f| \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Et comme $\frac{1}{2\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on a $\sup_{\mathbb{R}} |f_n - f| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ par comparaison, autrement dit :

La suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $f : x \mapsto x$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$, car rationnelle sur chacun de ces deux intervalles, et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f_n'(x) = \begin{cases} n \frac{2x + nx^2}{(1+nx)^2} & \text{pour } x > 0 \\ n \frac{3x^2 + nx^4}{(1+nx^2)^2} & \text{pour } x < 0 \end{cases}$$

On a alors :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f_n'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f_n'(x) = 0.$$

Comme la fonction f_n est continue en 0 (car $\lim_{x \rightarrow 0^-} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = 0 = f_n(0)$), elle est de classe C^1 en 0, avec $f_n'(0) = 0$.

Ainsi, f_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $f_n'(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ et $f_n'(0) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Ainsi, (f_n') converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{pour } x \neq 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$.

On a vu que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, donc f_n' est continue sur $\mathbb{R}$ et si la convergence de (f_n') était uniforme sur $[-1, 1]$, alors la fonction limite serait continue sur $[-1, 1]$. Ce n'est pas le cas, car la fonction limite n'est pas continue en 0. Ainsi :

La suite (f_n') converge simplement sur $\mathbb{R}$ et ne converge pas uniformément sur $[-1, 1]$.

Exercice II

Une matrice M est diagonalisable si et seulement si elle admet un polynôme P annulateur scindé à racines simples. De plus, les valeurs propres de M sont des racines de P .

Posons $P = X^2 - 5X + 6 = (X - 2)(X - 3)$.

Le polynôme P est scindé à racines simples, donc si $P(A) = 0_n$:

A est diagonalisable et ses valeurs propres sont racines de $X^2 - 5X + 6$, donc 2 et/ou 3.

Notons $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$ la multiplicité de 2 dans le polynôme caractéristique de A , et $n - p$ est celle de 3.

Il existe alors $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $P^{-1}AP = D$ avec D diagonale et semblable à $\begin{pmatrix} 2I_p & 0_{p, n-p} \\ 0_{n-p, p} & 3I_{n-p} \end{pmatrix}$.

L'application f qui, à $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, associe $MD + DM$ est la somme de $M \mapsto MD$ et $M \mapsto DM$, qui sont des endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc :

L'application f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Quitte à remplacer $P \in GL_n(\mathbb{R})$ par $PQ \in GL_n(\mathbb{R})$ avec $D = Q \begin{pmatrix} 2I_p & 0_{p, n-p} \\ 0_{n-p, p} & 3I_{n-p} \end{pmatrix} Q^{-1}$ et $Q \in GL_n(\mathbb{R})$,

on peut supposer que $D = \begin{pmatrix} 2I_p & 0_{p, n-p} \\ 0_{n-p, p} & 3I_{n-p} \end{pmatrix}$.

Alors, pour tout $M = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $M_1 \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on a :

$$f(M) = MD + DM = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2I_p & 0_{p, n-p} \\ 0_{n-p, p} & 3I_{n-p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2I_p & 0_{p, n-p} \\ 0_{n-p, p} & 3I_{n-p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4M_1 & 5M_2 \\ 5M_3 & 6M_4 \end{pmatrix}.$$

Donc, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(M) = \lambda M \iff \begin{pmatrix} 4M_1 & 5M_2 \\ 5M_3 & 6M_4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda M_1 & \lambda M_2 \\ \lambda M_3 & \lambda M_4 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 4M_1 = \lambda M_1 \\ 5M_2 = \lambda M_2 \\ 5M_3 = \lambda M_3 \\ 6M_4 = \lambda M_4 \end{cases}$$

Ceci donne donc trois possibilités :

- $\lambda = 4$ et $\ker(f - 4id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) = \left\{ \begin{pmatrix} M_1 & 0_{p, n-p} \\ 0_{n-p, p} & 0_{n-p} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus M_1 \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \right\}$;
- $\lambda = 5$ et $\ker(f - 5id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0_p & M_2 \\ M_3 & 0_{n-p} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus M_2 \in \mathcal{M}_{p, n-p}(\mathbb{R}) \right\}$;

- $\lambda = 6$ et $\ker(f - 6id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0_p & 0_{p,n-p} \\ 0_{n-p,p} & M_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus M_4 \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{R}) \right\}$.

Or :

$$\dim \left\{ \begin{pmatrix} M_1 & 0_{p,n-p} \\ 0_{n-p,p} & 0_{n-p} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus M_1 \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \right\} = p^2$$

$$\dim \left\{ \begin{pmatrix} 0_p & M_2 \\ M_3 & 0_{n-p} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus M_2 \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{R}) \right\} = p(n-p) + (n-p)p = 2p(n-p)$$

$$\dim \left\{ \begin{pmatrix} 0_p & 0_{p,n-p} \\ 0_{n-p,p} & M_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus M_4 \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{R}) \right\} = (n-p)^2$$

Donc :

$$\begin{aligned} \dim \ker(f - 4id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) + \dim \ker(f - 5id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) + \dim \ker(f - 6id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) \\ = p^2 + 2p(n-p) + (n-p)^2 = (p+n-p)^2 = n^2 = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

Ceci prouve que :

f est diagonalisable.

Pour toute $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned} g(M) &= MA + AM \\ &= MPDP^{-1} + PDP^{-1}M \\ &= PP^{-1}(MPDP^{-1})PP^{-1} + PP^{-1}(PDP^{-1}M)PP^{-1} \\ &= P[(P^{-1}MP)D + D(P^{-1}MP)]P^{-1} \\ &= Pf(P^{-1}MP)P^{-1} \end{aligned}$$

Si on pose $\Psi : A \mapsto PAP^{-1}$, l'application Ψ est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de réciproque $\Psi^{-1} : A \mapsto P^{-1}AP$ et pour toute $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$g(M) = \Psi(f(\Psi^{-1}(M))).$$

Ainsi, $g = \Psi f \Psi^{-1}$, donc f et g sont semblables (en extrapolant le vocabulaire matricielle aux endomorphismes) et comme f est diagonalisable :

g est diagonalisable.

Planche n° 11**Exercice I**

Pour tout entier $n \geq 2$, la fonction $u_n : x \mapsto \frac{\ln x}{x^n \ln n}$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus :

- si $x \in]0, 1[$, $\frac{1}{x} > 1$ et par croissances comparées, $u_n(x) = \frac{(1/x)^n}{\ln n} \ln x \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$ (car $\ln x < 0$), donc $\sum u_n(x)$ diverge grossièrement et $S(x)$ n'est pas définie ;
- si $x \in]1, +\infty[$, alors $0 < \frac{1}{x} < 1$ et $u_n(x) = o_{n \rightarrow +\infty}((1/x)^n)$; comme la série géométrique $\sum (1/x)^n$ converge, $\sum u_n(x)$ converge et $S(x)$ est définie ;
- si $x = 1$, $\frac{\ln x}{x^n \ln n} = 0$, donc la série $\sum u_n(x)$ converge et $S(x)$ est définie.

Finalement :

Le domaine de convergence simple de S est $D = [1, +\infty[$.

Pour tout entier $n \geq 2$, la fonction u_n est dérivable sur D en tant que quotient de telles fonctions avec pour tout $x \in D$:

$$u_n'(x) = \frac{1}{\ln n} \frac{x^{n-1} - nx^{n-1} \ln x}{x^{2n}} = \frac{n}{x^{n+1} \ln n} \left(\frac{1}{n} - \ln x \right).$$

Donc, $u_n'(x) > 0$ quand $x < e^{1/n}$ et $u_n'(x) < 0$ quand $x > e^{1/n}$. Alors, u_n est strictement croissante sur $[1, e^{1/n}]$ et strictement décroissante sur $[e^{1/n}, +\infty[$. Comme de plus, u_n est positive sur D , on peut conclure que :

$$\sup_{x \in D} |u_n(x)| = \max_{x \in D} u_n(x) = u_n(e^{1/n}) = \frac{1}{en \ln n}.$$

Or, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t \ln t}$ est continue, positive et décroissante sur $[2, +\infty[$, donc par comparaison série-intégrale, on peut conclure que $\sum \frac{1}{n \ln n}$ (donc $\sum \frac{1}{en \ln n}$) converge si et seulement si l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t \ln t}$ converge. Mais, pour tout $X \in [2, +\infty[$, $\int_2^X \frac{dt}{t \ln t} = \ln(\ln X) - \ln(\ln 2)$ qui tend vers $+\infty$ quand $X \rightarrow +\infty$. Ainsi, $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t \ln t}$ diverge et il en va de même de $\sum \sup_D |u_n|$, donc :

S ne converge pas normalement sur D .

Soient $x \in]1, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\left| \sum_{k \geq n+1} u_k(x) \right| = \sum_{k \geq n+1} u_k(x) = \sum_{k \geq n+1} \frac{\ln x}{x^k \ln k} = \ln x \sum_{k \geq n+1} \frac{1}{\ln k} \left(\frac{1}{x}\right)^k.$$

Et comme $\ln x \geq 0$ et, pour tout $k \geq n+1$, $\frac{1}{\ln k} \left(\frac{1}{x}\right)^k \leq \frac{1}{\ln(n+1)} \left(\frac{1}{x}\right)^k$, on a :

$$\left| \sum_{k \geq n+1} u_k(x) \right| \leq \ln x \sum_{k \geq n+1} \frac{1}{\ln(n+1)} \left(\frac{1}{x}\right)^k = \frac{\ln x}{\ln(n+1)} \sum_{k \geq n+1} \left(\frac{1}{x}\right)^k = \frac{\ln x}{\ln(n+1)} \frac{x^{-n+1}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{1}{\ln(n+1)} \frac{1}{x^n} \frac{\ln x}{x-1}.$$

Or, l'étude de la fonction $x \mapsto \ln x - (x-1)$ montre qu'elle est décroissante sur $]1, +\infty[$ et nulle en 1, donc négative sur $]1, +\infty[$. Alors, pour $x \in]1, +\infty[$, on a $\frac{1}{x^n} < 1$ et $0 < \ln x \leq x-1$, donc $\frac{\ln x}{x-1} \leq 1$, d'où :

$$\left| \sum_{k \geq n+1} u_k(x) \right| \leq \frac{1}{\ln(n+1)}.$$

Comme $\left| \sum_{k \geq n+1} u_k(1) \right| = 0 \leq \frac{1}{\ln(n+1)}$, on a bien pour tout $x \in D$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\left| \sum_{k \geq n+1} u_k(x) \right| \leq \frac{1}{\ln(n+1)}}.$$

Comme $\frac{1}{\ln(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et pour tout entier $n \geq 2$, $\left| \sum_{k \geq n+1} u_k(x) \right| = \left| S(x) - \sum_{k=2}^n u_k(x) \right|$, le résultat ci-dessus permet de conclure que S converge uniformément sur D . Enfin, on vu que les fonctions u_n sont dérivables, donc continues, sur D . Avec la convergence uniforme, ceci permet de conclure que :

La fonction S est continue sur D .

L'inégalité $\left| \sum_{k \geq n+1} u_k(x) \right| = \left| S(x) - \sum_{k=2}^n u_k(x) \right| \leq \frac{1}{\ln(n+1)} \frac{1}{x^n} \frac{\ln x}{x-1}$ établie plus haut est vraie pour tout

$x \in]1, +\infty[$ et tout entier $n \geq 2$. Avec $\frac{\ln x}{x-1} \leq 1$ et en prenant $n = 2$, on obtient :

$$\left| S(x) - u_2(x) \right| \leq \frac{1}{\ln 3} \frac{1}{x^2}.$$

Comme $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable sur D , $S - u_2$ l'est aussi.

De plus, $u_2(x) = \frac{\ln x}{x^2 \ln n} = \frac{1}{\ln n} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \frac{1}{x^{1.5}} = o\left(\frac{1}{x^{1.5}}\right)$ et $x \mapsto \frac{1}{x^{1.5}}$ est intégrable sur D , donc u_2 est intégrable sur D .

Finalement, $S = S - u_2 + u_2$ est la somme de deux fonctions intégrables sur D , donc :

La fonction S est intégrable sur D .

Exercice II

Soit $x \in \ker f^2 \cap \ker(f - 2Id)$. On a $f^2(x) = 0$ et $f(x) = 2x$. D'où :

$$f^2(x) = f(2x) = 2f(x) = 4x = 0.$$

Donc, $x = 0$. Ceci prouve que $\ker f^2 \cap \ker(f - 2Id) = \{0\}$, autrement dit :

$\ker f^2$ et $\ker(f - 2Id)$ sont en somme directe.

$$\text{On a } A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarquons que $\text{rg}(f^2) = 1$, donc $\dim \ker f^2 = 2$ (d'après le théorème du rang).

Si on note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a donc :

$$f^2(e_1) = f^2(e_2) = -f^2(e_3) = 2e_1 + 2e_2$$

Alors, $f^2(e_1 - e_2) = 0$ donc $e_1 - e_2 \in \ker f^2$, mais $f(e_1) \neq f(e_2)$, donc $e_1 - e_2 \notin \ker f$ et ainsi :

Le vecteur $e_1 - e_2$ appartient à $\ker f^2$, mais pas à $\ker f$.

Soit $x = (a, b, c) \in \ker(f - 2Id)$. On a :

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b-c \\ -a+3b-3c \\ -2+2b-2c \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b-c = 2a \\ -a+3b-3c = 2b \\ -2a+2b-2c = 2c \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -a+b-c = 0 \\ -a+b-3c = 0 \\ -2a+2b-4c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = a(e_1 + e_2) \end{aligned}$$

Donc :

$$\ker(f - 2Id) = \text{Vect}(e_1 + e_2).$$

Si $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle f a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, alors :

- $f(\varepsilon_1) = 0$, donc $\varepsilon_1 \in \ker f$;
- $f(\varepsilon_2) = \varepsilon_1$, alors $f^2(\varepsilon_2) = f(\varepsilon_1) = 0$, donc $\varepsilon_2 \in \ker f^2$ et $\varepsilon_2 \notin \ker f$;
- $f(\varepsilon_3) = 2\varepsilon_3$, donc $\varepsilon_3 \in \ker(f - 2Id)$.

Posons alors $\varepsilon_2 = e_1 - e_2$, $\varepsilon_1 = f(\varepsilon_2) = f(e_1) - f(e_2) = -4(e_2 + e_3)$ et $\varepsilon_3 = e_1 + e_2$.

Comme ε_1 et ε_2 ne sont pas colinéaires et appartiennent tous les deux à $\ker f^2$ (on vient de voir que c'est le cas pour $\varepsilon_2 = e_1 - e_2$ et $\varepsilon_1 \in \ker f \subset \ker f^2$), on a $\text{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \subset \ker f^2$ et $\dim \ker f^2 \geq 2$.

Mais on vu que $\dim \ker f^2 \leq 2$ donc $\dim \ker f^2 = 2$ et $\ker f^2 = \text{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

Alors :

$$\ker f^2 \oplus \ker(f - 2Id) = \text{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \oplus \text{Vect}(\varepsilon_3) = E.$$

Et ainsi :

$$\mathcal{B} = (-4(e_2 + e_3), e_1 - e_2, e_1 + e_2) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3 \text{ dans laquelle } M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si $g^2 = f$, alors on a $f^2 = g^4$ est un polynôme en g , donc f^2 et g commutent, d'où :

$$\ker f^2 \text{ est stable par } g.$$

Notons alors $\tilde{g}$ l'endomorphisme induit par g sur $\ker f^2 = \text{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. On a :

$$\begin{aligned} \tilde{g}^2(\varepsilon_1) &= g^2(\varepsilon_1) = f(\varepsilon_1) = 0 \\ \tilde{g}^2(\varepsilon_2) &= g^2(\varepsilon_2) = f(\varepsilon_2) = \varepsilon_1 \end{aligned}$$

Donc, $M_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}(\tilde{g}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et le polynôme caractéristique de $\tilde{g}$ est $\chi_{\tilde{g}} = X^2$. Alors, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\tilde{g}^2 = 0$, ce qui est absurde car $\tilde{g}^2(\varepsilon_2) = \varepsilon_1 \neq 0$.

Ceci permet de conclure que :

$$\text{Il n'existe pas de } g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) \text{ tel que } g^2 = f.$$

Planche n° 12**Exercice I**

On a $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$, donc avec $Z = X + Y + 1$, on a bien $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a avec l'indépendance de X et Y :

$$P(Z = n+1) = P(X + Y = n) = \sum_{k=0}^n P(X = k, Y = n-k) = \sum_{k=0}^n P(X = k) P(Y = n-k).$$

Comme $\sum_{n=0}^{+\infty} P(Y = n) = 1$, il existe au moins un $k \in \mathbb{N}$ tel que $P(Y = k) \neq 0$. Posons alors :

$$p = \min \{k \in \mathbb{N}, P(Y = k) \neq 0\}.$$

Alors, si $n \geq p$, on a $P(Z = n+1) \geq P(X = n-p) P(Y = p)$, soit avec $P(Y = p) > 0$:

$$0 \leq (n-p) P(X = n-p) \leq \frac{1}{P(Y = p)} (n-p) P(Z = n+1).$$

Comme la variable Z suit une loi géométrique, elle admet une espérance, donc la série $\sum n P(Z = n)$ converge, donc la série $\sum (n-p) P(Z = n+1)$ converge aussi et ainsi,

La série $\sum P(Z = n)$ converge aussi (de somme 1) et donc $\sum_{n \geq p} (n-p) P(X = n-p)$ converge, donc

$\sum_{n \geq 0} n P(X = n)$ converge, autrement dit X admet une espérance.

Avec $0 \leq (n-p)^2 P(X = n-p) \leq \frac{1}{P(Y = p)} (n-p)^2 P(Z = n+1)$ et le fait que Z admet une variance (loi géométrique), on montre de même que $\sum_{n \geq 0} n^2 P(X = n)$ converge, et donc que X admet une variance.

Finalement :

X admet une espérance et une variance.

Comme X et Y suivent la même loi, on a, par linéarité de l'espérance :

$$E(Z) = E(X + Y + 1) = E(X) + E(Y) + 1 = 2E(X) + 1.$$

Avec $E(Z) = \frac{1}{p}$ (loi géométrique de paramètre p), on obtient :

$$E(X) = \frac{1-p}{2p}$$

Comme X et Y sont indépendantes, on a :

$$V(Z) = V(X + Y + 1) = V(X + Y) = V(X) + V(Y) = 2V(X).$$

Donc, avec $V(Z) = \frac{1-p}{p^2}$:

$$\boxed{V(X) = \frac{1-p}{2p^2}}$$

Comme X et Y sont indépendantes, on a $G_{X+Y} = G_X G_Y$ et comme X et Y suivent la même loi, $G_X = G_Y$. Avec $Z = X + Y + 1$, on obtient :

$$G_{Z-1} = G_{X+Y} = G_X G_Y = G_X^2.$$

Or, Z suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$, donc pour tout $t \in \left] -\frac{1}{1-p}, \frac{1}{1-p} \right[$:

$$tG_{Z-1}(t) = tE(t^{Z-1}) = E(t^Z) = G_Z(t) = \frac{pt}{1-(1-p)t}.$$

Soit $G_{Z-1}(t) = \frac{p}{1-(1-p)t}$ et donc, pour tout $t \in \left] -\frac{1}{1-p}, \frac{1}{1-p} \right[$:

$$G_X^2(t) = \frac{p}{1-(1-p)t}.$$

Or, $G_X(t) = E(t^X) > 0$, donc pour tout $t \in \left] -\frac{1}{1-p}, \frac{1}{1-p} \right[$:

$$\boxed{G_X(t) = \sqrt{\frac{p}{1-(1-p)t}}}$$

Pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$(1-x)^{-1/2} = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}-1\right) \dots \left(-\frac{1}{2}-n+1\right) (-1)^n x^n = \sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{2^{2n}}.$$

Donc pour tout $t \in \left] -\frac{1}{1-p}, \frac{1}{1-p} \right[$:

$$G_X(t) = \sqrt{p} (1-(1-p)t)^{-1/2} = \sqrt{p} \sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} \frac{((1-p)t)^n}{2^{2n}} = \sum_{n \geq 0} \sqrt{p} \binom{2n}{n} \frac{(1-p)^n}{2^{2n}} t^n.$$

Comme $G_X(t) = \sum_{n \geq 0} P(X = n) t^n$, on obtient grâce à l'unicité du développement en série entière, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{P(X = n) = \sqrt{p} \binom{2n}{n} \frac{(1-p)^n}{2^{2n}}}$$

Exercice II

D'après le cours :

$$(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt \text{ est un produit scalaire sur } E = C([-1, 1], \mathbb{R}).$$

La fonction nulle appartient à F et G , et toute combinaison linéaire de deux fonctions de E nulles sur $[a, b] \subset [-1, 1]$ est nulle sur $[a, b]$, donc F et G sont stables par combinaison linéaire et ainsi, ce sont des sous-espaces vectoriels de E .

Soit maintenant $(f, g) \in F \times G$. On a :

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt = \int_{-1}^0 f(t)g(t) dt + \int_0^1 f(t)g(t) dt = \int_{-1}^0 f(t)0 dt + \int_0^1 0g(t) dt = 0.$$

Donc :

F et G sont deux sous-espaces orthogonaux de E .

Soit $h = f + g \in F + G$ avec $(f, g) \in F \times G$. On a alors $h(0) = f(0) + g(0) = 0 + 0 = 0$, donc toute fonction de $F + G$ s'annule en 0. Or, toute fonction de E ne s'annule pas forcément en 0, donc :

F et G ne sont pas supplémentaires.

Comme $G \perp F$, on a :

$$G \subset F^\perp$$

Soit $g \in F^\perp$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n(x) = \begin{cases} g(0) & \text{quand } x \in \left[-1, -\frac{1}{n}\right] \\ -ng(0)x & \text{quand } x \in \left[-\frac{1}{n}, 0\right] \\ 0 & \text{quand } x \in [0, 1] \end{cases}$$

La fonction f_n est continue sur $[-1, 1]$ (car affine par morceaux avec raccordement en $-\frac{1}{n}$ et 0).

On a :

$$\begin{aligned} \langle f_n, g \rangle &= \int_{-1}^1 f_n(t)g(t) dt = \int_{-1}^{-\frac{1}{n}} f_n(t)g(t) dt + \int_{-\frac{1}{n}}^0 f_n(t)g(t) dt \\ &= \int_{-1}^{-\frac{1}{n}} g(0)g(t) dt + \int_{-\frac{1}{n}}^0 (-ng(0)t)g(t) dt \end{aligned}$$

Soit :

$$\langle f_n, g \rangle = g(0) \int_{-1}^{-\frac{1}{n}} g(t) dt - ng(0) \int_{-\frac{1}{n}}^0 t g(t) dt$$

La fonction f_n est nulle sur $[0,1]$, donc elle appartient à F et, comme $g \in F^\perp$, on a $\langle f_n, g \rangle = 0$.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $g(0) \int_{-1}^{-\frac{1}{n}} g(t) dt - n g(0) \int_{-\frac{1}{n}}^0 t g(t) dt = 0$, soit :

$$g(0) \int_{-1}^{-\frac{1}{n}} g(t) dt = n g(0) \int_{-\frac{1}{n}}^0 t g(t) dt.$$

Donc :

$$g(0) \int_{-1}^0 g(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[g(0) \int_{-1}^{-\frac{1}{n}} g(t) dt \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[n g(0) \int_{-\frac{1}{n}}^0 t g(t) dt \right].$$

Or, comme g est continue sur le segment $[-1,1]$, elle est bornée et il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $t \in [-1,1]$, $|g(t)| \leq M$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| n g(0) \int_{-\frac{1}{n}}^0 t g(t) dt \right| \leq n |g(0)| \int_{-\frac{1}{n}}^0 (-t) |g(t)| dt \leq n |g(0)| \int_{-\frac{1}{n}}^0 (-t) M dt = \frac{|g(0)| M}{2n}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|g(0)| M}{2n} = 0$, le théorème des gendarmes donne $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[n g(0) \int_{-\frac{1}{n}}^0 t g(t) dt \right] = 0$ et ainsi :

$$\boxed{g(0) \int_{-1}^0 g(t) dt = 0}$$

On pose :

$$f(x) = \begin{cases} g(x) - g(0) & \text{quand } x \in [-1,0] \\ 0 & \text{quand } x \in [0,1] \end{cases}$$

La fonction f est continue sur $[-1,1]$ (car g l'est et on raccorde en 0) et nulle sur $[0,1]$, donc $f \in F$.

Comme $g \in F^\perp$, on a $\langle f, g \rangle = 0$, soit :

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t) g(t) dt = \int_{-1}^0 [g(t) - g(0)] g(t) dt = \int_{-1}^0 g(t)^2 dt - g(0) \int_{-1}^0 g(t) dt = 0.$$

Donc, avec ce qui précède :

$$\int_{-1}^0 g(t)^2 dt = g(0) \int_{-1}^0 g(t) dt = 0.$$

Comme g^2 est continue (car g l'est) et positive sur $[-1,0]$, on a $g^2 = 0$, soit $g = 0$, sur $[-1,0]$.

Ainsi, g est continue et nulle sur $[-1,0]$, donc :

$$\boxed{g \in G}$$

On vient donc de montrer que pour tout $g \in F^\perp$, on a $g \in G$, autrement dit, $F^\perp \subset G$ et comme on avait déjà $G \subset F^\perp$, on en conclut que :

$$\boxed{G = F^\perp}$$

Préparation aux oraux : CCP – Série 4
Planche n° 13
Exercice I

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est définie sur $\mathbb{R}$ et impaire.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$f_n(x) = xe^{-\sqrt{n|x|}} = \frac{1}{n} \sqrt{nx^2} e^{-\sqrt{nx}} = \frac{1}{n} g(\sqrt{nx})$$

avec $g(t) = t^2 e^{-t}$.

La fonction g est définie, positive et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ (en tant que produit de telles fonctions) et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $g'(t) = (2-t)te^{-t}$. Alors, g' est positive sur $[0, 2]$, donc g est croissante sur $[0, 2]$, et négative sur $[2, +\infty[$, donc g est décroissante sur $[2, +\infty[$. Ainsi, g admet un maximum en 2 et, comme g est positive, on obtient pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$|g(t)| \leq g(2) = \frac{4}{e}.$$

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|f_n(x)| = \frac{1}{n} g(\sqrt{nx}) \leq \frac{1}{n} g(2) = \frac{1}{n} \frac{4}{e} = \left| f_n\left(\frac{4}{n}\right) \right|.$$

Comme f_n est impaire et $f_n(0) = 0$, cette inégalité reste vraie sur $\mathbb{R}$ entier, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ et

$$\text{tout } n \in \mathbb{N}^*, |f_n(x)| \leq \left| f_n\left(\frac{4}{n}\right) \right| = \frac{4}{en}.$$

Comme $\frac{4}{en} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, le théorème des gendarmes permet alors de conclure que :

La suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Ce qui précède permet aussi de conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = \max_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = \left| f_n\left(\frac{4}{n}\right) \right| = \frac{4}{en}$$

Remarquons que $f_0 : x \mapsto x$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$, donc $|f_0|$ n'admet pas de borne supérieure.

Comme $\frac{4}{en} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, le résultat ci-dessus permet de conclure que :

La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} [n^2 f_n(x)] = \lim_{n \rightarrow +\infty} [n^2 x e^{-\sqrt{nx}}] = \frac{x}{|x|^2} \lim_{n \rightarrow +\infty} [\sqrt{n} |x|^4 e^{-\sqrt{nx}}] = \frac{x}{|x|^2} \lim_{X \rightarrow +\infty} X^4 e^{-X} = 0.$$

Ceci reste vrai pour $x = 0$ (car $n^2 f_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) et donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_n(x) = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right).$$

Et, comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, $\sum f_n(x)$ converge et donc :

La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

On a vu que $\sup_{\mathbb{R}} |f_n| = \frac{4}{en}$ et la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge donc :

La série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}$.

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f_n(x) = \frac{1}{n} g(\sqrt{nx})$ et g est décroissante sur $[2, +\infty[$.

Or, on a $\sqrt{nx} \geq 2$ pour $nx \geq 4$, donc si $na \geq 4$, soit $n \geq \frac{4}{a}$, on a $\sqrt{nx} \in [2, +\infty[$ pour tout $x \in [a, +\infty[$ et donc la fonction f_n est décroissante sur $[a, +\infty[$.

Comme f_n est positive sur $\mathbb{R}_+$, on obtient en posant $N = E\left(\frac{4}{a}\right) + 1$, pour tout entier $n \geq N$:

$$\sup_{x \in [a, +\infty[} |f_n(x)| = |f_n(a)| = f_n(a).$$

Par imparité de f_n , on a alors pour tout entier $n \geq N$:

$$\sup_{x \in \mathbb{R} \setminus]-a, a[} |f_n(x)| = f_n(a).$$

Et comme la série $\sum f_n(a)$ converge :

Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, la série $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R} \setminus]-a, a[$.

Exercice II

D'après le cours, N_0 est la norme 1 (donc c'est une norme).

L'application $N_1 : f \mapsto \left| \int_0^1 f(t) dt \right| + \int_0^1 |f'(t)| dt$ est bien définie sur E , car pour $f \in E$, f et f' , donc $|f'|$, sont continues sur $[0, 1]$. De plus, N_1 est homogène par linéarité de l'intégrale.

Pour toute $f \in E$, on a :

$$N_1(f) = \left| \int_0^1 f(t) dt \right| + \int_0^1 |f'(t)| dt = 0 \Leftrightarrow \left| \int_0^1 f(t) dt \right| = \int_0^1 |f'(t)| dt = 0.$$

Comme $|f'|$ est continue et positive sur $[0,1]$, $\int_0^1 |f'(t)| dt = 0$ donne $|f'| = 0$, donc $f' = 0$ et f est constante. Avec $\int_0^1 f(t) dt = 0$, on obtient $f = 0$.

Pour toutes $f, g \in E$, on a :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 (f+g) \right| &= \left| \int_0^1 f + \int_0^1 g \right| \leq \left| \int_0^1 f \right| + \left| \int_0^1 g \right| \\ \int_0^1 |(f+g)'| &= \int_0^1 |f' + g'| \leq \int_0^1 (|f'| + |g'|) = \int_0^1 |f'| + \int_0^1 |g'| \end{aligned}$$

Donc :

$$N_1(f+g) = \left| \int_0^1 (f+g) \right| + \int_0^1 |(f+g)'| \leq \left| \int_0^1 f \right| + \left| \int_0^1 g \right| + \int_0^1 |f'| + \int_0^1 |g'| = N_1(f) + N_1(g).$$

Ainsi, N_1 est une norme.

Enfin, pour $f \mapsto \cos(2\pi t)$, on a $f \in E$ et :

$$\begin{aligned} N_2(f) &= \left| \int_0^1 f(t) dt \right| + \left| \int_0^1 f'(t) dt \right| + \left| \int_0^1 f''(t) dt \right| = \left| \int_0^1 f(t) dt \right| + |f(1) - f(0)| + |f'(1) - f'(0)| \\ &= \left| \int_0^1 \cos(2\pi t) dt \right| + |1-1| + |0-0| = \left| \frac{1}{2\pi} [\sin(2\pi t)]_0^1 \right| \end{aligned}$$

Donc, $N_2(f) = 0$ avec $f \neq 0$, ce qui prouve que N_2 n'est pas une norme.

Finalement :

N_0 et N_1 sont des normes et N_2 n'en est pas une.

... et, ô surprise, on ne reparle plus de N_2 dans la suite !

Soit $f \in E$ et $F : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$. Comme f est continue sur $[0,1]$, F , qui est une primitive de f , est de classe C^1 sur $[0,1]$ (et même C^3 , car f est C^2). Le théorème des accroissements finis assure alors l'existence de $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = \frac{F(1) - F(0)}{1 - 0}$, autrement dit, avec $F(1) = \int_0^1 f(t) dt$ et $F(0) = 0$:

Il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = \int_0^1 f(t) dt$.

Soit $f \in E$. Le résultat précédent n'utilise que la continuité de f sur $[0,1]$. Comme $|f|$ est aussi continue sur ce segment, il existe $c, d \in [0,1]$ tels que $f(c) = \int_0^1 f(t) dt$ et $|f(d)| = \int_0^1 |f(t)| dt$.

Alors :

$$\int_0^1 |f(t)| dt - \left| \int_0^1 f(t) dt \right| = |f(d)| - |f(c)| \leq \|f(d) - f(c)\| \leq |f(d) - f(c)| = \left| \int_c^d f'(t) dt \right|.$$

Or, comme $c, d \in [0, 1]$, on a $0 \leq \min(c, d) \leq \max(c, d) \leq 1$ et :

$$\left| \int_c^d f'(t) dt \right| \leq \int_{\min(c, d)}^{\max(c, d)} |f'(t)| dt \leq \int_0^1 |f'(t)| dt.$$

Ainsi :

$$\int_0^1 |f(t)| dt - \left| \int_0^1 f(t) dt \right| \leq \int_0^1 |f'(t)| dt \Leftrightarrow \int_0^1 |f(t)| dt \leq \left| \int_0^1 f(t) dt \right| + \int_0^1 |f'(t)| dt.$$

Soit, pour toute $f \in E$:

$$N_0(f) \leq N_1(f)$$

Pour $f : x \mapsto 1$ sur $[0, 1]$, on a $f \in E$ et $N_0(f) = N_1(f) = 1$, donc :

$$\text{On peut avoir l'égalité } N_0(f) = N_1(f).$$

Enfin, soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : x \mapsto x^n$ sur $[0, 1]$. On a $f_n \in E$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et :

$$N_0(f_n) = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$$

$$N_1(f_n) = \left| \int_0^1 t^n dt \right| + \int_0^1 n t^{n-1} dt = \frac{1}{n+1} + 1 = \frac{n+2}{n+1}$$

Donc, $\frac{N_1(f_n)}{N_0(f_n)} = n+2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, donc, $\left(\frac{N_1(f_n)}{N_0(f_n)} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'est pas majorée et ainsi :

$$\text{Il n'existe aucun réel } a \text{ tel que pour toute } f \in E, N_1(f) \leq a N_0(f).$$

Planche n° 14

Exercice I

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1} > 0$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ (donc $n-1 \in \mathbb{N}^*$) :

$$0 < e^{-u_{n-1}} < 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{e^{-u_{n-1}}}{n} < \frac{1}{n} \Leftrightarrow 0 < u_n < \frac{1}{n}.$$

Le théorème des gendarmes donne alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $nu_n = e^{-u_{n-1}}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n-1} = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-u_{n-1}} = 1$, soit :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = 1}$$

Ce qui précède donne $u_n \sim \frac{1}{n}$ et comme la série harmonique diverge :

$$\boxed{\sum u_n \text{ diverge.}}$$

Comme $u_n \sim \frac{1}{n}$, on peut écrire $u_n = \frac{1}{n}(1 + \varepsilon_n)$ avec $\varepsilon_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{1}{n+1}(1 + \varepsilon_{n+1}) = \frac{e^{-u_n}}{n+1} = \frac{1}{n+1}e^{-u_n} \Leftrightarrow \varepsilon_{n+1} = e^{-u_n} - 1.$$

Or, $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, donc $\varepsilon_{n+1} = e^{-u_n} - 1 \sim -u_n \sim -\frac{1}{n} \sim -\frac{1}{n+1}$ et ainsi $\varepsilon_n \sim -\frac{1}{n}$, soit :

$$\varepsilon_n = -\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Alors :

$$(-1)^n u_n = \frac{(-1)^n}{n}(1 + \varepsilon_n) = \frac{(-1)^n}{n} \left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{(-1)^n}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Si on pose $v_n = (-1)^n u_n - \frac{(-1)^n}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

Ceci donne $|v_n| \sim \frac{1}{n^2}$ et comme la série $\sum \frac{1}{n^2}$, la série $\sum v_n$ est absolument convergente, donc convergente. Or, $(-1)^n u_n = v_n + \frac{(-1)^n}{n}$ et la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge car elle vérifie le critère spécial des séries alternées. Ainsi, la série $\sum (-1)^n u_n$ est la somme de deux séries convergentes, et donc :

$$\boxed{\sum (-1)^n u_n \text{ converge.}}$$

Exercice II

On a :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notons $\mathcal{B}_c = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A et $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A (identifiées à des vecteurs de $\mathbb{R}^n$).

Les colonnes C_1 et C_n ne sont pas colinéaires et sont les seules colonnes non nulles de A , donc :

$$\boxed{rg(A) = 2}$$

On a $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc $\text{Im } A^2 = \text{Vect}(C_1, C_n) = \text{Im } A$ et ainsi :

$$\boxed{rg(A^2) = 2}$$

Remarquons que par le théorème du rang, on a $\dim \ker A = n - 2$ et comme $C_2 = \dots = C_{n-1} = 0$, soit, $u(e_2) = \dots = u(e_{n-1}) = 0$, on a $\ker A = \text{Vect}(e_2, \dots, e_{n-1})$.

Or :

$$\begin{aligned} \text{Vect}(e_2, \dots, e_{n-1}, C_1, C_n) &= \text{Vect}\left(e_2, \dots, e_{n-1}, \sum_{k=2}^n e_k, \sum_{k=1}^{n-1} e_k\right) \\ &= \text{Vect}\left(e_2, \dots, e_{n-1}, \sum_{k=2}^n e_k - \sum_{k=2}^{n-1} e_k, \sum_{k=1}^{n-1} e_k - \sum_{k=2}^{n-1} e_k\right) \\ &= \text{Vect}(e_2, \dots, e_{n-1}, e_n, e_1) = \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{B} = (e_2, \dots, e_{n-1}, C_1, C_n)$ est une famille de $n = \dim \mathbb{R}^n$ vecteurs génératrice de $\mathbb{R}^n$: c'est une base de $\mathbb{R}^n$. Comme $\ker A = \text{Vect}(e_2, \dots, e_{n-1})$ et $\text{Im } A = \text{Vect}(C_1, C_n)$, on a bien :

$$\boxed{\ker A \oplus \text{Im } A = \mathbb{R}^n}$$

De plus, comme $\ker A$ et $\text{Im } A$ sont stable par u , on a :

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} B_0 & 0_{n-2,2} \\ 0_{2,n-2} & B \end{pmatrix}$$

avec $B_0 \in \mathcal{M}_{n-2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Et B_0 est la matrice de l'endomorphisme induit par u sur $\ker A = \ker u$, donc $B_0 = 0_{n-2}$ et ainsi :

$$\boxed{\text{On peut réduire } A \text{ sous la forme } A' = \begin{pmatrix} 0_{n-2} & 0_{n-2,2} \\ 0_{2,n-2} & B \end{pmatrix} \text{ avec } B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).}$$

Remarquons que réduire A sous la forme A' veut dire que cette matrice et A sont semblables, et il en va de même pour A^2 et A'^2 , donc $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(A')$ et $\text{Tr}(A^2) = \text{Tr}(A'^2)$.

Or, $Tr(A) = 0$, $Tr(A^2) = 2$, $Tr(A') = Tr(B)$ et $Tr(A'^2) = Tr\left[\begin{pmatrix} 0_{n-2} & 0_{n-2,2} \\ 0_{2,n-2} & B^2 \end{pmatrix}\right] = Tr(B^2)$, donc :

$$Tr(B) = 0 \text{ et } Tr(B^2) = 2$$

On a $rg(B) = rg(A') = rg(A) = 2$ et comme $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

B est inversible.

Les matrices A et A^2 (calculée plus haut) donne $u(e_1) = C_1$, $u(e_n) = C_n$ et :

$$\begin{cases} u(C_1) = u(u(e_1)) = u^2(e_1) = C_n \\ u(C_n) = u(u(e_n)) = u^2(e_n) = C_1 \end{cases}$$

Et comme B est la matrice dans (C_1, C_n) de l'endomorphisme induit par u sur $\text{Im } A = \text{Vect}(C_1, C_n)$, on a :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors, $\chi_B = X^2 - 1$, donc $\chi_A = X^{n-2}(X^2 - 1)$ et ainsi :

$$Sp(A) = \{-1, 0, 1\}$$

Remarquons que cette méthode n'est sans doute pas celle attendue car elle ne fait pas intervenir les deux traces calculées.

Si on note $Sp_{\mathbb{C}}(A)$ le spectre complexe de A , on a $Sp_{\mathbb{C}}(A) = \{0, \lambda_1, \lambda_2\}$ avec λ_1 et λ_2 non nulles, on a $Sp_{\mathbb{C}}(B) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ et $Tr(B) = \lambda_1 + \lambda_2 = 0$, donc $\lambda_2 = -\lambda_1$.

Comme B est trigonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, la trace de B^2 est $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 2\lambda_1^2 = 2$, donc $\lambda_1^2 = 1$ et ainsi, $Sp_{\mathbb{C}}(B) = \{\lambda_1, \lambda_2\} = \{-1, 1\}$ et donc on retrouve : $Sp(A) = \{-1, 0, 1\}$.

Ainsi, A possède trois valeurs propres distinctes et comme $\dim \ker A = n - 2$, on peut conclure que :

A est diagonalisable.

Remarquons qu'avec $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 0_{n-2} & 0_{n-2,2} \\ 0_{2,n-2} & B \end{pmatrix}$ est symétrique réelle, donc diagonalisable (d'après le théorème spectral) et donc A , qui est semblable à A' , l'est aussi.

Planche n° 15**Exercice I**

Comme f est un automorphisme de E , $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base de E , car $(e_1, \dots, e_n)$ en est une.

De plus, pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $i \neq j$, on a $\langle e_i, e_j \rangle = 0$, donc $\langle f(e_i), f(e_j) \rangle = 0$ et ainsi :

La famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base orthogonale de E .

Soient $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Par linéarité de f , on a :

$$\langle f(e_i) + f(e_j), f(e_i) - f(e_j) \rangle = \langle f(e_i + e_j), f(e_i - e_j) \rangle.$$

Or, $\langle e_i + e_j, e_i - e_j \rangle = \|e_i\|^2 - \|e_j\|^2 = 1 - 1 = 0$, donc $\langle f(e_i + e_j), f(e_i - e_j) \rangle = 0$, soit :

$$\langle f(e_i) + f(e_j), f(e_i) - f(e_j) \rangle = 0$$

Comme ci-dessus, on a $\langle f(e_i) + f(e_j), f(e_i) - f(e_j) \rangle = \|f(e_i)\|^2 - \|f(e_j)\|^2$, donc :

$$\|f(e_i)\|^2 - \|f(e_j)\|^2 = 0 \Leftrightarrow \|f(e_i)\|^2 = \|f(e_j)\|^2 \Leftrightarrow \|f(e_i)\| = \|f(e_j)\| \neq 0.$$

Ceci est vrai pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

De plus, f est un automorphisme et $e_i \neq 0$, donc $f(e_i) \neq 0$, soit $\|f(e_i)\| > 0$, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

On peut alors conclure que :

Il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $\|f(e_i)\| = \alpha$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Si on pose $g = \frac{1}{\alpha} f$, on a pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\langle g(e_i), g(e_j) \rangle = \frac{1}{\alpha^2} \langle f(e_i), f(e_j) \rangle = \begin{cases} 0 & \text{quand } i \neq j \\ \frac{1}{\alpha^2} \|f(e_i)\|^2 = 1 & \text{quand } i = j \end{cases}$$

Donc, $(g(e_1), \dots, g(e_n))$ est une base orthonormée de E , ce qui implique que g est une isométrie.

Comme $f = \alpha g$:

f est la composée d'une isométrie et d'une homothétie.

Exercice II

Pour $N = j$ fixé, j électrons sont émis successivement et sont efficaces indépendamment les uns des autres avec une probabilité $p \in]0,1[$. On reconnaît un schéma de Bernoulli, donc, le nombre X d'électrons efficaces suit une loi binomiale de paramètres j et p , soit :

$$P_{(N=j)}(X = k) = \begin{cases} \binom{j}{k} p^k (1-p)^{j-k} & \text{quand } k \leq j \\ 0 & \text{quand } k > j \end{cases}$$

Comme N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, on a alors pour tous $j, k \in \mathbb{N}$:

$$P(N = j, X = k) = P(N = j)P_{(N=j)}(X = k) = \begin{cases} e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{j!} \binom{j}{k} p^k (1-p)^{j-k} & \text{quand } k \leq j \\ 0 & \text{quand } k > j \end{cases}$$

On a alors pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \sum_{j=0}^{+\infty} P(N = j, X = k) = \sum_{j=k}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{j!} \binom{j}{k} p^k (1-p)^{j-k} \\ &= \sum_{j=k}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{k!(j-k)!} p^k (1-p)^{j-k} = \sum_{j=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{j+k}}{k!j!} p^k (1-p)^j \\ &= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{[\lambda(1-p)]^j}{j!} = e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{\lambda(1-p)} = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$X \text{ suit une loi de Poisson de paramètre } \lambda p \text{ et } E(X) = V(X) = \lambda p.$$

On montre de même que Y suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda(1-p)$.

Soit alors $i, j \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} P(X = i, Y = j) &= P(N = i + j, X = i) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!} \binom{i+j}{i} p^i (1-p)^j \\ P(X = i)P(Y = j) &= e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^i}{i!} e^{-\lambda(1-p)} \frac{[\lambda(1-p)]^j}{j!} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!} \frac{(i+j)!}{i!j!} p^i (1-p)^j \end{aligned}$$

Donc, $P(X = i, Y = j) = P(X = i)P(Y = j)$ pour tous $i, j \in \mathbb{N}$, ce qui prouve que :

Les variables X et Y sont indépendantes.

Comme $N = X + Y$, on a $Cov(X, N) = Cov(X, X + Y)$, donc par linéarité à droite de la covariance, on a :

$$Cov(X, N) = Cov(X, X) + Cov(X, Y).$$

Comme X et Y sont indépendantes, $Cov(X, Y) = 0$ et donc :

$$Cov(X, N) = Cov(X, X) = V(X).$$

Soit :

$$Cov(X, N) = \lambda p$$

On a $Cov(X, N) > 0$, donc les écarts entre les variables X et N et leurs espérances ont tendance à être de même signe, X et N varient dans le même sens.

Planche n° 16

Exercice I

Le rayon de convergence de $\sum \frac{x^n}{n!}$ est infini et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$.

Par définition, f_1 est la primitive de f_0 qui s'annule en 0. Comme f_0 est continue sur $\mathbb{R}$:

$$f_1 \text{ est } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}.$$

On a vu que f_0 est continue, soit C^0 , sur $\mathbb{R}$ et f_{n+1} est la primitive de f_n qui s'annule en 0, donc si f_n est C^n sur $\mathbb{R}$, alors f_{n+1} est C^{n+1} sur $\mathbb{R}$.

Ceci prouve par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n \text{ est } C^n \text{ sur } \mathbb{R}.$$

On admet la propriété (*) :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \exists K \in \mathbb{R}_+^*, \text{ tel que } \forall x \in [-a, a] \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x)| \leq K \frac{|x|^n}{n!}.$$

Comme la série $\sum \frac{|x|^n}{n!}$ converge pour tout réel x , la propriété ci-dessus implique que $\sum |f_n(x)|$ converge pour tout $x \in [-a, a]$, pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$. Alors, $\sum f_n(x)$ est absolument convergente donc convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$ et ainsi :

$$\text{La fonction } f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \text{ est définie sur } \mathbb{R}.$$

On a $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} f_{n+1}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_{n+1} est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec $f_{n+1}' = f_n$.

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe $K \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $x \in [-a, a]$:

$$|f_{n+1}'(x)| = |f_n(x)| \leq K \frac{|x|^n}{n!} \leq K \frac{a^n}{n!}.$$

La série $\sum K \frac{a^n}{n!}$ converge, donc $\sum f_{n+1}'$ converge normalement sur $[-a, a]$.

Ainsi, $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_{n+1}$ est de classe C^1 sur $[-a, a]$, de dérivée $f' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = f + f_0$. Comme ceci est vrai pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}, \text{ de dérivée } f' = f + f_0.$$

On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} f'(x) - e^{-x} f(x) = e^{-x} f_0(x)$ et $x \mapsto e^{-x} f'(x) - e^{-x} f(x)$ est la dérivée de $x \mapsto e^{-x} f(x)$, donc il existe un réel α tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$e^{-x} f(x) = \int_0^x e^{-t} f_0(t) dt + \alpha.$$

Mais, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(0) = 0$, donc $f(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(0) = 0$, d'où $\alpha = 0$ et ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = e^x \int_0^x e^{-t} f_0(t) dt$$

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Comme f_0 est continue sur $[-a, a]$, elle est bornée sur ce segment. On peut alors

poser $K = 1 + \sup_{[-a, a]} |f_0| \in \mathbb{R}_+^*$ et on a pour tout $x \in [-a, a]$, $|f_0(x)| \leq K = K \frac{|x|^0}{0!}$.

Montrons alors par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|f_n(x)| \leq K \frac{|x|^n}{n!}$ pour tout $x \in [-a, a]$.

On vient de voir que la propriété est vraie au rang $n = 0$.

Supposons qu'elle est vraie à un rang $n \in \mathbb{N}$. On a alors pour tout $x \in [-a, a]$:

$$|f_{n+1}(x)| = \left| \int_0^x f_n(t) dt \right| \leq \left| \int_0^x |f_n(t)| dt \right| \leq \left| \int_0^x K \frac{|t|^n}{n!} dt \right| = \frac{K}{n!} \left| \int_0^x |t|^n dt \right|.$$

Or :

- Si $x \geq 0$, $\left| \int_0^x |t|^n dt \right| = \int_0^x t^n dt = \frac{|x|^{n+1}}{n+1}$.
- Si $x \leq 0$, $\left| \int_0^x |t|^n dt \right| = \int_{-|x|}^0 |t|^n dt = \int_0^{|x|} u^n du = \frac{|x|^{n+1}}{n+1}$ avec le changement de variable $u = |t| = -t$ (la fonction $t \rightarrow |t| = -t$ C^1 et bijective de $[-|x|, 0]$ dans $[0, |x|]$).

Ainsi, $\left| \int_0^x |t|^n dt \right| = \frac{|x|^{n+1}}{n+1}$ pour tout x , donc pour tout $x \in [-a, a]$:

$$|f_{n+1}(x)| \leq \frac{K |x|^{n+1}}{n! n+1} = K \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

La propriété est vraie au rang $n+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et ainsi :

La propriété (*) est prouvée.

Exercice II

On a $j^3 = 1$ et :

$$S_0 = 1+1+1 = 3$$

$$S_1 = 1+j+j^2 = 0$$

$$S_2 = 1+j^2+j^4 = 1+j^2+j^3 = 1+j^2+j = S_1 = 0$$

Soit $k \in \mathbb{N}$ et $k = 3q+r$ avec $r \in \{0,1,2\}$ la division euclidienne de k par 3. Alors :

$$S_k = 1+j^{3q+r} + j^{6q+2r} = 1+(j^3)^q j^r + (j^3)^{2q} j^{2r} = 1+j^r + j^{2r} = S_r.$$

Et ainsi :

$S_k = 3$ si 3 divise k et $S_k = 0$ sinon.

On a $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

L'évènement $(Y=0)$ est l'évènement « 3 divise X », qui, lui-même, s'écrit comme la réunion disjointe des évènements $(X=3n)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$P(Y=0) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=3n) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-1} \frac{1^{3n}}{(3n)!} = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!}.$$

Or, d'après ce qui précède :

$$e^1 + e^j + e^{j^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{j^k}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{j^{2k}}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{S_k}{k!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{(3n)!}.$$

Donc :

$$P(Y=0) = \frac{e^1 + e^j + e^{j^2}}{3e} = \frac{e + e^{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} + e^{-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}}{3e} = \frac{1}{3} + e^{-\frac{1}{2}} \frac{e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}} + e^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}}}{3e}.$$

Soit :

$$P(Y=0) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3e\sqrt{e}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Série 5

Planche n° 17**Exercice I**

Pour les rappels sur les séries alternées, voir le cours.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n+x}$ est alternée et la suite $\left(\frac{1}{n+x}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et de limite

nulle. Ainsi, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n+x}$ vérifie le critère spécial des séries alternées, donc converge et la

fonction $f : x \mapsto \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, si $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}$, on a :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n f_k(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+x} \right| \leq \frac{1}{n+1+x} \leq \frac{1}{n+1}.$$

Comme $\frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$ et comme toutes les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$, f l'est aussi.

Finalement :

$$f : x \mapsto \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+x} \text{ est définie et continue sur } \mathbb{R}_+^*.$$

Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+x} = \frac{1}{x} + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n+x} = \frac{1}{x} + \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{n+x+1}.$$

Soit :

$$f(x) = \frac{1}{x} - \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+x+1}$$

On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$2f(x) = f(x) + f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+x} + \frac{1}{x} - \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+x+1} = \frac{1}{x} + \sum_{n \geq 0} \left[\frac{(-1)^n}{n+x} - \frac{(-1)^n}{n+x+1} \right].$$

Soit :

$$2f(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+x)(n+1+x)}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la série $\sum \frac{(-1)^n}{(n+x)(n+1+x)}$ vérifie aussi le critère spécial des séries alternées, donc chaque reste est inférieur à son premier terme en valeur absolue, y compris le reste d'ordre 0, autrement dit la somme, soit :

$$\left| \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+x)(n+1+x)} \right| \leq \frac{1}{x(x+1)}.$$

Et comme $\frac{1}{x(x+1)} = o_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \right)$, on a $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+x)(n+1+x)} = o_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \right)$, d'où $2f(x) = \frac{1}{x} + o_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \right)$, ce qui permet de conclure que :

$$\boxed{f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}}$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé.

Pour tout $t \in]0, 1[$, on a $\frac{t^{x-1}}{1+t} = t^{x-1} \sum_{n \geq 0} (-t)^n = \sum_{n \geq 0} (-1)^n t^{x+n-1}$. On pose alors $f_n(t) = (-1)^n t^{x+n-1}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est définie, continue et intégrable (car $x+n-1 > -1$) sur $]0, 1[$.

De plus, pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=0}^N (-1)^n t^{x+n-1} = t^{x-1} \sum_{n=0}^N (-t)^n = t^{x-1} \frac{1-t^{N+1}}{1+t} = \frac{t^{x-1}}{1+t} - \frac{t^{x+N}}{1+t}.$$

Or, $\frac{t^{x-1}}{1+t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^{x-1}$ et $t \mapsto t^{x-1}$ est intégrable sur $]0, 1[$ car $x-1 > -1$. Donc, $t \mapsto \frac{t^{x-1}}{1+t}$ est intégrable sur

$]0, 1[$. De même pour $t \mapsto \frac{t^{x+N}}{1+t}$. On peut alors écrire :

$$\sum_{n=0}^N (-1)^n \int_0^1 t^{x+n-1} dt = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^N (-1)^n t^{x+n-1} \right) dt = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt - \int_0^1 \frac{t^{x+N}}{1+t} dt.$$

Or, $\int_0^1 t^{x+n-1} dt = \frac{1}{x+n}$, donc :

$$\left| \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{x+n} - \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt \right| = \int_0^1 \frac{t^{x+N}}{1+t} dt \leq \int_0^1 t^{x+N} dt = \frac{1}{x+N+1}.$$

Et comme $\frac{1}{x+N+1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$, on a par le théorème des gendarmes :

$$\sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{x+n} - \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

Soit, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+x} = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt}$$

Exercice II

On tire successivement et sans remise les $N = A + B$ boules de l'urne. Pour tout $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$, appelons B_k l'évènement « on obtient une boule blanche au $k^{\text{ième}}$ tirage » et $N_k = \bar{B}_k$ (« on obtient une boule noire au $k^{\text{ième}}$ tirage »).

Remarquons déjà que $X_1(\Omega) = \llbracket 1, B+1 \rrbracket$, car on peut obtenir la première boule blanche pas plus tard qu'au $(B+1)^{\text{ième}}$ tirage (dans cas, on aura tiré toutes les boules noires au début).

Alors, pour tout $k \in \llbracket 1, B+1 \rrbracket$, on a $(X_1 = k) = N_1 \cap \dots \cap N_{k-1} \cap B_k$ et avec la loi des probabilités composées, on a :

$$P(X_1 = k) = P(N_1)P_{N_1}(N_2) \dots P_{N_1 \cap \dots \cap N_{i-1}}(N_i) \dots P_{N_1 \cap \dots \cap N_{k-2}}(N_{k-1})P_{N_1 \cap \dots \cap N_{k-1}}(B_k).$$

Et, si seules des boules noires sont sorties lors des $i-1$ premiers tirages (évènement $N_1 \cap \dots \cap N_{i-1}$), il reste $A+B-(i-1)$ boules dans l'urne dont $B-(i-1)$ boules noires et ainsi, la probabilité

d'obtenir une boule noire au $i^{\text{ième}}$ tirage est $P_{N_1 \cap \dots \cap N_{i-1}}(N_i) = \frac{B-(i-1)}{A+B-(i-1)}$.

De même, si uniquement des boules noires sont sorties lors des $k-1$ premiers tirages (évènement $N_1 \cap \dots \cap N_{k-1}$), il reste $A+B-(k-1)$ boules dans l'urne dont A boules blanches et ainsi, la

probabilité d'obtenir une boule blanche au $k^{\text{ième}}$ tirage est $P_{N_1 \cap \dots \cap N_{k-1}}(B_k) = \frac{A}{A+B-(k-1)}$.

Ainsi :

$$\begin{aligned} P(X_1 = k) &= \frac{B}{A+B} \frac{B-1}{A+B-1} \dots \frac{B-(i-1)}{A+B-(i-1)} \dots \frac{B-(k-2)}{A+B-(k-2)} \frac{A}{A+B-(k-1)} \\ &= \frac{B!(A+B-k)!A}{(B-k+1)!(A+B)!} \end{aligned}$$

Soit, pour tout $k \in X_1(\Omega) = \llbracket 1, B+1 \rrbracket$:

$$P(X_1 = k) = \frac{A!B!}{(A+B)!} \binom{A+B-k}{A-1}$$

Pour obtenir la deuxième boule blanche, il faut en avoir obtenu exactement une (avec bien entendu $A \geq 2$). On a alors, $X_2(\Omega) = \llbracket 2, B+2 \rrbracket$.

Soit $\ell \in \llbracket 2, B+2 \rrbracket$. On cherche $P(X_2 = \ell)$.

On a alors $X_1(\omega) \in \llbracket 1, \ell-1 \rrbracket \subset \llbracket 1, B+1 \rrbracket$ et pour tout $k \in \llbracket 1, \ell-1 \rrbracket$, si on a obtenu la première boule blanche au $k^{\text{ième}}$ tirage (et donc $k-1$ boules noires lors des k premiers tirages), il reste dans l'urne $B-(k-1) = B-k+1$ boules noires et $A-1$ boules blanches. On est alors ramené à la situation précédente en remplaçant A par $A-1$ et B par $B-k+1$, donc :

$$P_{(X_1=k)}(X_2 = \ell) = \frac{(B-k+1)!(A+B-k-\ell)!(A-1)}{(B-k-\ell+2)!(A+B-k)!}.$$

Avec la loi des probabilités totales, on obtient :

$$P(X_2 = \ell) = \sum_{k=1}^{\ell-1} P(X_1 = k) P_{(X_1=k)}(X_2 = \ell) = \sum_{k=1}^{\ell-1} \frac{B!(A+B-k)!A}{(B-k+1)!(A+B)!} \frac{(B-k+1)!(A+B-k-\ell)!(A-1)}{(B-k-\ell+2)!(A+B-k)!}.$$

Soit, pour tout $\ell \in X_2(\Omega) = \llbracket 2, B+2 \rrbracket$:

$$P(X_2 = \ell) = \frac{B!A!}{(A+B)!} \sum_{k=1}^{\ell-1} \binom{A+B-\ell-k}{A-2}$$

Planche n° 18

Exercice I

On a pour tout réel t différent de $-1, 0$ et 1 :

$$\frac{1}{t(t^2-1)} = \frac{1/2}{t+1} + \frac{1/2}{t-1} - \frac{1}{t}$$

Sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ ne contenant pas $-1, 0$ et 1 , l'équation (E) se réécrit :

$$y' + \frac{2}{t(t^2-1)} y = \frac{t}{t^2-1}.$$

On a $\int^t \frac{2du}{u(u^2-1)} = \ln|t+1| + \ln|t-1| - 2\ln|t| = \ln\left(\frac{|t^2-1|}{t^2}\right)$, donc les solutions de l'équation homogène

$y' + \frac{2}{t(t^2-1)} y = 0$ sont les fonctions $t \mapsto Ae^{-\int^t \frac{2du}{u(u^2-1)}} = A \frac{t^2}{|t^2-1|}$ avec A constante réelle et comme

t^2-1 est de signe constant sur I , on peut écrire ces fonctions sous la forme $t \mapsto K \frac{t^2}{t^2-1}$ (où $K = \text{sgn}(t^2-1)A$).

On cherche alors une solution particulière de (E) sur I sous la forme $t \mapsto K(t) \frac{t^2}{t^2-1}$ avec K dérivable sur I . On a alors pour tout $t \in I$:

$$K'(t) \frac{t^2}{t^2-1} + K(t) \frac{2t(t^2-1) - 2t^3}{(t^2-1)^2} + \frac{2}{t(t^2-1)} K(t) \frac{t^2}{t^2-1} = K'(t) \frac{t^2}{t^2-1} = \frac{t}{t^2-1}$$

Donc $K'(t) = \frac{1}{t}$ et on peut prendre $K(t) = \ln|t|$.

Alors, les solutions de (E) sur $] -\infty, -1[$ ou $] -1, 0[$ ou $] 0, 1[$ ou $] 1, +\infty[$ sont les fonctions :

$$t \mapsto K \frac{t^2}{t^2-1} + \frac{t^2 \ln|t|}{t^2-1} \text{ avec } K \in \mathbb{R}.$$

Cherchons maintenant les raccordements éventuels.

Raccordement en 0

Soit f une éventuelle solution de (E) sur $] -1, 1[$. La fonction f est alors solution de (E) sur $] -1, 0[$ et sur $] 0, 1[$, donc il existe deux constantes réelles K_1 et K_2 telles que :

$$f(t) = \begin{cases} K_1 \frac{t^2}{t^2-1} + \frac{t^2 \ln|t|}{t^2-1} & \text{quand } t \in] -1, 0[\\ K_2 \frac{t^2}{t^2-1} + \frac{t^2 \ln t}{t^2-1} & \text{quand } t \in] 0, 1[\end{cases}$$

La fonction f doit être continue et dérivable en 0.

On a immédiatement $\lim_{0^-} f = \lim_{0^+} f = 0$, donc f est continue en 0 en prenant $f(0) = 0$. Alors :

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(t) - f(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t) - f(0)}{t} = 0.$$

Donc, f est dérivable en 0.

$$\text{Ainsi, toute fonction } t \mapsto \begin{cases} K_1 \frac{t^2}{t^2-1} + \frac{t^2 \ln|t|}{t^2-1} & \text{quand } t \in] -1, 0[\\ K_2 \frac{t^2}{t^2-1} + \frac{t^2 \ln t}{t^2-1} & \text{quand } t \in] 0, 1[\end{cases} \text{ est solution de } (E) \text{ sur }] -1, 1[.$$

Raccordement en -1

Soit f une éventuelle solution de (E) sur $] -\infty, 0[$. La fonction f est alors solution de (E) sur $] -\infty, -1[$ et sur $] -1, 0[$, donc il existe deux constantes réelles K_1 et K_2 telles que :

$$f(t) = \begin{cases} K_1 \frac{t^2}{t^2-1} + \frac{t^2 \ln|t|}{t^2-1} & \text{quand } t \in] -\infty, -1[\\ K_2 \frac{t^2}{t^2-1} + \frac{t^2 \ln|t|}{t^2-1} & \text{quand } t \in] -1, 0[\end{cases}$$

La fonction f doit être continue et dérivable en -1 . Or :

$$\lim_{t \rightarrow -1} \frac{t^2 \ln|t|}{t^2-1} = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{t^2 \ln|t|}{t^2-1} = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{t^2}{t+1} \frac{\ln t}{t-1} = \frac{1}{2}.$$

Mais, $\lim_{t \rightarrow -1} \left| \frac{t^2}{t^2-1} \right| = +\infty$, donc f admet une limite finie en -1 seulement quand $K_1 = K_2 = 0$.

Dans ce cas, $f(t) = \frac{t^2 \ln|t|}{t^2-1}$ sur $] -\infty, -1[\cup] -1, 0[$, $f(-1) = \frac{1}{2}$ et :

$$\lim_{t \rightarrow -1} \frac{f(t) - f(-1)}{t+1} = \lim_{t \rightarrow -1} \left[\frac{1}{t+1} \left(\frac{t^2 \ln|t|}{t^2-1} - \frac{1}{2} \right) \right] = \lim_{h=t+1, h \rightarrow 0} \frac{2(1-h)^2 \ln(1-h) - h(h-2)}{2h^2(h-2)} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h^2 + o_0(h^2)}{-4h^2 + o_0(h^2)} = -\frac{1}{2}.$$

Ainsi, f est dérivable en -1 et l'unique solution de (E) sur $] -\infty, 0[$ est $f : t \mapsto \frac{t^2 \ln|t|}{t^2 - 1}$ avec $f(-1) = \frac{1}{2}$.

Raccordement en 1

De la même façon, on obtient que l'unique solution de (E) sur $] 0, +\infty[$ est $t \mapsto \frac{t^2 \ln|t|}{t^2 - 1}$ avec $f(1) = \frac{1}{2}$.

Comme on a vu que $t \mapsto \frac{t^2 \ln|t|}{t^2 - 1}$ est dérivable en 0.

Tout ceci permet de conclure que :

L'équation (E) admet une unique solution maximale sur $\mathbb{R}$, qui est $f : t \mapsto \frac{t^2 \ln|t|}{t^2 - 1}$ prolongée par continuité en $-1, 0$ et 1 , avec $f(-1) = f(1) = \frac{1}{2}$ et $f(0) = 0$.

Exercice II

On a $M^2 + {}^tM = I_n$, donc $M^2 = I_n - {}^tM$ et en transposant :

$${}^t(M^2) = I_n - {}^t({}^tM) \Leftrightarrow ({}^tM)^2 = I_n - M.$$

Avec ${}^tM = I_n - M^2$, on obtient :

$$(I_n - M^2)^2 = I_n - M \Leftrightarrow I_n - 2M^2 + M^4 = I_n - M \Leftrightarrow M^4 - 2M^2 + M = 0_n.$$

Donc :

$P = X^4 - 2X^2 + X$ est un polynôme annulateur de M de degré 4.

On a vu que $I_n - M = ({}^tM)^2$.

Or, par hypothèse, M est inversible, donc $({}^tM)^2$ aussi (car $\det({}^tM)^2 = (\det M)^2 \neq 0$), donc :

$M - I_n$ est inversible.

On a :

$$P = X^4 - 2X^2 + X = X(X-1)(X^2 + X - 1).$$

Comme M et $M - I_n$ sont inversibles, on a :

$$P(M) = 0_n \Leftrightarrow M(M - I_n)(M^2 + M - I_n) = 0_n \Leftrightarrow M^2 + M - I_n = 0_n.$$

Or, les racines de $X^2 + X - 1$ sont $a = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $b = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, donc $Sp(M) \subset \{a, b\}$.

Remarquons que la relation $M^2 + M - I_n = 0_n$ se réécrit $M^2 + M = I_n$ et avec $M^2 + {}^tM = I_n$, on peut conclure que $M = {}^tM$, autrement dit que M est symétrique.

Alors, comme M est symétrique réelle, elle est diagonalisable dans une base orthonormée, d'après le théorème spectral. Comme $Sp(M) \subset \{a, b\}$, on peut conclure qu'il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$M = PD^tP$$

avec $D = \text{diag}(a, \dots, a, b, \dots, b)$ où a et b apparaissent k fois et $n-k$ fois respectivement avec $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Réciproquement, si M est une matrice de la forme ci-dessus, elle est inversible car $0 \notin \{a, b\}$, donc n'est pas valeur propre de M) et :

$$\begin{aligned} M^2 + {}^tM &= (PD^tP)^2 + {}^t(PD^tP) = PD^2{}^tP + PD^tP = P(D^2 + D) {}^tP \\ &= P \left(\text{diag} \left(a^2 + a, \dots, a^2 + a, b^2 + b, \dots, b^2 + b \right) \right) {}^tP \end{aligned}$$

Et comme a et b sont les racines de $X^2 + X - 1$, on a $a^2 + a = b^2 + b = 1$ et donc :

$$M^2 + {}^tM = PI_n {}^tP = I_n.$$

Ainsi, M est solution.

Finalement :

Les matrices M inversible et vérifiant $M^2 + {}^tM = I_n$ sont les matrices de la forme $M = PD^tP$

avec $P \in O_n(\mathbb{R})$, $D = \text{diag} \left(\underbrace{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \dots, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}}_{k \text{ fois}}, \underbrace{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \dots, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}}_{n-k \text{ fois}} \right)$ et $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Planche n° 19

Exercice I

1. Si on note $A^2 = (c_{i,j})$, on a pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$:

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} a_{k,j} = \sum_{k=1}^n \frac{i}{k} \frac{k}{j} = \sum_{k=1}^n \frac{i}{j} = n \frac{i}{j} = n a_{i,j}.$$

Donc :

$$A^2 = nA$$

2. Si A est inversible, alors on peut écrire :

$$A = A^2 A^{-1} = nA A^{-1} = nI_n.$$

Or, $A \neq nI_n$, donc :

La matrice A n'est pas inversible.

3. On a $A^2 = nA$, donc $P = X^2 - nX = X(X - n)$ est annulateur de A et comme ce polynôme est scindé à racines simples :

La matrice A n'est pas diagonalisable.

4. Comme $X(X - n)$ est annulateur de A , on a $Sp(A) \subset \{0, n\}$. Or, si A n'avait qu'une seule valeur propre, ce serait une matrice scalaire (car elle est diagonalisable). Ce n'est pas le cas, donc A admet au moins deux valeurs propres et ainsi :

$$Sp(A) = \{0, n\}.$$

Si on note $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ et $C_1, C_2, \dots, C_n$ les colonnes de A , on a pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $C_j = \frac{1}{j} C$.

Alors, si $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, $e = e_1 + 2e_2 + \dots + ne_n$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A , on a pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f(e_j) = \frac{1}{j}e$, donc :

$$f(je_j) = f(e_1) \Leftrightarrow f(je_j - e_1) = 0.$$

Ainsi, $\text{Vect}(2e_2 - e_1, 3e_3 - e_1, \dots, ne_n - e_1) \subset \ker A$ et comme la famille $(2e_2 - e_1, 3e_3 - e_1, \dots, ne_n - e_1)$ est libre, elle est de rang $n-1$ et $\dim \ker A \geq n-1$. Or, $A \neq 0_n$, donc $\dim \ker A \leq n-1$ et ainsi, $\dim \ker A = n-1$ et :

$$\ker A = \text{Vect}(2e_2 - e_1, 3e_3 - e_1, \dots, ne_n - e_1).$$

Ceci veut dire que le sous-espace propre associé à n est une droite (de dimension $n - (n-1) = 1$).

Or, pour $x = x_1e_1 + \dots + x_n e_n \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) = nx &\Leftrightarrow f(x_1e_1 + \dots + x_n e_n) = n(x_1e_1 + \dots + x_n e_n) \\ &\Leftrightarrow x_1f(e_1) + \dots + x_n f(e_n) = nx_1e_1 + \dots + nx_n e_n \\ &\Leftrightarrow x_1e + \dots + x_n \frac{1}{n}e = nx_1e_1 + \dots + nx_n e_n \\ &\Leftrightarrow \lambda e = nx_1e_1 + \dots + nx_n e_n \quad \text{avec } \lambda = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{i} \\ &\Leftrightarrow \lambda(e_1 + 2e_2 + \dots + ne_n) = nx_1e_1 + \dots + nx_n e_n \\ &\Leftrightarrow \lambda k = nx_k \quad \text{pour tout } k \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ &\Leftrightarrow x_k = \frac{\lambda}{n}k \quad \text{pour tout } k \in \llbracket 1, n \rrbracket \end{aligned}$$

En particulier, $f(e) = ne$ et donc, $\ker(A - nI_n) = \text{Vect}(e)$

Finalement :

$$Sp(A) = \{0, n\} \text{ avec } \begin{cases} \ker A = \text{Vect}(2e_2 - e_1, 3e_3 - e_1, \dots, ne_n - e_1) \\ \ker(A - nI_n) = \text{Vect}(e_1 + 2e_2 + \dots + ne_n) \end{cases}$$

5. Cette question est une question de cours.

Exercice II

La fonction $x \mapsto \frac{x}{\text{sh } x}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (quotient de telles fonctions). De plus :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\text{sh } x} = 1$, donc $x \mapsto \frac{x}{\text{sh } x}$ est prolongeable par continuité en 0 et $\int_0^{\infty} \frac{x}{\text{sh } x} dx$ converge ;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{\text{sh } x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{e^x} = 0$ par croissances comparées, alors $\frac{x}{\text{sh } x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et comme $\int^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge, $\int^{\infty} \frac{x}{\text{sh } x} dx$ converge.

Ainsi, $\int_0^{\infty} \frac{x}{\text{sh } x} dx$ converge, autrement dit :

$$J = \int_0^{\infty} \frac{x}{\text{sh } x} dx \text{ existe.}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{x}{\text{sh } x} = \frac{2x}{e^x - e^{-x}} = \frac{2xe^{-x}}{1 - e^{-2x}}$ et comme $0 < e^{-2x} < 1$, on peut écrire :

$$\frac{x}{\text{sh } x} = \frac{2x}{e^x - e^{-x}} = \frac{2xe^{-x}}{1 - e^{-2x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2xe^{-x}(e^{-2x})^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 2xe^{-(2n+1)x} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

avec $f_n(x) = 2xe^{-(2n+1)x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$ (produit de telles fonctions) et pour tout $X \in \mathbb{R}_+$, sachant que $x \mapsto 2x$ et $x \mapsto \frac{-1}{2n+1}e^{-(2n+1)x}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$, donc $[0, X]$, on peut réaliser une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^X 2xe^{-(2n+1)x} dx &= \left[\frac{-2x}{2n+1} e^{-(2n+1)x} \right]_0^X + \frac{2}{2n+1} \int_0^X e^{-(2n+1)x} dx = \left[\frac{-2x}{2n+1} e^{-(2n+1)x} - \frac{2}{(2n+1)^2} e^{-(2n+1)x} \right]_0^X \\ &= \frac{-2X}{2n+1} e^{-(2n+1)X} - \frac{2}{(2n+1)^2} e^{-(2n+1)X} + \frac{2}{(2n+1)^2} \end{aligned}$$

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2X}{2n+1} e^{-(2n+1)X} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{(2n+1)^2} e^{-(2n+1)X} = 0$ (par croissances comparées pour la première),

donc $\int_0^{+\infty} |f_n| = \int_0^{+\infty} f_n$ converge et vaut $\frac{2}{(2n+1)^2}$. Ainsi, f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Enfin, comme la série $\sum \frac{2}{(2n+1)^2}$ converge, $\sum \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge et toutes les hypothèses sont réunies pour conclure que $\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f_n \right)$, c'est-à-dire avec $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \frac{x}{\text{sh } x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{x}{\text{sh } x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^2}$$

Planche n° 20

Exercice I

La fonction f est définie et rationnelle donc de classe C^1 sur $D = (\mathbb{R}_+^*)^2$ et pour tout $(x, y) \in D$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= y - \frac{4}{x^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= x - \frac{2}{y^2} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - \frac{4}{x^2} = 0 \\ x - \frac{2}{y^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} yx^2 = 4 \\ xy^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2y = \frac{4}{xy} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ 2y^3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Ainsi :

f admet un unique point critique $(2, 1)$ sur D .

On a $f(2, 1) = 6$ et pour tout (h, k) au voisinage de $(0, 0)$:

$$\begin{aligned} f(2+h, 1+k) - f(2, 1) &= (2+h)(1+k) + \frac{4}{2+h} + \frac{2}{1+k} - 6 = 2+h+2k+hk + \frac{2}{1+\frac{1}{2}h} + \frac{2}{1+k} - 6 \\ &= 2+h+2k+hk + 2 \left(1 - \frac{1}{2}h + \frac{1}{4}h^2 + o_0(h^2) \right) + 2 \left(1 - k + k^2 + o_0(k^2) \right) - 6 \\ &= 2+h+2k+hk + 2 - h + \frac{1}{2}h^2 + o_0(h^2) + 2 - 2k + 2k^2 + o_0(k^2) - 6 \\ &= \frac{1}{2}h^2 + hk + 2k^2 + o_0(h^2) + o_0(k^2) \end{aligned}$$

Donc, on a bien $f(2+h,1+k) - f(2,1) = e(h,k) + o_0(h^2) + o_0(k^2)$ avec :

$$e(h,k) = \frac{1}{2}h^2 + hk + 2k^2 = \frac{1}{2}(h^2 + 2hk) + 2k^2 = \frac{1}{2}(h^2 + 2hk + k^2) - \frac{1}{2}k^2 + 2k^2 = \frac{1}{2}(h+k)^2 + \frac{3}{2}k^2 \geq 0.$$

Et ainsi, pour (h,k) au voisinage de $(0,0)$, on a :

$$f(2+h,1+k) - f(2,1) = e(h,k) + o_0(h^2) + o_0(k^2) \text{ avec } e(h,k) = \frac{1}{2}h^2 + hk + 2k^2 \geq 0.$$

Ceci implique que $f(2+h,1+k) - f(2,1) \geq 0$ pour (h,k) au voisinage de $(0,0)$, autrement dit que pour (x,y) au voisinage de $(2,1)$, $f(x,y) \geq f(2,1)$, donc que $f(2,1) = 6$ est un minimum local.

Remarquons que pour $y \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, la fonction $f_y : x \mapsto xy + \frac{4}{x} + \frac{2}{y}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, avec :

$$f_y' : x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y - \frac{4}{x^2} = \frac{y}{x^2} \left(x + \frac{2}{\sqrt{y}} \right) \left(x - \frac{2}{\sqrt{y}} \right).$$

Comme $\frac{y}{x^2} \left(x + \frac{2}{\sqrt{y}} \right) > 0$, $f_y'(x)$ est du signe de $x - \frac{2}{\sqrt{y}}$, donc négatif sur $\left] 0, \frac{2}{\sqrt{y}} \right[$ et positif sur $\left] \frac{2}{\sqrt{y}}, +\infty \right[$, ce qui permet de conclure que f_y est minimale en $\frac{2}{\sqrt{y}}$ et vaut alors :

$$f\left(\frac{2}{\sqrt{y}}, y\right) = \frac{2}{\sqrt{y}}y + \frac{4}{\frac{2}{\sqrt{y}}} + \frac{2}{y} = 4\sqrt{y} + \frac{2}{y} = g(y).$$

Et pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$:

$$g(y) - g(1) = 4\sqrt{y} + \frac{2}{y} - 6 = 2 \frac{2y\sqrt{y} - 3y + 1}{y} = \frac{2}{y} (\sqrt{y} - 1)^2 (2\sqrt{y} + 1) \geq 0.$$

Donc, pour tout $(x,y) \in D$, $f(x,y) \geq f\left(\frac{2}{\sqrt{y}}, y\right) \geq 6$ et ainsi, 6 est un minimum global.

Finalement, comme D est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, le seul extremum possible est atteint en un point critique de D , donc en $(2,1)$ et ainsi :

La fonction f admet 6 pour minimum global, atteint en $(2,1)$ et pas de maximum.

Exercice II

On a :

$$M^2 = \begin{pmatrix} AB & 0_n \\ 0_n & BA \end{pmatrix}$$

Soit λ une valeur propre de M (réelle ou complexe) et Z un vecteur propre associé ($Z \neq 0$).

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M^k Z = \lambda^k Z$, donc pour tout $P = \sum_{k=0}^r a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, on a :

$$P(M)Z = \left(\sum_{k=0}^r a_k M^k \right) Z = \sum_{k=0}^r a_k (M^k Z) = \sum_{k=0}^r a_k (\lambda^k Z) = \left(\sum_{k=0}^r a_k \lambda^k \right) Z = P(\lambda)Z.$$

Si $P(M) = 0_{2n}$, on a alors $P(\lambda)Z = 0$ et comme $Z \neq 0$, on obtient $P(\lambda) = 0$.

Ainsi, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$:

Si $P(M) = 0_{2n}$, les valeurs propres de M sont racines de P .

On a $B \in GL_n(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} 0_n & B^{-1} \\ B & 0_n \end{pmatrix}$, donc $M^2 = \begin{pmatrix} B^{-1}B & 0_n \\ 0_n & BB^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} = I_{2n}$.

La matrice M est alors une matrice de symétrie, donc M est diagonalisable, $Sp(M) \subset \{-1, 1\}$ et les sous-espaces propres de M sont $\ker(M - I_{2n})$ et $\ker(M + I_{2n})$.

Pour tout $Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ avec $Z_1, Z_2 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$MZ = \begin{pmatrix} 0_n & B^{-1} \\ B & 0_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}Z_2 \\ BZ_1 \end{pmatrix}.$$

Donc :

$$MZ = Z \Leftrightarrow \begin{pmatrix} B^{-1}Z_2 \\ BZ_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} B^{-1}Z_2 = Z_1 \\ BZ_1 = Z_2 \end{cases} \Leftrightarrow Z_2 = BZ_1.$$

Ainsi, $\ker(M - I_{2n}) = \left\{ \begin{pmatrix} Z_1 \\ BZ_1 \end{pmatrix}, Z_1 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \right\}$ qui est isomorphe à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (par l'isomorphisme

$Z_1 \mapsto \begin{pmatrix} Z_1 \\ BZ_1 \end{pmatrix}$) donc $\dim \ker(M - I_{2n}) = n$ et comme $\dim \ker(M - I_{2n}) + \dim \ker(M + I_{2n}) = 2n$, on a

aussi $\dim \ker(M + I_{2n}) = n$. Finalement :

M est diagonalisable, de spectre $\{-1, 1\}$, et ses deux sous-espaces propres sont de dimensions n .

Si $A = -B = I_n$ et $M = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix}$, donc $M^2 = \begin{pmatrix} -I_n & 0_n \\ 0_n & -I_n \end{pmatrix} = -I_{2n}$.

Le polynôme $X^2 + 1$ est annulateur de M . Comme ce polynôme est scindé, à racines simples (i et $-i$) dans $\mathbb{C}$, M est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ avec $Sp_{\mathbb{C}}(M) \subset \{-i, i\}$.

Pour tout $Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ avec $Z_1, Z_2 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, on a :

$$MZ = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_2 \\ -Z_1 \end{pmatrix}.$$

Donc :

$$MZ = iZ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} Z_2 \\ -Z_1 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} Z_2 = iZ_1 \\ -Z_1 = iZ_2 \end{cases} \Leftrightarrow Z_2 = iZ_1.$$

On a comme plus haut, $\ker(M - I_{2n}) = \left\{ \begin{pmatrix} Z_1 \\ iZ_1 \end{pmatrix}, Z_1 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \right\}$, donc $\dim \ker(M - I_{2n}) = n$, puis $\dim \ker(M + I_{2n}) = n$ et finalement :

M est diagonalisable dans $\mathbb{C}$, de spectre $\{-i, i\}$, et ses sous-espaces propres sont de dimensions n .