# *Préparation aux oraux : Centrale*

## *Série 1*

### *Planche n° 1*

a. Si $A$ est inversible, alors $\det A \neq 0$ et :

$$\det(A^{2019}) = (\det A)^{2019} \neq 0.$$

Donc :

$$\boxed{\text{Si } A \text{ est inversible, } A^{2019} \text{ l'est aussi.}}$$

b. D'après le théorème spectral, comme $A$ est symétrique réelle, elle est diagonalisable (dans une base orthonormée). Donc, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = diag\left(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\right)$ telles que $A = PD\,{}^tP$.

Alors, $A^{2019} = (PD\,{}^tP)^{2019} = P(D^{2019})\,{}^tP$, donc $A^{2019}$ est semblable à $D^{2019} = diag\left(\lambda_1^{2019}, \ldots, \lambda_n^{2019}\right)$ et ainsi :

$$\boxed{\text{Si } \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \text{ sont les valeurs propres de } A\text{, alors } \lambda_1^{2019}, \ldots, \lambda_n^{2019} \text{ sont celles de } A^{2019}.}$$

c. Commençons par remarquer que la fonction $f : x \mapsto x^{2019}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (car polynômiale) et strictement croissante de $-\infty$ à $+\infty$. D'après le théorème de la bijection continue, $f$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On conserve les notations de la question précédente, en ajoutant la condition $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$ (on ordonne les valeurs propres *réelles* de $A$). On a alors $\lambda_1^{2019} \leq \lambda_2^{2019} \leq \ldots \leq \lambda_n^{2019}$ (car $f$ est croissante).

De plus, par injectivité de $f$, pour tout $\lambda \in Sp(A)$, on a $\ker\left(A - \lambda I_n\right) = \ker\left(A^{2019} - \lambda^{2019} I_n\right)$ (les sous-espaces propres de $A^{2019}$ sont ceux de $A$).

Si $A^{2019} = B^{2019}$, alors les valeurs propres ordonnées de $B^{2019}$ sont $\lambda_1^{2019}, \ldots, \lambda_n^{2019}$ et les sous-espaces propres de $B^{2019}$ sont ceux de $A$ . Or, de même que pour $A$, les valeurs propres ordonnées de $B^{2019}$ sont les puissances 2019ièmes des valeurs propres ordonnées de $B$ et pour tout $\mu \in Sp(B)$, on a $\ker\left(B - \mu I_n\right) = \ker\left(B^{2019} - \mu^{2019} I_n\right)$.

Ainsi, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres ordonnées de $B$ et pour tout $\lambda \in Sp(A) = Sp(B)$, on a :

$$\ker\left(A - \lambda I_n\right) = \ker\left(A^{2019} - \lambda^{2019} I_n\right) = \ker\left(B^{2019} - \lambda^{2019} I_n\right) = \ker\left(B - \lambda I_n\right).$$

Donc, $B = PD\,{}^tP$, soit :

$$\boxed{A = B}$$

d. Si $A^2 = B^2$, on n'a pas forcément $A = B$. Ne serait-ce que si $A = -B$.

## *Planche n° 2* (*Il y a avait des questions Python*)

Posons $f(x) = x - \dfrac{x^3}{6} - \sin x$. La fonction $f$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} - \cos x \\ f''(x) &= -x + \sin x \\ f'''(x) &= -1 + \cos x \leq 0 \end{aligned}$$

Alors :

- $f'''$ est décroissante sur $\mathbb{R}$ et $f''(0) = 0$, donc $f''(x) \leq 0$, soit $\sin x \leq x$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ ;
- $f''$ est décroissante sur $\mathbb{R}$ et $f'(0) = 0$, donc $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ ;
- $f'$ est décroissante sur $\mathbb{R}$ et $f(0) = 0$, donc $f(x) \leq 0$, soit $x - \dfrac{x^3}{6} \leq \sin x$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

Ainsi, on a bien :

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in [0, \pi],\ x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x.}$$

La fonction $g : t \mapsto \dfrac{1}{t^3}$ est continue, décroissante et positive sur $[1, +\infty[$.
Alors, pour tout entier $n \geq 2$ :

$$\frac{1}{n^3} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^3}.$$

Donc, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{n=m+1}^{m+p} \frac{1}{n^3} \leq \sum_{n=m+1}^{m+p} \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^3}$.

Or, $\displaystyle\sum_{n=m+1}^{m+p} \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^3} = \int_{m}^{m+p} \frac{dt}{t^3} = \frac{1}{2m^2} - \frac{1}{2(m+p)^2}$, donc :

$$\sum_{n=m+1}^{m+p} \frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{2m^2} - \frac{1}{2(m+p)^2}.$$

Comme la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^3}$ converge, on peut passer à la limite quand $p \to +\infty$, ce qui donne pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ :

$$\boxed{\sum_{n=m+1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{2m^2}}$$

On a $u_0 \in [0,\pi]$ et si pour $n \in \mathbb{N}$, $u_0, \dots, u_n \in [0,\pi]$, alors pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\dfrac{u_k}{n+1} \in [0,\pi]$ et :

$$0 \leq \sin\left(\frac{u_k}{n+1}\right) \leq \frac{u_k}{n+1}.$$

Donc :

$$0 \leq u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{u_k}{n+1}\right) \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{n+1} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{\pi}{n+1} = \pi.$$

Ainsi, $u_{n+1} \in [0,\pi]$.

Ceci prouve par récurrence forte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,\pi]$.

On peut alors écrire, pour tout $k \in \mathbb{N}$ :

$$\frac{u_k}{n+1} - \frac{1}{6}\left(\frac{u_k}{n+1}\right)^3 \leq \sin\left(\frac{u_k}{n+1}\right) \leq \frac{u_k}{n+1}.$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{n+1} - \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{u_k}{n+1}\right)^3 \leq \sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{u_k}{n+1}\right) \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{n+1}.$$

Soit :

$$v_n - \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{u_k}{n+1}\right)^3 \leq u_{n+1} \leq v_n.$$

Or, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{u_k}{n+1}\right)^3 \leq \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\pi}{n+1}\right)^3 = (n+1)\left(\frac{\pi}{n+1}\right)^3 = \frac{\pi^3}{(n+1)^2}$, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\boxed{v_n - \frac{\pi^3}{6(n+1)^2} \leq u_{n+1} \leq v_n}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_{n+1} = \frac{1}{n+2}\sum_{k=0}^{n+1} u_k = \frac{1}{n+2}\left(\sum_{k=0}^{n} u_k + u_{n+1}\right) = \frac{1}{n+2}\big((n+1)v_n + u_{n+1}\big) = \frac{n+1}{n+2}v_n + \frac{1}{n+2}u_{n+1}.$$

Donc :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{n+1}{n+2}v_n + \frac{1}{n+2}u_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+2}\left(u_{n+1} - v_n\right).$$

Comme $v_n - \dfrac{\pi^3}{6(n+1)^2} \leq u_{n+1} \leq v_n$, on a $-\dfrac{\pi^3}{6(n+1)^2} \leq u_{n+1} - v_n \leq 0$ et donc :

$$-\frac{1}{n+2}\frac{\pi^3}{6(n+1)^2} \leq v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+2}\left(u_{n+1} - v_n\right) \leq 0.$$

Et comme $-\dfrac{1}{n+1} \leq -\dfrac{1}{n+2}$, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\boxed{-\frac{\pi^3}{6(n+1)^3} \leq v_{n+1} - v_n \leq 0}$$

Comme la série $\sum \frac{1}{n^3}$ converge, la série $\sum (v_{n+1} - v_n)$ (de signe constant) converge aussi, et donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Notons V sa limite. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$-\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\pi^3}{6(k+1)^3} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} (v_{k+1} - v_k) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq v_n - V \leq \frac{\pi^3}{6} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}.$$

Avec le résultat précédent, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$0 \leq v_n - V \leq \frac{\pi^3}{6} \frac{1}{2n^2}.$$

Ainsi, il existe un réel *V* tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\boxed{0 \leq v_n - V \leq \frac{\pi^3}{12n^2}}$$

On a $\lim_{n\to+\infty} \left( v_n - \frac{\pi^3}{6(n+1)^2} \right) = \lim_{n\to+\infty} v_n = V$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n - \frac{\pi^3}{6(n+1)^2} \leq u_{n+1} \leq v_n$, donc d'après le théorème des gendarmes, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers *V* et ainsi :

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers la même limite que } (v_n)_{n\in\mathbb{N}}.}$$

## *Planche n° 3*

**I)** Soit $f \in S(E)$.

D'après le théorème spectral, il existe $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, une base orthonormée de *E* telle que :

$$M_{\mathcal{B}}(f) = D = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Alors, pour tout $x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n \in E$, on a $\|x\|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$ et :

$$f(x) = \lambda_1 x_1 e_1 + \dots + \lambda_n x_n e_n \quad \text{et} \quad \|f(x)\|^2 = \lambda_1^2 x_1^2 + \dots + \lambda_n^2 x_n^2.$$

On veut prouver que *f* est une contraction si et seulement si pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $|\lambda_k| \leq 1$.

($\Rightarrow$) On suppose que *f* est une contraction, autrement dit, pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| \leq \|x\|$.

Alors pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\|f(e_k)\| \leq \|e_k\|$. Or, $f(e_k) = \lambda_k e_k$, donc :

$$\|\lambda_k e_k\| = |\lambda_k| \|e_k\| \leq \|e_k\|.$$

Et comme, $\|e_k\| = 1$, on obtient :

$$|\lambda_k| \leq 1.$$

($\Leftarrow$) On suppose que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $|\lambda_k| \le 1$, donc $\lambda_k^2 \le 1$.

Alors, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, pour tout $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n \in E$ :

$$\|f(x)\|^2 = \lambda_1^2 x_1^2 + \ldots + \lambda_n^2 x_n^2 \le x_1^2 + \ldots + x_n^2 = \|x\|^2.$$

Ainsi, pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| \le \|x\|$ et $f$ est une contraction.

Finalement, on a bien :

$$\boxed{f \in S(E) \text{ est une contraction si et seulement si pour tout } \lambda \in Sp(f),\ \|\lambda\| \le 1.}$$

Soit $P = \sum_{p=0}^{m} a_p X^p \in \mathbb{R}[X]$.

En gardant les mêmes notations que ci-dessus, on a pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $f(e_k) = \lambda_k e_k$, donc pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f^p(e_k) = \lambda_k^p e_k$, d'où :

$$P(f)(e_k) = \left(\sum_{p=0}^{m} a_p f^p\right)(e_k) = \sum_{p=0}^{m} a_p f^p(e_k) = \sum_{p=0}^{m} a_p \lambda_k^p e_k = \left(\sum_{p=0}^{m} a_p \lambda_k^p\right) e_k = P(\lambda_k) e_k.$$

Alors, pour tout $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \in E$ :

$$P(f)(x) = P(f)\left(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k P(f)(e_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k P(\lambda_k) e_k = \sum_{k=1}^{n} P(\lambda_k) x_k e_k.$$

Donc :

$$\|P(f)(x)\|^2 = P(\lambda_1)^2 x_1^2 + \ldots + P(\lambda_n)^2 x_n^2.$$

Notons $M = \sup_{\lambda \in Sp(f)} |P(\lambda)| = \max_{\lambda \in Sp(f)} |P(\lambda)|$, on a alors pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $P(\lambda_k)^2 \le M^2$ et :

$$\|P(f)(x)\|^2 \le M^2 x_1^2 + \ldots + M^2 x_n^2 = M^2 \left(x_1^2 + \ldots + x_n^2\right) = M^2 \|x\|^2.$$

D'où, pour tout $x \in E$, $\|P(f)(x)\| \le M \|x\|$, soit :

$$\boxed{\|P(f)(x)\| \le \sup_{\lambda \in Sp(f)} |P(\lambda)| \|x\|}$$

Soit $f \in GL(E)$, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, une base orthonormée de $E$ et $M = M_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On a alors ${}^tMM \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et ${}^t({}^tMM) = {}^tM\,{}^t({}^tM) = {}^tMM$, donc ${}^tMM \in S_n(\mathbb{R})$.

D'après le théorème spectral, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que :

$${}^tP\,{}^tMMP = D = diag\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_n\right)$$

où les $\lambda_k$ sont les valeurs propres (réelles) de ${}^tMM$.

Pour tout $\lambda \in Sp(f)$, si $x \neq 0$ est un vecteur propre de ${}^tMM$ associé à λ et $X$ le vecteur colonne des coordonnées de $x$ dans la base $\mathcal{B}$, on a ${}^tMMX = \lambda X$, donc :

$$ {}^tX\,{}^tMMX = \lambda\,{}^tXX \quad \Leftrightarrow \quad \|MX\|^2 = \lambda \|X\|^2 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{\|MX\|^2}{\|X\|^2} \quad (\text{car } \|X\| \neq 0). $$

Donc, $\lambda \geq 0$ (on a même $\lambda > 0$, car $f \in GL(E)$, donc $\lambda \neq 0$). Ainsi, toutes les valeurs propres de $f$ sont strictement positives. On peut alors poser $\Delta = diag\left(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}\right)$ et $S = P\Delta\,{}^tP$.

On a alors :

- ${}^t(P\Delta\,{}^tP) = {}^t({}^tP)\,{}^t\Delta\,{}^tP = P\Delta\,{}^tP = S$ ;
- les valeurs propres de $S$ sont celles de Δ, c'est-à-dire les $\sqrt{\lambda_k}$, donc sont strictement positives ;
- $\Delta^2 = diag\left(\lambda_1, \dots, \lambda_n\right) = D$ donc $S^2 = (P\Delta\,{}^tP)^2 = P\Delta^2\,{}^tP = PD\,{}^tP = {}^tMM$.

Ainsi :

$$ \boxed{\text{Il existe une matrice } S \in S_n(\mathbb{R}) \text{, à valeurs propres strictement positives, telle que } {}^tMM = S^2.} $$

## *Planche n° 4*

Pour tout $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, $t \mapsto P(t)Q(t)$ est continue sur $[-1,1]$ et :

- $\phi$ est clairement symétrique et bilinéaire du fait de la linéarité de l'intégrale.
- Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $\phi(P,P) = \int_{-1}^{1} P(t)^2\,dt \geq 0$ par positivité de l'intégrale, donc $\phi$ est positive.
- Enfin, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $t \mapsto P(t)^2$ est continue et positive sur $[-1,1]$, donc :

$$ \begin{aligned} \phi(P,P) = \int_{-1}^{1} P(t)^2\,dt = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad P(t)^2 = 0 \text{ pour tout } t \in [-1,1] \\ &\Leftrightarrow \quad P(t) = 0 \text{ pour tout } t \in [-1,1] \end{aligned} $$

  Or, si $P$ est nul sur $[-1,1]$, il admet une infinité de racines, donc il est nul.

  Ainsi, $\phi$ est définie.

Finalement :

$$ \boxed{\text{L'application } \phi \text{ définit bien un produit scalaire sur } \mathbb{R}[X].} $$

On notera $(\cdot|\cdot)$ ce produit scalaire et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

Remarquons que $\left(\int_{-1}^{1} P(t)\,dt\right)^2 = (1|P)^2$ et $\int_{-1}^{1}(P(t))^2\,dt = \|P\|^2$. Comme $\|1\|^2 = \int_{-1}^{1} dt = 2$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit $(1|P)^2 \leq \|1\|^2\,\|P\|^2$, soit :

$$ \left(\int_{-1}^{1} P(t)\,dt\right)^2 \leq 2\int_{-1}^{1}(P(t))^2\,dt \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{1} P(t)\,dt\right)^2 \leq \int_{-1}^{1}(P(t))^2\,dt. $$

Et on a égalité si et seulement si $P$ et 1 sont proportionnels, c'est-à-dire si et seulement si $P$ est constant. Ainsi :

$$\boxed{\text{Les polynômes } P \text{ de } \mathbb{R}[X] \text{ tels que } \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{1} P(t)\,dt\right)^2 = \int_{-1}^{1}\left(P(t)\right)^2 dt \text{ sont les polynômes constants.}}$$

On a :

$$(P_0 \mid P_1) = (1 \mid X) = \int_{-1}^{1} t\,dt = 0 \quad (\text{car } t \mapsto t \text{ est impaire})$$

$$(P_0 \mid P_2) = \left(1 \mid X^2 - \frac{1}{3}\right) = (1 \mid X^2) - \frac{1}{3}(1 \mid 1) = \int_{-1}^{1} t^2 dt - \frac{2}{3} = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} - \frac{2}{3} = 0$$

$$(P_1 \mid P_2) = \left(X \mid X^2 - \frac{1}{3}\right) = \int_{-1}^{1}\left(t^3 - \frac{1}{3}t\right)dt = 0 \quad \left(\text{car } t \mapsto t^3 - \frac{1}{3}t \text{ est impaire}\right)$$

Ainsi :

$$\boxed{(P_0, P_1, P_2) \text{ est une famille orthogonale.}}$$

Comme la famille $(P_0, P_1, P_2) = \left(1, X, X^2 - \frac{1}{3}\right)$ est une famille échelonnée en degré de trois vecteurs de $\mathbb{R}_2[X]$, c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et donc :

$$\boxed{\mathrm{Vect}(P_0, P_1, P_2) = \mathbb{R}_2[X]}$$

Remarquons que $\|P_0\|^2 = 2$, $\|P_1\|^2 = \int_{-1}^{1} t^2 dt = \frac{2}{3}$ et $\|P_2\|^2 = \int_{-1}^{1}\left(t^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dt = \frac{8}{45}$.

Posons $Q_i = \frac{1}{\|P_i\|} P_i$ pour tout $i \in \{0,1,2\}$. Comme $(P_0, P_1, P_2)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_2[X]$, $(Q_0, Q_1, Q_2)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$.

Si on note $R$ le projeté orthogonal de $X^3$ sur $\mathbb{R}_2[X]$, on a alors :

$$R = (Q_0 \mid X^3) Q_0 + (Q_1 \mid X^3) Q_1 + (Q_2 \mid X^3) Q_2 .$$

Soit :

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{\|P_0\|^2}(P_0 \mid X^3) P_0 + \frac{1}{\|P_1\|^2}(P_1 \mid X^3) P_1 + \frac{1}{\|P_2\|^2}(P_2 \mid X^3) P_2 \\ &= \frac{1}{2}(1 \mid X^3) + \frac{3}{2}(X \mid X^3) X + \frac{45}{8}\left(X^2 - \frac{1}{3} \middle| X^3\right)\left(X^2 - \frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

Comme $(1 \mid X^3) = \left(X^2 - \frac{1}{3} \middle| X^3\right) = 0$ et $(X \mid X^3) = \int_{-1}^{1} t^4 dt = \frac{2}{5}$ :

$$\boxed{\text{Le projeté orthogonal de } X^3 \text{ sur } \mathbb{R}_2[X] \text{ est } R = \frac{3}{5}X .}$$

On a :

$$\left\{\int_{-1}^{1}\left(P(t)\right)^2 dt,\, P\in\mathbb{R}_3[X],\, P \text{ unitaire}\right\}=\left\{\|P\|^2,\, P=X^3-Q,\, Q\in\mathbb{R}_2[X]\right\}=\left\{\|X^3-Q\|^2,\, Q\in\mathbb{R}_2[X]\right\}.$$

Donc :

$$d=\inf\left\{\int_{-1}^{1}\left(P(t)\right)^2 dt,\, P\in\mathbb{R}_3[X],\, P \text{ unitaire}\right\}=\inf\left\{\|X^3-Q\|^2,\, Q\in\mathbb{R}_2[X]\right\}=\left(\inf_{Q\in\mathbb{R}_2[X]}\|X^3-Q\|\right)^2.$$

Soit :

$$\begin{aligned} d&=d\left(X^3,\mathbb{R}_2[X]\right)^2=\|X^3-R\|^2=\left\|\frac{3}{5}X-X^3\right\|^2=\int_{-1}^{1}\left(\frac{3}{5}t-t^3\right)^2 dt\\ &=\int_{-1}^{1}\left(\frac{9}{25}t^2-\frac{6}{5}t^4+t^6\right)dt=2\left(\frac{3}{25}-\frac{6}{25}+\frac{1}{7}\right)\end{aligned}$$

Et l'on trouve :

$$\boxed{d=\inf\left\{\int_{-1}^{1}\left(P(t)\right)^2 dt,\, P\in\mathbb{R}_3[X],\, P \text{ unitaire}\right\}=\frac{8}{175}}$$

## *Planche n° 5*

Soit $x\in\left[1,+\infty\right[$.

Prouvons par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n(x)$ est défini, strictement supérieur à 1, sauf quand $x=1$ et $n=0$ (et dans ce cas $u_0(1)=1$), et rationnel en *x*.

*Initialisation* :

Pour $n=0$, $u_0(x)=x$ est bien défini, strictement supérieur à 1, sauf pour $x=1$, et rationnel en *x*.

La propriété est donc vraie au rang $n=0$.

*Hérédité* :

Supposons la propriété vraie à un rang $n\in\mathbb{N}$.

Alors, comme $u_n(x)\geq 1$ (avec égalité seulement quand $x=1$ et $n=0$), $\dfrac{1}{u_n(x)}$ est défini et strictement positif, donc $u_{n+1}(x)=u_n(x)+\dfrac{1}{u_n(x)}$ est défini et $u_{n+1}(x)>u_n(x)\geq 1$, donc $u_{n+1}(x)>1$.

De plus, comme $u_n(x)$ est rationnel en *x*, $\dfrac{1}{u_n(x)}$ l'est aussi, donc $u_{n+1}(x)=u_n(x)+\dfrac{1}{u_n(x)}$ est encore rationnel en *x* (car la somme de deux fonctions rationnelles est une fonction rationnelle).

Ainsi, $u_{n+1}(x)$ est défini, strictement supérieur à 1 et rationnel en *x*, donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bien définie.}}$$

De plus, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n$ est une fonction rationnelle, définie sur $[1,+\infty[$ et strictement supérieure à 1 (sauf pour $n=0$, où l'on a $u_0(1)=1$ et $u_n(x)>1$ sur $]1,+\infty[$).

Soit à nouveau $x\in[1,+\infty[$ fixé.

D'après ce qui précède, on a immédiatement $u_{n+1}(x)>u_n(x)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, donc $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante. Si elle converge vers une limite $\ell\in\mathbb{R}$, on a $\ell>1$ (car $\ell\geq u_1(x)>1$) et :

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1}(x)=\ell=\lim_{n\to+\infty}\left(u_n(x)+\frac{1}{u_n(x)}\right)=\ell+\frac{1}{\ell}.$$

Donc $\frac{1}{\ell}=0$, ce qui est absurde. Ainsi, $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas et comme elle est croissante :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n(x)=+\infty}$$

On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[1,+\infty[$, $f_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{u_n(x)}$.

Pour $x\in[1,+\infty[$, la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante, strictement positive et de limite infinie, donc la suite $\left(\dfrac{1}{u_n(x)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante, strictement positive et de limite nulle.

Ainsi, pour tout $x\in[1,+\infty[$, la série $\sum\dfrac{(-1)^n}{u_n(x)}$ vérifie le critère spécial des séries alternées, donc converge. Ceci prouve que :

$$\boxed{\text{La série } \textstyle\sum f_n \text{ converge simplement sur } [1,+\infty[.}$$

On note $f$ la somme de $\sum f_n$. Comme pour tout $x\in[1,+\infty[$, la série $\sum f_n(x)$ vérifie le critère spécial des séries alternées, on a pour tout $n\in\mathbb{N}$ :

$$\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n} f_k(x)\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right|\leq|f_{n+1}(x)|=\frac{1}{u_{n+1}(x)}.$$

Or, on a vu que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n$ est une fonction rationnelle strictement positive sur $[1,+\infty[$, donc $\dfrac{1}{u_n}$ aussi et ces deux fonctions sont dérivables sur $[1,+\infty[$.

Alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[1,+\infty[$ :

$$u_{n+1}'(x) = u_n'(x) - \frac{u_n'(x)}{u_n(x)^2} = u_n'(x)\frac{u_n(x)^2 - 1}{u_n(x)^2}.$$

Or, $u_n(x) \geq 1$ avec égalité seulement pour $n = 0$ et $x = 1$.

Ainsi, pour tout $x \in \left]1, +\infty\right[$, on a $\dfrac{u_n(x)^2 - 1}{u_n(x)^2} > 0$ et si $u_n'(x) > 0$, alors $u_{n+1}'(x) > 0$.

Or, $u_0'(x) = 1 > 0$ sur $\left]1, +\infty\right[$. Donc, on vient de prouver par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \left]1, +\infty\right[$, $u_n'(x) > 0$ et donc que $u_n$ est strictement croissante sur $\left[1, +\infty\right[$.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \left[1, +\infty\right[$ :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \right| \leq \frac{1}{u_{n+1}(x)} \leq \frac{1}{u_{n+1}(1)}.$$

Et comme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n(1) = +\infty$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{u_{n+1}(1)} = 0$. Ceci prouve que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $\left[1, +\infty\right[$. Et comme $f_n = \dfrac{(-1)^n}{u_n}$ est continue (car rationnelle) sur $\left[1, +\infty\right[$ :

$$\boxed{f = \sum_{n \geq 0} f_n \text{ est continue sur } \left[1, +\infty\right[.}$$

On vient de prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\sup_{[1,+\infty[} |f_n| = \sup_{[1,+\infty[} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_n(1)}.$$

Donc, $\sum f_n$ converge normalement sur $\left[1, +\infty\right[$ si et seulement si $\sum \dfrac{1}{u_n(1)}$ converge.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{u_n(1)} = u_{n+1}(1) - u_n(1)$, donc la série $\sum \dfrac{1}{u_n(1)}$ converge si et seulement si la série $\sum \left(u_{n+1}(1) - u_n(1)\right)$ converge, autrement dit, si et seulement si la suite $\left(u_n(1)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Or, on vu que pour $x \in \left[1, +\infty\right[$, y compris pour $x = 1$, $\left(u_n(x)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers l'infini.

Tout ceci prouve que $\sum \sup\limits_{[1,+\infty[} |f_n|$ diverge et donc que :

$$\boxed{\text{La série de fonctions } \sum f_n \text{ ne converge pas normalement sur } \left[1, +\infty\right[.}$$

## *Planche n° 6*

La fonction polynômiale $f_n : t \mapsto t^n - t + 1$ est définie et dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f_n' : t \mapsto nt^{n-1} - 1$.

Remarquons que :

- pour $t \geq 1$, on a $t^n \geq t$ donc $f_n(t) = t^n - t + 1 \geq 1$ et $f_n$ ne s'annule pas sur $[1, +\infty[$ ;
- pour $0 \leq t < 1$, on a $f_n(t) = t^n - t + 1 > t^n \geq 0$ et $f_n$ ne s'annule pas sur $[0, 1]$.

Ainsi, $f_n$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$.

Pour l'étude sur $\mathbb{R}_-$, distinguons deux cas.

<u>$n$ pair</u> (donc $n-1$ est impair)

Sur $\mathbb{R}_-$, $f_n'(t) < 0$ donc $f_n$ est décroissante jusqu'à $f_n(0) = 1 > 0$, donc ne s'annule pas.

Ainsi, quand $n$ est pair, $f_n$ ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$.

<u>$n$ impair</u> (donc $n-1$ est pair)

On a $f_n'(t) = 0$ quand $t = \pm \dfrac{1}{\sqrt[n-1]{n}}$ et $f_n'(t) < 0$ entre les deux racines.

- Sur $\left] -\infty, -\dfrac{1}{\sqrt[n-1]{n}} \right]$, la fonction $f_n$ est continue et strictement croissante de $\lim\limits_{-\infty} f_n = -\infty$ (car $n$ est impair) à $f_n\left(-\dfrac{1}{\sqrt[n-1]{n}}\right) = 1 - \left(\dfrac{1}{\sqrt[n-1]{n}}\right)^n + \dfrac{1}{\sqrt[n-1]{n}} > 0$ car $\left(\dfrac{1}{\sqrt[n-1]{n}}\right)^n \leq 1$, donc s'annule exactement une fois.
- Sur $\left[ -\dfrac{1}{\sqrt[n-1]{n}}, 0 \right]$, la fonction $f_n$ est strictement décroissante jusqu'à $f_n(0) = 1 > 0$, donc ne s'annule pas.

Ainsi, quand $n$ est impair, $f_n$ s'annule exactement une fois sur $\mathbb{R}$.

Finalement, $f_n$ s'annule au plus exactement une fois sur $\mathbb{R}$ et donc :

$$\boxed{P_n(X) = X^n - X + 1 \text{ admet au plus une racine réelle.}}$$

On a $P_n' = nX^{n-1} - 1 = n\left(X^{n-1} - \dfrac{1}{n}\right)$, donc :

$$\boxed{\text{Les racines complexes de } P_n' \text{ sont les } \frac{1}{\sqrt[n-1]{n}} e^{i\frac{2k\pi}{n-1}},\ k \in [\![0, n-2]\!].}$$

Soit $z$ une racine réelle ou complexe de $P_n$. Si $z$ est une racine au moins double, alors :

$$P_n'(z) = P_n(z) = 0 \iff \begin{cases} z^n - z + 1 = 0 \\ z^{n-1} - \dfrac{1}{n} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{1}{n} z - z + 1 = 0 \\ z^{n-1} = \dfrac{1}{n} \end{cases} \iff \begin{cases} z = \dfrac{n}{n-1} \\ z^{n-1} = \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

Ceci implique que $\left(\dfrac{n}{n-1}\right)^{n-1}=\dfrac{1}{n}$, soit $n^n=(n-1)^{n-1}$. Ceci est absurde car la suite $(n^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante. Donc, on ne peut pas avoir $P_n\,'(z)=P_n(z)=0$ et ainsi :

$$\boxed{\text{Toutes les racines (réelle ou complexes) de } P_n \text{ sont simples.}}$$

Les complexes $r_1, r_2, r_3$ sont les racines de $P_3=X^3-X+1$, donc:

$$\begin{cases} r_1+r_2+r_3=0 \\ r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1=-1 \\ r_1r_2r_3=-1 \end{cases}$$

On a :

$$d=\begin{vmatrix} 1+r_1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+r_2 & 1 \\ 1 & 1 & 1+r_3 \end{vmatrix} \underset{\substack{C_1\leftarrow C_1-C_2 \\ C_3\leftarrow C_3-C_2}}{=} \begin{vmatrix} r_1 & 1 & 0 \\ -r_2 & 1+r_2 & -r_2 \\ 0 & 1 & r_3 \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la première ligne :

$$\begin{aligned} d &= r_1\begin{vmatrix} 1+r_2 & -r_2 \\ 1 & r_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -r_2 & -r_2 \\ 0 & r_3 \end{vmatrix} \\ &= r_1\left[(1+r_2)r_3+r_2\right]-\left(-r_2r_3\right)=r_1r_3+r_1r_2r_3+r_1r_2+r_2r_3 \\ &= r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1+r_1r_2r_3=-1-1 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{d=\begin{vmatrix} 1+r_1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+r_2 & 1 \\ 1 & 1 & 1+r_3 \end{vmatrix}=-2}$$

**_Série 2_**

## *Planche n° 7 (ENSAM)*

1) Pour tout $(P,Q)\in \mathbb{R}_2[X]^2$, $\varphi(P,Q)=\left(P\mid Q\right)=P(0)Q(0)+P'(0)Q'(0)+P''(0)Q''(0)$.

- $\varphi$ est symétrique (par commutativité du produit) et bilinéaire (par linéarité de la dérivation et distributivité du produit sur l'addition).
- Pour tout $P\in \mathbb{R}_2[X]$, $\left(P\mid P\right)=P(0)^2+P'(0)^2+P''(0)^2\geq 0$, donc $\varphi$ est positive.
- Enfin, pour tout $P\in \mathbb{R}_2[X]$, $t\mapsto P(t)^2$ est continue et positive sur $\left[-1,1\right]$, donc :

$$\begin{aligned}\left(P\mid P\right)=P(0)^2+P'(0)^2+P''(0)^2=0 \quad &\Leftrightarrow \quad P(0)=P'(0)=P''(0)=0\\ &\Leftrightarrow \quad 0 \text{ est racine au moins triple de } P\in \mathbb{R}_2[X]\end{aligned}$$

Ceci implique que $P$ possède au moins trois racines (comptées avec multiplicité) et comme $\deg P\leq 2$, $P$ est nul.

Ainsi, $\varphi$ est définie.

Finalement :

$$\boxed{\text{L'application } \varphi \text{ définit bien un produit scalaire sur } \mathbb{R}_2[X].}$$

2) Pour tout $P\in \mathbb{R}_2[X]$, $\left(P\mid 1\right)=P(0)$ et $\left(P\mid X\right)=P'(0)$, donc :

- $\left(X\mid 1\right)=\left(X^2\mid 1\right)=0$ (car $X$ et $X^2$ s'annulent en 0) ;
- $\left(X\mid X^2\right)=0$ (car $(X^2)'=2X$ ).

Donc :

$$\boxed{\text{La famille } \left(1,X,X^2\right) \text{ est orthogonale.}}$$

3) Pour tous $P,Q\in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda\in \mathbb{R}$

$$f(P+\lambda Q)=(P+\lambda Q)(1-X)=P(1-X)+\lambda Q(1-X)=f(P)+\lambda f(Q).$$

De plus, $f(P)$ est un polynôme et :

$$\deg f(P)=\deg\left[P\circ(1-X)\right]=\deg P\times\deg(1-X)=\deg P\times 1=\deg P\leq 2.$$

Donc, $f(P)\in \mathbb{R}_2[X]$ et ainsi, $f$ est un endomorphisme.

Pour tout $P\in \mathbb{R}_2[X]$, si $f(P)=Q$, on a :

$$f\circ f(P)=f(Q)=Q(1-X)=P\big(1-(1-X)\big)=P(X)=P.$$

Donc, $f\circ f=id_{\mathbb{R}_2[X]}$ et ainsi, $f$ est une symétrie.

Finalement :

$$\boxed{f \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}_2[X] \text{ et } f^{-1} = f\,.}$$

Remarquons que $\|1\| = \sqrt{(1 \mid 1)} = 1$, $\|X\| = \sqrt{(X \mid X)} = 1$ et $\|X^2\| = \sqrt{(X^2 \mid X^2)} = 2$, donc la famille $\mathcal{B} = \left(1, X, \frac{1}{2}X^2\right)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$. On a :

$$f(1) = 1$$
$$f(X) = 1 - X$$
$$f\left(\frac{1}{2}X^2\right) = \frac{1}{2}(1-X)^2 = \frac{1}{2} - X + \frac{1}{2}X^2$$

Donc :

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & ½ \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & ½ \end{pmatrix}$$

La deuxième colonne de $M_{\mathcal{B}}(f)$ est de norme $\sqrt{2}$, donc pas 1, donc la matrice de *f* dans la base orthonormée $\mathcal{B}$ n'est pas orthogonale, ce qui prouve que :

$$\boxed{f \text{ n'est pas une isométrie.}}$$

*Remarque* : $\|f(X)\| = \sqrt{2} \neq 1 = \|X\|$ suffisait ici pour affirmer que *f* n'est pas une isométrie !

## *Planche n° 8* (*Il y a avait des questions Python*)

Le premier terme $z_1 = 1$ de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien défini et non nul.

Si pour $n \in \mathbb{N}$, $z_n$ est défini et non nul, alors $|z_n| \neq 0$, donc $z_{n+1} = z_n + i\dfrac{z_n}{|z_n|}$ est défini.

De plus, si $z_{n+1} = z_n + i\dfrac{z_n}{|z_n|} = z_n\left(1 + i\dfrac{1}{|z_n|}\right) = 0$, alors $1 + i\dfrac{1}{|z_n|} = 0$ (car $z_n \neq 0$) et $i = -|z_n| \in \mathbb{R}$, ce qui est faux. Donc, $z_{n+1} \neq 0$.

Ceci prouve par récurrence que :

$$\boxed{\text{La suite } (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bien définie (et ne s'annule pas).}}$$

Comme $g$ est de classe $C^1$ de $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $t \mapsto g(t+1)$ est aussi et en dérivant la relation $g(t+1)-g(t)=\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)=\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\sqrt{t}\right)$, on obtient, pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$ :

$$g'(t+1)-g'(t)=-\frac{1}{2(1+t)\sqrt{t}}.$$

Alors, pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$ et $n\in\mathbb{N}$, on a :

$$g'(t)-g'(t+n+1)=\sum_{k=0}^{n}\left[g'(t+k)-g'(t+k+1)\right]=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2(t+k+1)\sqrt{t+k}}.$$

Or, à $t$ fixé, $t+n+1\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} g'(t+n+1)=0$ (car $\lim\limits_{+\infty} g'=0$) et ainsi, la série $\sum\frac{1}{2(t+k+1)\sqrt{t+k}}$ converge (on pouvait aussi comparer à la série de Riemann $\sum\frac{1}{k\sqrt{k}}$).

Alors, pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$ :

$$\boxed{g'(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2(t+k+1)\sqrt{t+k}}}$$

Soit un réel $t\geq 1$.

Pour tout $k\in\mathbb{N}$, posons $h_k(u)=\frac{1}{2(u+k+1)\sqrt{u+k}}$ sur $[1,+\infty[$.

Pour tout $k\in\mathbb{N}$, $h_k$ est continue sur $[1,+\infty[$, donc sur $[1,t]$, et pour tout $u\in[1,+\infty[$ :

$$|h_k(u)|\leq\frac{1}{2(k+1)\sqrt{k}}.$$

Comme la série de Riemann $\sum\frac{1}{k\sqrt{k}}$ converge, $\sum\frac{1}{2(k+1)\sqrt{k}}$ converge aussi, donc $\sum h_k$ converge normalement, donc uniformément, sur $[1,+\infty[$, donc sur $[1,t]$ et ainsi $\sum\left(\int_1^t h_k(u)\,du\right)$ converge et

$$\int_1^t g'(u)\,du=\int_1^t\left(\sum_{k=0}^{+\infty}h_k(u)\right)du=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\int_1^t h_k(u)\,du\right).$$

Soit, avec $g(1)=0$ :

$$g(t)=g(t)-g(1)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\int_1^t\frac{du}{2(u+k+1)\sqrt{u+k}}\right).$$

Or, on a vu plus haut que $t\mapsto-\frac{1}{2(1+t)\sqrt{t}}$ est la dérivée de $t\mapsto\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$, donc :

$$g(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left[-\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{u+k}}\right)\right]_1^t=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(-\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{t+k}}\right)+\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{1+k}}\right)\right).$$

Ainsi, pour tout réel $t \geq 1$ :

$$g(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{k+t}}\right) \right).$$

Si maintenant, $t \in \left]0,1\right]$, on a $t+1 \geq 1$, donc :

$$\begin{aligned}
g(t+1) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{k+t+1}}\right) \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left( \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{k+t}}\right) \right) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \left( \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) \right) + \sum_{k=1}^{+\infty} \left( \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{k+t}}\right) \right) \\
&= \arctan 1 - \arctan 0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left( \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{k+t}}\right) \right) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{k+t}}\right) \right) + \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)
\end{aligned}$$

Or, $g(t+1) - g(t) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$, soit $g(t) = g(t+1) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ et on retrouve :

$$g(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{k+t}}\right) \right).$$

Finalement, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ :

$$\boxed{g(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} \left( \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{p+1}}\right) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{p+t}}\right) \right)}$$

Notons $B_n$ le point de $\Gamma$ d'affixe $x(n) + i\,y(n)$ du plan complexe.

Prouvons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n = A_n$, soit $x(n) + i\,y(n) = z_n$.

*Initialisation* :

On a $g(1) = 0$, donc $x(1) + i\,y(1) = 1 = z_1$ : la propriété est vraie au rang $n = 1$.

*Hérédité* :

Supposons la propriété vraie à un rang $n \in \mathbb{N}^*$.

On a $g(n+1) = g(n) + \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ et, comme $\frac{1}{\sqrt{n}} > 0$, $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, donc :

$$\begin{cases}
\cos\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = \sqrt{\cos^2\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)} = \sqrt{\dfrac{1}{1+\tan^2\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)}} = \sqrt{\dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}} = \sqrt{\dfrac{n}{n+1}} \\
\sin\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = \sqrt{\sin^2\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)} = \sqrt{1-\dfrac{1}{1+\tan^2\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)}} = \sqrt{1-\dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}} = \sqrt{\dfrac{1}{n+1}}
\end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} x(n+1) = \sqrt{n+1}\cos\big(g(n+1)\big) = \sqrt{n+1}\left[\cos\left(g(n)+\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\right] \\ \quad = \sqrt{n+1}\left[\cos\big(g(n)\big)\cos\left(\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)-\sin\big(g(n)\big)\sin\left(\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\right] \\ \quad = \sqrt{n+1}\left[\dfrac{x(n)}{\sqrt{n}}\sqrt{\dfrac{n}{n+1}}-\dfrac{y(n)}{\sqrt{n}}\sqrt{\dfrac{1}{n+1}}\right] \\ \quad = x(n)-\dfrac{y(n)}{\sqrt{n}} \\ y(n+1) = \sqrt{n+1}\sin\big(g(n+1)\big) = \sqrt{n+1}\left[\sin\left(g(n)+\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\right] \\ \quad = \sqrt{n+1}\left[\sin\big(g(n)\big)\cos\left(\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)+\cos\big(g(n)\big)\sin\left(\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\right] \\ \quad = \sqrt{n+1}\left[\dfrac{y(n)}{\sqrt{n}}\sqrt{\dfrac{n}{n+1}}+\dfrac{x(n)}{\sqrt{n}}\sqrt{\dfrac{1}{n+1}}\right] \\ \quad = y(n)+\dfrac{x(n)}{\sqrt{n}} \end{cases}$$

Or, $\sqrt{x(n)^2+y(n)^2}=\sqrt{n}$ et par hypothèse de récurrence, $x(n)+i\,y(n)=z_n$, donc $|z_n|=\sqrt{n}$ et :

$$x(n+1)+i\,y(n+1)=x(n)-\frac{y(n)}{\sqrt{n}}+i\left(y(n)+\frac{x(n)}{\sqrt{n}}\right)=x(n)+i\,y(n)+i\frac{x(n)+i\,y(n)}{\sqrt{n}}=z_n+i\frac{z_n}{|z_n|}=z_{n+1}.$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. Ainsi :

$$\boxed{\text{Les points } A_n \text{ appartiennent tous à l'arc } \Gamma.}$$

## *Planche n° 9*

Soit $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$.

Si $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ est $\mathbb{R}$-linéaire, notons $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

On a alors, pour tout $z=x+iy\in\mathbb{C}$ avec $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ :

$$f(z)=\alpha x+\beta y+i\big(\gamma x+\delta y\big).$$

Or, $x=\dfrac{z+\overline{z}}{2}$ et $y=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$, donc :

$$f(z)=\alpha\frac{z+\overline{z}}{2}+\beta\frac{z-\overline{z}}{2i}+i\left(\gamma\frac{z+\overline{z}}{2}+\delta\frac{z-\overline{z}}{2i}\right)=\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}i+\frac{\gamma}{2}i+\frac{\delta}{2}\right)z+\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}i+\frac{\gamma}{2}i-\frac{\delta}{2}\right)\overline{z}.$$

Ainsi, avec $a=\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}i+\frac{\gamma}{2}i+\frac{\delta}{2}$ et $b=\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}i+\frac{\gamma}{2}i-\frac{\delta}{2}$, il existe $(a,b)\in\mathbb{C}^2$ tel que pour tout $z\in\mathbb{C}$ :

$$f(z)=az+b\overline{z}\ .$$

Réciproquement, s'il existe $(a,b)\in\mathbb{C}^2$ tel que $f(z)=az+b\overline{z}$ pour tout $z\in\mathbb{C}$, alors *f* est linéaire par linéarité de la conjugaison.

Enfin, si $f:z\mapsto az+b\overline{z}$ avec $(a,b)\in\mathbb{C}^2$, on a :

$$\begin{cases} f(1)=a+b \\ f(i)=ai-bi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(1)=a+b \\ if(i)=b-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{f(1)-if(i)}{2} \\ b=\dfrac{f(1)+if(i)}{2} \end{cases}$$

Donc, les complexes *a* et *b* sont uniques.

Finalement :

$$\boxed{\text{Une application } f:\mathbb{C}\to\mathbb{C} \text{ est } \mathbb{R}\text{-linéaire si et seulement s'il existe } (a,b)\in\mathbb{C}^2 \text{ tel que } f(z)=az+b\overline{z} \text{ pour tout } z\in\mathbb{C} \text{ et les constantes } a \text{ et } b \text{ sont uniques.}}$$

Une base de $\mathbb{C}$ est $(1,i)$ et *f* est un automorphisme de $\mathbb{C}$ si et seulement si l'image de cette base $\big(f(1),f(i)\big)$ est encore une base de $\mathbb{C}$, autrement dit si $f(1)$ et $f(i)$ ne sont pas proportionnels (dans $\mathbb{R}$).

Or, $f(1)$ et $f(i)$ sont proportionnels si et seulement si $f(1)\overline{f(i)}\in\mathbb{R}$ (cours de première année).

On a :

$$f(1)\overline{f(i)}=(a+b)(\overline{ai-bi})=(a+b)(-\overline{a}i+\overline{b}i)=(a+b)(-\overline{a}+\overline{b})i=(-a\overline{a}-b\overline{a}+a\overline{b}+b\overline{b})i\ .$$

Et :

$$\begin{aligned} f(1)\overline{f(i)}\in\mathbb{R} &\Leftrightarrow f(1)\overline{f(i)}=\overline{f(1)\overline{f(i)}} \\ &\Leftrightarrow (-a\overline{a}-b\overline{a}+a\overline{b}+b\overline{b})i=\overline{(-a\overline{a}-b\overline{a}+a\overline{b}+b\overline{b})i} \\ &\Leftrightarrow (-a\overline{a}-b\overline{a}+a\overline{b}+b\overline{b})i=-(-a\overline{a}-a\overline{b}+b\overline{a}+b\overline{b})i \\ &\Leftrightarrow -a\overline{a}-b\overline{a}+a\overline{b}+b\overline{b}=a\overline{a}+a\overline{b}-b\overline{a}-b\overline{b} \\ &\Leftrightarrow a\overline{a}=b\overline{b} \\ &\Leftrightarrow |a|^2=|b|^2 \end{aligned}$$

Finalement, pour tout $(a,b)\in\mathbb{C}^2$ :

$$\boxed{f:z\mapsto az+b\overline{z} \text{ est un automorphisme de } \mathbb{C} \text{ si et seulement si } |a|=|b|.}$$

Comme les réflexions sont linéaires, l'écriture complexe de $r_\theta$ est de la forme $z' = f(z) = az + b\overline{z}$ avec $(a,b) \in \mathbb{C}^2$.

De plus, les vecteurs de l'axe, en particulier $\vec{v}$, sont invariants par $r_\theta$, donc $f(e^{i\theta}) = e^{i\theta}$ et tout vecteur orthogonal à l'axe, en particulier le vecteur d'affixe $e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)} = ie^{i\theta}$, est transformé en son opposé, donc $f(ie^{i\theta}) = -ie^{i\theta}$. Ainsi :

$$\begin{cases} f(e^{i\theta}) = ae^{i\theta} + b\overline{e^{i\theta}} = ae^{i\theta} + be^{-i\theta} = e^{i\theta} \\ f(ie^{i\theta}) = a(ie^{i\theta}) + b\overline{(ie^{i\theta})} = iae^{i\theta} - ibe^{-i\theta} = -ie^{i\theta} \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} ae^{i\theta} + be^{-i\theta} = e^{i\theta} \\ ae^{i\theta} - be^{-i\theta} = -e^{i\theta} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2ae^{i\theta} = 0 \\ 2be^{-i\theta} = 2e^{i\theta} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = e^{i2\theta} \end{cases}$$

Donc :

$$\boxed{\text{L'écriture complexe de } r_\theta \text{ est } z' = e^{i2\theta}\overline{z}.}$$

## *Planche n° 10* (*Il y a avait des questions Python*)

Si $P = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0$ avec $a_n \neq 0$, on a $\dfrac{P(k)}{k!} \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{a_n k^n}{k!}$ et par croissance comparés, $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{k^{n+2}}{k!} = 0$, donc $\dfrac{P(k)}{k!} = \underset{k\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$ et comme la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{k^2}$ converge, la série $\sum \dfrac{P(k)}{k!}$ converge aussi et donc :

$$\boxed{S(P) \text{ est bien définie pour tout } P \in \mathbb{R}[X].}$$

Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, comme $\sum \dfrac{P(k)}{k!}$ et $\sum \dfrac{Q(k)}{k!}$ convergent, $\sum \left(\dfrac{P(k)}{k!} + \lambda \dfrac{Q(k)}{k!}\right)$ converge et :

$$S(P+\lambda Q) = \sum_{k\geq 0} \frac{(P+\lambda Q)(k)}{k!} = \sum_{k\geq 0} \left(\frac{P(k)}{k!} + \lambda \frac{Q(k)}{k!}\right) = \sum_{k\geq 0} \frac{P(k)}{k!} + \lambda \sum_{k\geq 0} \frac{Q(k)}{k!} = S(P) + \lambda S(Q).$$

Ainsi, $S$ est linéaire et à images dans $\mathbb{R}$, donc :

$$\boxed{S \text{ est une forme linéaire sur } \mathbb{R}[X].}$$

On $H_0(X)=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $H_{n+1}(X)=(X-n)H_n(X)$, ce qui donne pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ :

$$H_n(X)=X(X-1)...(X-n+1)=\prod_{j=0}^{n-1}(X-j)\,.$$

On a pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\deg H_{n+1}=\deg(X-n)+\deg H_n=\deg H_n+1$, donc $\left(\deg H_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme $\deg H_0=0$, donc pour tout $n\in\mathbb{N}$ :

$$\deg H_n=n\,.$$

La famille $(H_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est donc une famille échelonnée en degré de $n+1$ polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$, qui est dimension $n+1$, donc :

$$\boxed{(H_k)_{k\in[\![0,n]\!]} \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X]\,.}$$

Pour tout $k\in\mathbb{N}$ et tout $n\in\mathbb{N}$, on a $H_0(k)=1$ et si $n\geq 1$ :

$$H_n(k)=k(k-1)...\big(k-(n-1)\big)=\begin{cases} 0 & \text{si } k<n \\ \dfrac{k!}{(k-n)!} & \text{si } k\geq n\end{cases}$$

Cette relation reste valable pour $n=0\leq k$ donc :

$$S(H_n)=\sum_{k\geq 0}\frac{H_n(k)}{k!}=\sum_{k\geq n}\frac{1}{k!}\frac{k!}{(k-n)!}=\sum_{k\geq n}\frac{1}{(k-n)!}=\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}=e\,.$$

Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$ :

$$\boxed{S(H_n)=e}$$

Soit $P\in\mathbb{R}[X]$. On note $\deg P=n$. Alors, $P\in\mathbb{R}_n[X]$ et comme $(H_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, il existe $(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$ tel que $P=\alpha_0H_0+\alpha_1H_1+...+\alpha_nH_n$.

Par linéarité de *S*, on a alors :

$$S(P)=\alpha_0S(H_0)+\alpha_1S(H_1)+...+\alpha_nS(H_n)=\alpha_0e+\alpha_1e+...+\alpha_ne\,.$$

Soit :

$$S(P)=e\big(\alpha_0+\alpha_1+...+\alpha_n\big)\,.$$

Reste à évaluer la somme $\alpha_0+\alpha_1+...+\alpha_n$ à l'aide de *P*.

Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $P(k)=\sum_{j=0}^{n}\alpha_j H_j(k)=\sum_{j=0}^{k}\alpha_j \dfrac{k!}{(k-j)!}$, soit :

$$\begin{cases} P(0)=\alpha_0 \\ P(1)=\alpha_0+\alpha_1 \\ P(2)=\alpha_0+2\alpha_1+2\alpha_2 \\ P(3)=\alpha_0+3\alpha_1+3!\alpha_2+3!\alpha_3 \\ \quad\vdots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_0=P(0) \\ \alpha_1=P(1)-P(0) \\ \alpha_2=\dfrac{1}{2}\big(P(2)-2P(1)+P(0)\big) \\ \alpha_3=\dfrac{1}{3!}\big(P(3)-3P(2)+3P(1)-P(0)\big) \\ \quad\vdots \end{cases}$$

On peut alors conjecturer que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\alpha_k=\dfrac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\dbinom{k}{j}P(j)$.

La propriété est vraie au rang 0 et si elle est vraie jusqu'au rang $k \in [\![0,n-1]\!]$ (quand $n \geq 1$), alors :

$$\begin{aligned}
P(k+1)=\sum_{i=0}^{k+1}\alpha_i\frac{(k+1)!}{(k+1-i)!} \quad &\Leftrightarrow \quad \alpha_{k+1}=\frac{1}{(k+1)!}P(k+1)-\sum_{i=0}^{k}\frac{\alpha_i}{(k+1-i)!} \\
&\Leftrightarrow \quad \alpha_{k+1}=\frac{1}{(k+1)!}P(k+1)-\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{(k+1-i)!}\left(\frac{1}{i!}\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i-j}\binom{i}{j}P(j)\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \alpha_{k+1}=\frac{1}{(k+1)!}P(k+1)-\sum_{0\leq j\leq i\leq k}(-1)^{i-j}\frac{1}{(k+1-i)!}\frac{1}{j!(i-j)!}P(j) \\
&\Leftrightarrow \quad \alpha_{k+1}=\frac{1}{(k+1)!}P(k+1)-\sum_{j=0}^{k}\frac{P(j)}{j!}\sum_{i=j}^{k}\frac{(-1)^{i-j}}{(i-j)!(k+1-i)!} \\
&\Leftrightarrow \quad \alpha_{k+1}=\frac{1}{(k+1)!}P(k+1)-\sum_{j=0}^{k}\frac{P(j)}{j!(k+1-j)!}\sum_{i=0}^{k-j}(-1)^i\frac{(k+1-j)!}{i!(k+1-j-i)!} \\
&\Leftrightarrow \quad \alpha_{k+1}=\frac{1}{(k+1)!}\left[P(k+1)-\sum_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j}P(j)\sum_{i=0}^{k-j}(-1)^i\binom{k+1-j}{i}\right]
\end{aligned}$$

Or, $\sum_{i=0}^{k-j}(-1)^i\dbinom{k+1-j}{i}=\sum_{i=0}^{k+1-j}(-1)^i\dbinom{k+1-j}{i}-(-1)^{k+1-j}=(-1+1)^{k+1-j}-(-1)^{k+1-j}=(-1)^{k-j}$, donc :

$$\alpha_{k+1}=\frac{1}{(k+1)!}\left[P(k+1)-\sum_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j}P(j)(-1)^{k-j}\right]=\frac{1}{(k+1)!}\sum_{j=0}^{k+1}\binom{k+1}{j}P(j)(-1)^{k+1-j}$$

La relation est donc vraie au rang $k+1$.

On vient de prouver par récurrence que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\alpha_k=\dfrac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\dbinom{k}{j}P(j)$.

Alors :

$$\begin{aligned}
\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_n &=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}P(j)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^{k-j}}{j!(k-j)!}P(j) \\
&=\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n}\frac{(-1)^{k-j}}{j!(k-j)!}P(j)=\sum_{j=0}^{n}\frac{P(j)}{j!}\sum_{k=j}^{n}\frac{(-1)^{k-j}}{(k-j)!}=\sum_{j=0}^{n}\frac{P(j)}{j!}\sum_{k=0}^{n-j}\frac{(-1)^k}{k!}
\end{aligned}$$

Et ainsi :

$$\boxed{S(P)=e\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{k=0}^{n-j}\frac{(-1)^k}{k!}\right)\frac{P(j)}{j!}}$$

## *Planche n° 11*

Soit $x\in\mathbb{R}$. La fonction $t\mapsto\dfrac{t^x}{1+t}$ est continue sur $]0,1]$ en tant que quotient de telles fonctions.

On a $\dfrac{t^x}{1+t}\underset{t\to 0}{\sim}t^x$ et l'intégrale de Riemann $\int_0 t^x dt$ converge si et seulement si $x>-1$, donc :

$$\boxed{\text{La fonction } F \text{ est définie sur } ]-1,+\infty[\,.}$$

Soit $f:(x,t)\mapsto\dfrac{t^x}{1+t}=\dfrac{e^{x\ln t}}{1+t}$ définie sur $]-1,+\infty[\times]0,1]$.

- Pour tout $k\in\mathbb{N}$ et tout $t\in]0,1]$, $x\mapsto f(x,t)$ est de classe $C^k$ sur $]-1,+\infty[$, car elle est proportionnelle à une fonction exponentielle.
- Pour tout $k\in\mathbb{N}$ et tout $x\in]-1,+\infty[$, $t\mapsto\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)=\dfrac{(\ln t)^k e^{x\ln t}}{1+t}=\dfrac{(\ln t)^k t^x}{1+t}$ est continue par morceaux sur $]0,1]$ en tant que quotient de telles fonctions.
- Pour tout $k\in\mathbb{N}$, tout $a\in]-1,+\infty[$ et tout $(x,t)\in[a,+\infty[\times]0,1]$, on a :

$$\left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right|=\frac{(-\ln t)^k t^x}{1+t}\leq\frac{(-\ln t)^k t^a}{1+t}.$$

Et, sur $]0,1]$, $t\mapsto\dfrac{(-\ln t)^k t^a}{1+t}$ est positive, continue par morceaux (en tant que quotient de telles fonctions). De plus, par croissances comparées (avec $\dfrac{a+1}{2}>0$), on a :

$$\frac{\dfrac{(-\ln t)^k t^a}{1+t}}{t^{\frac{a-1}{2}}}=\frac{(-\ln t)^k t^{\frac{a+1}{2}}}{1+t}\xrightarrow[t\to 0]{}0.$$

Donc, $\dfrac{(-\ln t)^k t^a}{1+t}\underset{t\to 0}{=}o\left(t^{\frac{a-1}{2}}\right)$ et l'intégrale $\int_0^1 t^{\frac{a-1}{2}}dt$ converge car $\dfrac{a-1}{2}>-1$.

Ainsi, $t\mapsto\dfrac{(-\ln t)^k t^a}{1+t}$ est intégrable sur $]0,1]$.

Alors, la fonction $F:x\mapsto\int_0^1\dfrac{t^x}{1+t}dt$ est de classe $C^\infty$ sur $[a,+\infty[$, et ceci pour tout $a\in]-1,+\infty[$.

Comme $\bigcup_{a\in]-1,+\infty[}[a,+\infty[=]-1,+\infty[$ :

$$\boxed{F \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } ]-1,+\infty[.}$$

Remarquons déjà que pour tout $x\in ]-1,+\infty[$, on a :

$$F(x)=\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,dt \geq \int_0^1 \frac{t^x}{2}\,dt=\frac{1}{2(x+1)}.$$

Comme $\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{1}{2(x+1)}=+\infty$, on $\lim\limits_{x\to -1^+}F(x)=+\infty$ par comparaison. Alors, si $F$ est développable en série entière, son rayon de convergence est inférieur ou égal à 1 (sinon le développement en série entière serait continue en – 1, donc $F$ admettrait une limite finie en – 1).

Soit alors $x\in ]-1,1[$ fixé.

Pour tout $t\in ]0,1]$, on a $\frac{t^x}{1+t}=\frac{e^{x\ln t}}{1+t}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\frac{(x\ln t)^n}{1+t}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\frac{(\ln t)^n}{1+t}$, donc :

$$F(x)=\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,dt=\int_0^1\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\frac{(\ln t)^n}{1+t}\right)dt=\int_0^1\left(\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(t)\right)dt$$

avec $f_n(t)=\frac{x^n}{n!}\frac{(\ln t)^n}{1+t}$ pour tout $t\in ]0,1]$ et tout $n\in\mathbb{N}$.

- Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n$ est continue par morceaux (quotient de telles fonctions) et intégrable sur $]0,1]$ (car $f_n(t)=\underset{t\to 0}{o}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$).
- La série $\sum f_n$ converge simplement vers $t\mapsto\frac{t^x}{1+t}$, qui est continue, donc continue par morceaux sur $]0,1]$.
- Posons $a=\frac{1+|x|}{2}$. Comme $|x|<1$, on a $|x|<a<1$, donc $\frac{|x|}{a}<1$.

  Pour tout $t\in ]0,1]$ et tout $n\in\mathbb{N}$ :

$$|f_n(t)|=\frac{|x|^n}{n!}\frac{|\ln t|^n}{1+t}\leq\left|\frac{x}{a}\right|^n\frac{a^n}{n!}\frac{|\ln t|^n}{1+t}\leq\left|\frac{x}{a}\right|^n\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^k}{k!}\frac{|\ln t|^k}{1+t}=\left|\frac{x}{a}\right|^n\frac{e^{a|\ln t|}}{1+t}=\left|\frac{x}{a}\right|^n\frac{e^{-a\ln t}}{1+t}=\left|\frac{x}{a}\right|^n\frac{t^{-a}}{1+t}.$$

  Comme $a<1$, on a $-a>-1$, donc $F(-a)=\int_0^1\frac{t^{-a}}{1+t}\,dt$ existe et :

$$\int_0^1|f_n(t)|\,dt\leq\left|\frac{x}{a}\right|^n F(-a).$$

Enfin, la série géométrique $\sum \left|\frac{x}{a}\right|^n F(-a)$ converge car $\left|\frac{x}{a}\right| = \frac{|x|}{a} < 1$, et par comparaison, on en déduite que la série $\sum \int_0^1 |f_n(t)|\,dt$ converge.

Avec $I_n = \int_0^1 \frac{(\ln t)^n}{1+t}\,dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout ceci permet de conclure que :

$$F(x) = \int_0^1 \left( \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{n!} \frac{(\ln t)^n}{1+t}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n$$

Ainsi, pour tout $x \in \left]-1,1\right[$, $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n$ donc $F$ est développable en série entière et son rayon de convergence est supérieur ou égal à 1. Or, on a vu plus haut que ce rayon de convergence est inférieur ou égal à 1.

Finalement :

$\boxed{F \text{ est développable en série entière et son rayon de convergence est 1.}}$

## *Planche n° 12*

1) a. On suppose que $A$ est diagonalisable, donc il existe $D = diag(a_1, \dots, a_n)$ et $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$. Alors, pour toute $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$AMA = 0_n \quad \Leftrightarrow \quad (PDP^{-1})M(PDP^{-1}) = 0_n \quad \Leftrightarrow \quad PD(P^{-1}MP)DP^{-1} = 0_n .$$

Et comme $P$ est inversible, ceci équivaut à $D(P^{-1}MP)D = 0_n$. De plus, l'application $f : M \mapsto P^{-1}MP$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (la bijectivité étant à nouveau une conséquence de l'inversibilité de $P$). Ainsi :

$$M \in E_A \quad \Leftrightarrow \quad f(M) = P^{-1}MP \in E_D .$$

Soit $f(E_A) = E_D$ et, comme $\dim f(E_A) = \dim E_A$, on finalement :

$$\boxed{\dim E_A = \dim E_D \text{ avec } D = P^{-1}AP \text{ diagonale.}}$$

b. Si $A$ est inversible, on a $AMA = 0_n$ équivaut $M = 0_n$, donc $E_A = \{0_n\}$ et $\dim E_A = 0$.

Si $A$ n'est pas inversible, soit $p = \dim \ker A \geq 1$ et avec la notation $D = diag(a_1, \dots, a_n)$ introduite dans la question précédente, supposons que $a_1 = \dots = a_p = 0$ (et $a_k \neq 0$ pour tout $k \in [\![ p+1, n ]\!]$ s'il y a lieu, c'est-à-dire si $p \neq n$, soit $A \neq 0_n$). En posant $\Delta = diag(a_{p+1}, \dots, a_n)$, on a donc :

$$D = \begin{pmatrix} 0_p & 0_{p,n-p} \\ 0_{n-p,p} & \Delta \end{pmatrix}.$$

Alors, pour toute $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $N = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 \\ N_3 & N_4 \end{pmatrix}$ avec $N_1 \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on a :

$$DND = \begin{pmatrix} 0_p & 0_{p,n-p} \\ 0_{n-p,p} & \Delta N_4 \Delta \end{pmatrix}.$$

Donc :

$$N \in E_D \quad \Leftrightarrow \quad DND = 0_n \quad \Leftrightarrow \quad \Delta N_4 \Delta = 0_{n-p} \quad \Leftrightarrow \quad N_4 = 0_{n-p}\,.$$

La dernière équivalence est vraie car $\Delta$ est une matrice diagonale dont tous les coefficients sont non nuls, donc est inversible.

Ainsi :

$$E_D = \left\{ N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), N = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 \\ N_3 & 0_{n-p} \end{pmatrix} \right\}.$$

Et :

$$\dim E_D = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) - \dim \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{R}) = n^2 - (n-p)^2\,.$$

Comme $p = \dim \ker A = n - rg\,(A)$ d'après le théorème du rang, on obtient avec la question précédente :

$$\dim E_A = \dim E_D = n^2 - \left(rg\,(A)\right)^2.$$

D'après ce que l'on a vu au début de la question, cette formule reste valable quand $A$ est inversible, car alors $rg\,(A) = n$ et $\dim E_A = 0$.

Ainsi, pour toute $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable :

$$\boxed{\dim E_A = n^2 - \left(rg\,(A)\right)^2}$$

2) Soit maintenant $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ quelconque.

On a vu que si $A$ est inversible, alors $E_A = \{0_n\}$ et $\dim E_A = 0$.

Supposons $A$ non inversible et notons à nouveau $p = \dim \ker A \geq 1$.

Soit $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à $A$ et $(e_1, \dots, e_p)$ une base de $\ker u = \ker A$ que l'on complète en une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$. On a alors :

$$M_{\mathcal{B}}(u) = B = \begin{pmatrix} 0_p & B_1 \\ 0_{n-p,p} & B_2 \end{pmatrix} \text{ et } A = PBP^{-1}$$

où $P \in GL_n(\mathbb{R})$ est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$.

On a alors :

$$\chi_B = \det\left(X I_n - B\right) = X^p \det\left(X I_{n-p} - B_2\right) = X^p \chi_{B_2} = \det\left(X I_n - A\right) = \chi_A\,.$$

Et comme $\dim\ker A = p$, 0 est de multiplicité $p$ dans $\chi_A$ donc dans $\chi_B = X^p\chi_{B_2}$, et n'est ainsi pas racine de $\chi_{B_2}$. Ceci veut dire que 0 n'est pas valeur propre de $B_2$, donc que $B_2$ est inversible.

Par ailleurs, on prouve comme dans la question 1.a que :

$$\dim E_A = \dim E_B .$$

Pour toute $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $N = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 \\ N_3 & N_4 \end{pmatrix}$ avec $N_1 \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on a :

$$BNB = \begin{pmatrix} 0_p & B_1\left(N_3B_1 + N_4B_2\right) \\ 0_{n-p,p} & B_2\left(N_3B_1 + N_4B_2\right) \end{pmatrix}.$$

Donc :

$$N \in E_B \quad \Leftrightarrow \quad BNB = 0_n \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} B_1\left(N_3B_1 + N_4B_2\right) = 0_{p,n-p} \\ B_2\left(N_3B_1 + N_4B_2\right) = 0_{n-p} \end{cases}.$$

Et comme $B_2 \in GL_{n-p}(\mathbb{R})$ :

$$N \in E_B \quad \Leftrightarrow \quad N_3B_1 + N_4B_2 = 0_{n-p} \quad \Leftrightarrow \quad N_4 = -N_3B_1B_2^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad N = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 \\ N_3 & -N_3B_1B_2^{-1} \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$E_D = \left\{ \begin{pmatrix} N_1 & N_2 \\ N_3 & -N_3B_1B_2^{-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), N_1 \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \right\}.$$

Enfin, l'application $\begin{pmatrix} N_1 & N_2 \\ N_3 & 0_{n-p} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} N_1 & N_2 \\ N_3 & -N_3B_1B_2^{-1} \end{pmatrix}$ est un isomorphisme de $F$ dans $E_D$, où $F$ désigne le sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $F = \left\{ \begin{pmatrix} N_1 & N_2 \\ N_3 & 0_{n-p} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), N_1 \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \right\}$, donc :

$$\dim E_A = \dim E_B = \dim F = n^2 - (n-p)^2 .$$

Avec $rg\,(A) = n - \dim\ker A = n - p$, on obtient encore :

$$\boxed{\dim E_A = n^2 - \left(rg\,(A)\right)^2}$$

**_Série 3_**

## *Planche n° 13*

1) Si $\alpha > 1$, la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge et comme elle est à termes positifs, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et avec une réindexation :

$$0 < u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^\alpha} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^\alpha} < \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}.$$

Or, $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ est le reste d'un série convergente, donc tend vers 0 quand $n \to +\infty$ et le théorème des gendarmes permet de conclure que quand $\alpha > 1$ :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0}$$

2) Posons $f(t) = \frac{1}{(1+t)^\alpha}$.

La fonction *f* est continue sur $[0,1]$, donc, d'après la propriété relative aux sommes de Riemann :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\,dt.$$

Remarquons que comme *f* est strictement positive sur $[0,1]$, on a $\int_0^1 f(t)\,dt > 0$ et donc on peut écrire, en posant $I = \int_0^1 f(t)\,dt$ :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} I.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^\alpha} = \frac{1}{n} n^\alpha \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^\alpha} = n^{\alpha-1} u_n.$$

Ainsi, $n^{\alpha-1} u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} I$, donc :

$$u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{I}{n^{\alpha-1}}.$$

Avec pour $\alpha = 1$, $\int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln 2$, ceci permet de conclure :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \begin{cases} +\infty & \text{quand } \alpha < 1 \\ \ln 2 & \text{quand } \alpha = 1 \\ 0 & \text{quand } \alpha > 1 \end{cases}}$$

3) On prend ici $\alpha > 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

La fonction $g : t \mapsto \dfrac{1}{(n+t)^\alpha}$ est continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall\, t \in [k, k+1],\ \ g(k+1) \le g(t) \le g(k).$$

Donc :

$$g(k+1) \le \int_k^{k+1} g(t)\,dt \le g(k).$$

Alors, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ :

$$\sum_{k=0}^{p} g(k+1) \le \sum_{k=0}^{p} \int_k^{k+1} g(t)\,dt \le \sum_{k=0}^{p} g(k) \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{p+1} g(k) \le \int_0^{p+1} g(t)\,dt \le g(0) + \sum_{k=1}^{p} g(k).$$

Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^{p+1} g(t)\,dt - g(0) = \int_0^{p} g(t)\,dt + \int_p^{p+1} g(t)\,dt - g(0) \le \sum_{k=1}^{p} g(k) \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{p+1} g(k) \le \int_0^{p+1} g(t)\,dt \end{cases}$$

Donc, pour tout entier $p \ge 2$, et avec $g(p+1) \le \displaystyle\int_p^{p+1} g(t)\,dt$, on peut écrire :

$$\int_0^{p} g(t)\,dt + g(p+1) - g(0) \le \sum_{k=1}^{p} g(k) \le \int_0^{p} g(t)\,dt \quad \textbf{(1)}$$

Soit :

$$\int_0^{p} g(t)\,dt = \int_0^{p} \frac{dt}{(n+t)^\alpha} = \left[\frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{(n+t)^{\alpha-1}}\right]_0^p = \frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{(n+p)^{\alpha-1}} - \frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{n^{\alpha-1}} = \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+p)^{\alpha-1}}\right).$$

On a donc $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} \int_0^{p} g(t)\,dt = \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$ car $\alpha - 1 > 0$ et :

$$\lim_{p\to+\infty} g(p+1) = \lim_{p\to+\infty} \frac{1}{(n+p+1)^\alpha} = 0$$

$$g(0) = \frac{1}{n^\alpha}$$

$$\lim_{p\to+\infty} \sum_{k=1}^{p} g(k) = \lim_{p\to+\infty} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(n+k)^\alpha} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+k)^\alpha} = v_n$$

En passant à la limite quand $p \to +\infty$ dans **(1)**, on obtient :

$$\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^\alpha} \le v_n \le \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

Donc pour $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\frac{1}{\alpha-1} - \frac{1}{n} \le n^{\alpha-1} v_n \le \frac{1}{\alpha-1}.$$

Le théorème des gendarmes permet de conclure que $\lim_{n \to +\infty} n^{\alpha-1} v_n = \frac{1}{\alpha - 1}$ et donc que :

$$v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

Or, la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{\alpha-1}}$ converge si et seulement si $\alpha - 1 > 1$, soit $\alpha > 2$ et finalement :

$$\boxed{\text{La série de terme général } v_n \text{ converge si et seulement si } \alpha > 2.}$$

## *Planche n° 14*

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $H_n$ (*resp.* $V_n$) la variable aléatoire qui vaut 1 quand, à l'étape *n*, le module se déplace de 1 vers la droite (*resp.* vers le haut), – 1 quand il se déplace de 1 vers la gauche (*resp.* vers le bas) et 0 sinon.

Les variables $H_n$ (*resp.* $V_n$) sont indépendantes (car chaque mouvement est indépendant des autres) et pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné, on a $H_n(\Omega) = V_n(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ et :

$$P(H_n = -1) = P(H_n = 1) = P(V_n = -1) = P(V_n = 1) = \frac{1}{4}$$

$$P(H_n = 0) = P(V_n = 0) = \frac{1}{2}$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$E(H_n) = E(V_n) = -1 \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{4} = 0.$$

On a alors $X_n = \sum_{k=1}^{n} H_k$ (et $Y_n = \sum_{k=1}^{n} V_k$), et par linéarité de l'espérance, $E(X_n) = \sum_{k=1}^{n} E(H_k)$, soit :

$$\boxed{E(X_n) = 0}$$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$V(H_n) = E(H_n^2) - \left(E(H_n)\right)^2 = E(H_n^2) = (-1)^2 \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{1}{2} + 1^2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $X_n = \sum_{k=1}^{n} H_k$ et les $H_k$ sont indépendantes, donc $X_n$ admet une variance et :

$$V(X_n) = \sum_{k=1}^{n} V(H_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} = \frac{n}{2}.$$

Or, $V(X_n) = E(X_n^2) - \left(E(X_n)\right)^2 = E(X_n^2)$, donc :

$$E(X_n^2) = \frac{n}{2}.$$

On prouve de même que $E(Y_n^2)=\dfrac{n}{2}$, d'où, par linéarité de l'espérance :

$$E(Z_n^2)=E(X_n^2+Y_n^2)=E(X_n^2)+E(Y_n^2)=\frac{n}{2}+\frac{n}{2}=n\,.$$

Ainsi, $E(Z_n^2)$ est finie, donc $Z_n$ admet une variance et $V(Z_n)=E(Z_n^2)-\left(E(Z_n)\right)^2\geq 0$, d'où :

$$\left(E(Z_n)\right)^2\leq E(Z_n^2)=n\,.$$

Et comme $Z_n$ est à valeurs positives :

$$\boxed{E(Z_n)\leq\sqrt{n}}$$

3) Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

Comme $Z_n$ représente la distance du module au point *O* à l'instant *n*, on a $\left(Z_n=0\right)=\left(A_n=(0,0)\right)$, autrement dit, le module revient en *O* au bout de *n* étapes.

Pour tout $k\in\mathbb{N}$, appelons $R_k$ l'évènement : « le module revient en *O* au bout de *n* étapes en s'étant déplacé *k* fois vers la droite ».

Pour réaliser $R_k$, il faut donc que le module se soit déplacé :

- *k* fois vers la droite ;
- *k* fois vers la gauche ;
- $\dfrac{n-2k}{2}$ fois vers le haut ;
- $\dfrac{n-2k}{2}$ fois vers le bas.

Pour que ceci soit possible, il faut que $\dfrac{n-2k}{2}$ soit entier, donc que n soit pair.

Ainsi, si *n* est impair, $P\left(Z_n=0\right)=0$.

On suppose maintenant que $n=2p$ est pair (avec $p\in\mathbb{N}^*$).

Pour réaliser $R_k$, le module doit se déplacer $2k$ fois latéralement, donc $2k\leq n$, soit $0\leq k\leq p$ et pour tout $k\in[\![0,p]\!]$, il y a :

- $\dbinom{2p}{k}$ possibilités de choisir les *k* déplacements vers la droite ;
- puis $\dbinom{2p-k}{k}$ possibilités de choisir les *k* déplacements vers la gauche ;
- puis $\dbinom{2p-2k}{p-k}$ possibilités de choisir les $p-k$ déplacements vers le haut ;

- et enfin, $\binom{2p-2k-(p-k)}{p-k}=\binom{p-k}{p-k}=1$ de choisir les $p-k$ déplacements vers le bas.

Tous les déplacements ont une probabilité de $\frac{1}{4}$ et sont indépendants, donc :

$$\begin{aligned}
P(R_k) &= \binom{2p}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k \times \binom{2p-k}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k \times \binom{2p-2k}{p-k} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{p-k} \times 1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{p-k} \\
&= \frac{(2p)!}{(2p-k)!k!}\frac{(2p-k)!}{(2p-2k)!k!}\frac{(2p-2k)!}{(p-k)!(p-k)!}\left(\frac{1}{4}\right)^{2p} \\
&= \frac{(2p)!}{k!k!(p-k)!(p-k)!}\left(\frac{1}{4}\right)^{2p} = \frac{(2p)!}{p!p!}\frac{p!}{k!(p-k)!}\frac{p!}{k!(p-k)!}\left(\frac{1}{4}\right)^{2p} \\
&= \binom{2p}{p}\binom{p}{k}^2\left(\frac{1}{4}\right)^{2p}
\end{aligned}$$

Or, les $R_k$ sont deux à deux incompatibles et $(Z_n=0)=\bigcup_{k\in[\![0,p]\!]} R_k$, donc :

$$P(Z_n=0)=\sum_{k=0}^{n} P(R_k)=\sum_{k=0}^{n}\binom{2p}{p}\binom{p}{k}^2\left(\frac{1}{4}\right)^{2p}=\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{p}{k}^2\right]\binom{2p}{p}\left(\frac{1}{4}\right)^{2p}.$$

Et avec le résultat admis, $\sum_{k=0}^{n}\binom{p}{k}^2=\binom{2p}{p}$, on obtient $P(Z_n=0)=\binom{2p}{p}^2\left(\frac{1}{4}\right)^{2p}$.

Finalement :

$$\boxed{P(Z_n=0)=\begin{cases}\binom{n}{n/2}^2\dfrac{1}{4^n} & \text{quand } n \text{ est pair}\\ 0 & \text{quand } n \text{ est impair}\end{cases}}$$

## *Planche n° 15*

Dans tout ce qui suit, pour $X\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on notera $C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ ses colonnes de sorte que l'on puisse écrire $X=\begin{pmatrix}C_1 & C_2 & \cdots & C_n\end{pmatrix}$. On a alors :

$$f_A(X)=AX=\begin{pmatrix}AC_1 & AC_2 & \cdots & AC_n\end{pmatrix}.$$

Remarquons que l'application $\Psi : X=\begin{pmatrix}C_1 & C_2 & \cdots & C_n\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\to(C_1, C_2, \dots, C_n)\in\left(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})\right)^n$ est un isomorphisme et que $f_A\in\mathcal{L}\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\right)$.

1) Soit $X=\begin{pmatrix}C_1 & C_2 & \cdots & C_n\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On a :

$$\begin{aligned}X\in\ker f_A &\Leftrightarrow f_A(X)=AX=\begin{pmatrix}AC_1 & AC_2 & \cdots & AC_n\end{pmatrix}=0_n\\ &\Leftrightarrow \forall\, k\in[\![1,n]\!],\ AC_k=0\\ &\Leftrightarrow \forall\, k\in[\![1,n]\!],\ C_k\in\ker A\\ &\Leftrightarrow (C_1,C_2,\dots,C_n)\in(\ker A)^n\end{aligned}$$

Alors, avec l'isomorphisme $\Psi$ introduit ci-dessus, ceci donne $\Psi(\ker f_A)=(\ker A)^n$ et donc :

$$\dim\ker f_A=\dim(\ker A)^n=n\times\dim\ker A.$$

Avec le théorème du rang, on obtient :

$$rg\,(f_A)=\dim\mathcal{M}_n(\mathbb{C})-\dim\ker f_A=n^2-n\times\dim\ker A=n(n-\dim\ker A).$$

Soit :

$$\boxed{rg\,(f_A)=n\times rg\,(A)}$$

2) Soit $\lambda\in Sp(f_A)$. Il existe $X=\begin{pmatrix}C_1 & C_2 & \cdots & C_n\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle (donc il existe $p\in[\![1,n]\!]$ tel que $C_p\neq 0$) telle que :

$$f_A(X)=\lambda X \quad\Leftrightarrow\quad AX=\begin{pmatrix}AC_1 & AC_2 & \cdots & AC_n\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}C_1 & C_2 & \cdots & C_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda C_1 & \lambda C_2 & \cdots & \lambda C_n\end{pmatrix}.$$

Donc, pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $AC_k=\lambda C_k$ et en particulier, $AC_p=\lambda C_p$ et, comme $C_p\neq 0$, ceci implique que $\lambda\in Sp(A)$ et ainsi : $\underline{Sp(f_A)\subset Sp(A)}$.

Réciproquement, si $\lambda\in Sp(A)$ et $C\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})\setminus\{0\}$ est un vecteur propre de $A$ associé à $\lambda$, alors, en posant $X=\begin{pmatrix}C & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $X\neq 0_n$ et :

$$f_A(X)=AX))=\begin{pmatrix}AC & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda C & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}C & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}=\lambda X\,.$$

Donc, $\lambda\in Sp(f_A)$ et ainsi, $\underline{Sp(A)\subset Sp(f_A)}$.

On a donc :

$$Sp(f_A)=Sp(A)\,.$$

De plus, pour tout $\lambda\in Sp(f_A)=Sp(A)$, on a pour $X=\begin{pmatrix}C_1 & C_2 & \cdots & C_n\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ :

$$\begin{aligned}X\in\ker\left(f_A-\lambda id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}\right) &\Leftrightarrow f_A(X)=\lambda X\\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix}AC_1 & AC_2 & \cdots & AC_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda C_1 & \lambda C_2 & \cdots & \lambda C_n\end{pmatrix}\\ &\Leftrightarrow \forall\, k\in[\![1,n]\!],\ AC_k=\lambda C_k\\ &\Leftrightarrow \forall\, k\in[\![1,n]\!],\ C_k\in\ker(A-\lambda I_n)\\ &\Leftrightarrow (C_1,C_2,\dots,C_n)\in\left(\ker(A-\lambda I_n)\right)^n\end{aligned}$$

Comme plus haut, ceci donne $\Psi\left(\ker\left(f_A-\lambda id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}\right)\right)=\left(\ker\left(A-\lambda I_n\right)\right)^n$ et donc :

$$\dim\ker\left(f_A-\lambda id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}\right)=\dim\left(\ker\left(A-\lambda I_n\right)\right)^n=n\times\dim\ker\left(\ker\left(A-\lambda I_n\right)\right).$$

On a donc :

$$\sum_{\lambda\in Sp(f_A)}\dim\ker\left(f_A-\lambda id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}\right)=\sum_{\lambda\in Sp(A)}n\times\dim\ker\left(\ker\left(A-\lambda I_n\right)\right)=n\times\sum_{\lambda\in Sp(A)}\dim\ker\left(\ker\left(A-\lambda I_n\right)\right).$$

Alors :

$$\begin{aligned} f_A \text{ est diagonalisable } &\Leftrightarrow \sum_{\lambda\in Sp(f_A)}\dim\ker\left(f_A-\lambda id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}\right)=\dim\mathcal{M}_n(\mathbb{C})=n^2\\ &\Leftrightarrow n\times\sum_{\lambda\in Sp(A)}\dim\ker\left(\ker\left(A-\lambda I_n\right)\right)=n^2\\ &\Leftrightarrow \sum_{\lambda\in Sp(A)}\dim\ker\left(\ker\left(A-\lambda I_n\right)\right)=n=\dim\mathbb{C}^n\\ &\Leftrightarrow A \text{ est diagonalisable}\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{f_A \text{ est diagonalisable si et seulement si } A \text{ l'est.}}$$

3) Notons $A=(a_{i,j})_{1\le i,j\le n}$, $A_j$ la $j^{\text{ième}}$ colonne de $A$ pour tout $j\in[\![1,n]\!]$ et introduisons $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, ordonnée de la manière suivante :

$$\mathcal{B}_c=\left(E_{1,1},E_{2,1},\dots,E_{n,1},E_{1,2},E_{2,2},\dots,E_{n,2},\dots,E_{1,n},E_{2,n},\dots,E_{n,n}\right).$$

On a alors pour tous $i,j\in[\![1,n]\!]$ :

$$f_A(E_{i,j})=AE_{i,j}=\begin{pmatrix}0&\cdots&0&A_i&0&\cdots&0\end{pmatrix}=\sum_{k=1}^n a_{k,i}E_{k,j}$$

où $A_i$ apparait dans la $j^{\text{ième}}$ colonne.

Ceci permet d'écrire :

$$M_{\mathcal{B}_c}\left(f_A\right)=\begin{pmatrix}A&0_n&\cdots&0_n\\0_n&A&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0_n\\0_n&\cdots&0_n&A\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{n^2}(\mathbb{C})$$

où la matrice $A$ apparait $n$ fois.

On a alors immédiatement :

$$\boxed{Tr\left(f_A\right)=Tr\left(M_{\mathcal{B}_c}\left(f_A\right)\right)=n\times Tr(A)}$$

4) Avec ce qui précède, et en notant $\chi_A = \det(X I_n - A)$, on a :

$$\chi_{f_A} = \det\left(X I_{n^2} - M_{\mathcal{B}_c}(f_A)\right) = \begin{vmatrix} X I_n - A & 0_n & \cdots & 0_n \\ 0_n & X I_n - A & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0_n \\ 0_n & \cdots & 0_n & X I_n - A \end{vmatrix}.$$

Et en calculant par blocs, on obtient $\chi_{f_A} = \left[\det(X I_n - A)\right]^n$, soit :

$$\boxed{\chi_{f_A} = (\chi_A)^n}$$

## *Planche n° 16*

1) Soit $h : (x,a) \mapsto \dfrac{\ln(1 + a\cos x)}{\cos x}$, définie sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[ \times \left]-1,1\right[$.

- Pour tout $a \in \left]-1,1\right[$, la fonction $x \mapsto h(x,a)$ est continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ en tant que quotient de telles fonctions et, comme $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln(1 + a\cos x)}{\cos x} = \lim\limits_{u \to 0} \dfrac{\ln(1+au)}{u} = a$, elle est prolongeable par continuité en $\dfrac{\pi}{2}$, donc intégrable sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
- Pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, la fonction $a \mapsto h(x,a)$ est de classe $C^1$ sur $\left]-1,1\right[$ en tant que composée de fonctions $C^1$ et $\dfrac{\partial h}{\partial a}(x,a) = \dfrac{1}{1 + a\cos x}$.
- Pour tout $a \in \left]-1,1\right[$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial a}(x,a)$ est continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ en tant qu'inverse d'un fonction continue.
- Pour tout $b \in \left]-1,1\right[$ et tout $(x,a) \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[ \times [-b, b]$, $\left|\dfrac{\partial h}{\partial a}(x,a)\right| = \dfrac{1}{1 + a\cos x} \leq \dfrac{1}{1-b}$ et la fonction constante $x \mapsto \dfrac{1}{1-b}$ est intégrable sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Ainsi, $a \mapsto I(a) = \int_0^{\pi/2} h(x,a)\,dx$ est de classe $C^1$ sur $[-b,b]$, avec :

$$I' : a \mapsto \int_0^{\pi/2} \frac{\partial h}{\partial a}(x,a)\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + a\cos x}.$$

Comme ceci est vrai pour tout $b \in \left]-1,1\right[$ et tout $\bigcup_{b \in ]-1,1[} [-b,b] = \left]-1,1\right[$, on peut conclure que $I$ est de classe $C^1$ sur $\left]-1,1\right[$, de dérivée $I' : a \mapsto \int_0^{\pi/2} \dfrac{dx}{1 + a\cos x}$.

La fonction $t \mapsto \dfrac{1-t^2}{1+t^2} = \dfrac{2}{1+t^2} - 1$ réalise une bijection de classe $C^1$ de $]0,1[$ dans $]0,1[$ et la fonction arccos est une bijection de classe $C^1$ de $]0,1[$ dans $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, donc $t \mapsto \arccos\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)$ est une bijection de classe $C^1$ de $]0,1[$ dans $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et on peut poser le changement de variable $x = \arccos\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)$, qui donne :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+a\cos x} = \int_0^1 \frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{1+a\frac{1-t^2}{1+t^2}} = 2\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2+a-at^2}$$

$$= \frac{2}{1+a}\int_0^1 \frac{dt}{1+\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\,t\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\right)$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La fonction } I \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } ]-1,1[\text{, de dérivée } I' : a \mapsto \frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\right).}$$

2) Soit $f(t) = \arctan\left(\sqrt{\dfrac{1-t}{1+t}}\right)$ pour $t \in ]-1,1[$.

La fonction *f* est définie et dérivable sur $]-1,1[$ (comme composée de fonctions dérivables) et pour tout $t \in ]-1,1[$ :

$$f'(t) = \frac{-\frac{2}{(1+t)^2}}{2\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\left(1+\frac{1-t}{1+t}\right)} = -\frac{1}{2\sqrt{1-t^2}}.$$

Ainsi, pour tout $a \in ]-1,1[$, $I'(a) = -4f'(a)f(a)$ donc, avec $I(0) = \int_0^{\pi/2} 0\,dx = 0$, on obtient :

$$I(a) = I(a) - I(0) = 2f(0)^2 - 2f(a)^2 = 2\left[\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - \left(\arctan\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\right)\right)^2\right].$$

Or, $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$, donc $f'$ l'est aussi et il en va de même pour *f* et donc $f^2$.

Ceci prouve que :

$$\boxed{\text{La fonction } I \text{ est développable en série entière sur } ]-1,1[.}$$

3) Pour tout $u \in ]-1,1[$, $\ln(1+u) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} u^n$ et pour tout $(x,a) \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[ \times ]-1,1[$, $a\cos x \in ]-1,1[$, donc :

$$\frac{\ln(1+a\cos x)}{\cos x} = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (\cos^{n-1} x)\, a^n .$$

Et pour tout $a \in ]-1,1[$ :

$$I(a) = \int_0^{\pi/2} \left( \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (\cos^{n-1} x)\, a^n \right) dx .$$

Soit $a \in ]-1,1[$ fixé. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $g_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n} (\cos^{n-1} x)\, a^n$ pour $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $g_n$ est continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ (car la fonction cosinus l'est).
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $|g_n(x)| = |\cos^{n-1} x| \frac{|a|^n}{n} \leq \frac{|a|^n}{n}$ et $\sum \frac{|a|^n}{n}$ converge (car $|a|<1$).

  Ainsi, $\sum g_n$ converge normalement, donc uniformément sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Alors :

$$I(a) = \sum_{n\geq 1} \int_0^{\pi/2} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (\cos^{n-1} x)\, a^n dx = \sum_{n\geq 1} \left( \frac{(-1)^{n-1}}{n} \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} x\, dx \right) a^n .$$

Ceci donne le développement en série entière de $I$ sur $]-1,1[$.

Comme on peut dériver terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence, on obtient pour tout $a \in ]-1,1[$ :

$$I'(a) = \sum_{n\geq 1} \left( (-1)^{n-1} \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} x\, dx \right) a^{n-1} .$$

La suite $\left( \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} x\, dx \right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive et décroissante (car $0 \leq \cos x \leq 1$ sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$).

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x \mapsto \cos^{n-1} x$ est continue par morceaux sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.
- La suite de fonctions $(x \mapsto \cos^{n-1} x)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ vers la fonction

  $x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ quand } x=0 \\ 0 \text{ quand } x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$, qui est continue par morceaux sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $\left|\cos^{n-1} x\right| \leq 1$ et $x \mapsto 1$ est continue par morceaux et intégrable sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Alors, d'après le théorème de convergence dominée, $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} x\, dx \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^{\pi/2} 0\, dx = 0$.

Ainsi, la série $\displaystyle\sum (-1)^{n-1} \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} x\, dx$ vérifie le critère spécial des séries alternées donc converge et donc la série entière $\displaystyle\sum \left( (-1)^{n-1} \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} x\, dx \right) a^{n-1}$ converge pour $a = 1$.

Or, nous avions $I'(a) = \dfrac{2}{\sqrt{1-a^2}} \arctan\left(\sqrt{\dfrac{1-a}{1+a}}\right)$ pour tout $a \in \left]-1, 1\right[$ et :

$$\lim_{a \to 1} I'(a) = \lim_{a \to 1} \frac{2}{1+a} \frac{\arctan\left(\sqrt{\dfrac{1-a}{1+a}}\right)}{\sqrt{\dfrac{1-a}{1+a}}} = \lim_{u \to 0} \frac{\arctan u}{u} = 1.$$

Et finalement :

$$\boxed{\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} x\, dx = 1}$$

## *Planche n° 17*

1) D'après le cours :

$$\boxed{\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \times \dim F}$$

2) On a $\dim \mathcal{L}(E, \mathbb{C}) = \dim E \times 1 = n$, donc pour que la famille $(f_1, \ldots, f_p)$ ait une chance d'être libre, il faut que $p \leq n$.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de *E*. Pour tout $x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n \in E$ et tout $k \in [\![1, p]\!]$, on a :

$$f_k(x) = x_1 f_k(e_1) + \ldots + x_n f_k(e_n).$$

Donc, si *X* est le vecteur colonne des $x_i$, on a avec $\varphi : E \to \mathbb{C}^n$ ; $x \mapsto \big(f_1(x), \ldots, f_p(x)\big)$ :

$$\varphi(x) = \big(f_1(x), \ldots, f_p(x)\big) = \left( \sum_{i=1}^n x_i f_1(e_i), \ldots, \sum_{i=1}^n x_i f_p(e_i) \right) = {}^t XM \quad \text{avec } M = \begin{pmatrix} f_1(e_1) & \cdots & f_p(e_1) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1(e_n) & \cdots & f_p(e_n) \end{pmatrix}.$$

Et :

$$rg\,(\varphi) = rg\,(M).$$

Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, soit $\phi_i \in \mathcal{L}(E,\mathbb{C})$ telle que pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $\phi_i(e_j) = \delta_{i,j}$ (le symbole de Kronecker). La famille $C = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ est une base de $\mathcal{L}(E,\mathbb{C})$.

Pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, notons $f_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,j}\phi_i$ (les $\alpha_{i,j}$ sont les coordonnées de $f_j$ dans $C$).

On a alors, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $f_j(e_i) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k,j}\phi_k(e_i) = \alpha_{i,j}$, donc la matrice de la famille $(f_1, \dots, f_p)$ dans la base $C$ de $\mathcal{L}(E,\mathbb{C})$ est :

$$M_C(f_1,\dots,f_p) = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(e_1) & \cdots & f_p(e_1) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1(e_n) & \cdots & f_p(e_n) \end{pmatrix} = M .$$

Et ainsi :

$$rg\,(f_1,\dots,f_p) = rg\,(M) = rg\,(\varphi) .$$

Alors :

$(f_1,\dots,f_p)$ est libre $\Leftrightarrow$ $rg\,(f_1,\dots,f_p) = p$ $\Leftrightarrow$ $rg\,(\varphi) = p = \dim \mathbb{C}^p$ $\Leftrightarrow$ $\varphi$ est surjective.

Supposons que $(f_1,\dots,f_p)$ est libre.

Alors, $rg\,(f_1,\dots,f_p) = rg\,(M) = p$ et il existe $p$ lignes (d'indices $i_1,\dots,i_p$) de linéairement indépendantes, donc la matrice $\begin{pmatrix} f_1(e_{i_1}) & \cdots & f_p(e_{i_1}) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1(e_{i_p}) & \cdots & f_p(e_{i_p}) \end{pmatrix}$ est inversible, soit :

$$\det \begin{pmatrix} f_1(e_{i_1}) & \cdots & f_p(e_{i_1}) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1(e_{i_p}) & \cdots & f_p(e_{i_p}) \end{pmatrix} \neq 0 .$$

En posant $(x_1,\dots,x_p) = (e_{i_1},\dots,e_{i_p})$, on a :

$$\det\left[\left(f_j(x_i)\right)_{1\le i,j\le p}\right] \neq 0 .$$

Réciproquement, s'il existe $(x_1,\dots,x_p) \in E^p$ d'éléments de $E$ telle que $\det A \neq 0$ où :

$$A = \begin{pmatrix} f_1(x_1) & \cdots & f_p(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1(x_p) & \cdots & f_p(x_p) \end{pmatrix}.$$

La famille $(x_1,\dots,x_p)$ est libre, car sinon l'un des $x_i$ serait combinaison linéaire des autres, et la ligne $i$ de $A$ serait combinaison linéaire des autres lignes et $\det A = 0$, qui est faux.

On peut alors compléter $(x_1, \dots, x_p)$ en une base $\mathcal{B}' = (x_1, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_n)$ de $E$.

En reprenant le raisonnement fait ci-dessus avec cette base au lieu de $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, on a :

$$rg\,(f_1, \dots, f_p) = rg\,(N) \quad \text{avec } N = \begin{pmatrix} f_1(x_1) & \cdots & f_p(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1(x_n) & \cdots & f_p(x_n) \end{pmatrix}.$$

Or, les p premières lignes de $N$ forment la matrice $A$ qui est de rang $p$, donc $rg\,(N) \geq p$ et comme $N \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, on a aussi $rg\,(N) \leq p$, donc $rg\,(f_1, \dots, f_p) = rg\,(N) = p$ et ainsi :

La famille $(f_1, \dots, f_p)$ est libre.

Finalement :

Les propositions :

(i) la famille $(f_1, \dots, f_p)$ est libre ;

(ii) L'application $\varphi : E \to \mathbb{C}^p$ ; $x \mapsto \big(f_1(x), \dots, f_p(x)\big)$ est surjective ;

(iii) Il existe une famille $(x_1, \dots, x_p)$ d'éléments de $E$ telle que $\det\left[\big(f_j(x_i)\big)_{1 \leq i, j \leq p}\right] \neq 0$ ;

sont équivalentes.

3) $(\Rightarrow)$ On suppose $\bigcap_{i=1}^{p} \ker f_i \subset \ker f$.

Comme $(f_1, \dots, f_p)$ est libre, $f \in \text{Vect}\big(f_1, \dots, f_p\big)$ si et seulement si $(f_1, \dots, f_p, f)$ est liée.

Supposons que $(f_1, \dots, f_p, f)$ est libre.

Alors, d'après la question précédente, l'application $\varphi : E \to \mathbb{C}^{p+1}$ ; $x \mapsto \big(f_1(x), \dots, f_p(x), f(x)\big)$ est surjective. Cette application est linéaire (car $f_1, \dots, f_p, f$ le sont), donc le théorème du rang donne :

$$\dim E = n = rg\,(\varphi) + \dim\ker\varphi = p + 1 + \dim\ker\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \dim\ker\varphi = n - p - 1.$$

Or, $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{C})$, donc $\dim\ker f = n - 1$ et :

$$x \in \ker\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(x) = \big(0, \dots, 0, 0\big) \quad \Leftrightarrow \quad f_1(x) = \dots = f_p(x) = f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left(\bigcap_{i=1}^{p} \ker f_i\right) \cap \ker f.$$

Donc :

$$\ker\varphi = \left(\bigcap_{i=1}^{p} \ker f_i\right) \cap \ker f.$$

Or, $\bigcap_{i=1}^{p} \ker f_i \subset \ker f$, donc $\left(\bigcap_{i=1}^{p} \ker f_i\right) \cap \ker f = \ker f$ et ainsi, $\ker\varphi = \ker f$ et :

$\dim\ker\varphi = \dim\ker f = n - 1$.

Ainsi, $\dim\ker\varphi = n-p-1 = n-1$, donc $p=0$, ce qui est absurde.

Nous venons donc de prouver que $(f_1,\dots,f_p,f)$ est liée et donc que :

$$\underline{f \in \mathrm{Vect}\left(f_1,\dots,f_p\right).}$$

($\Leftarrow$) On suppose que $f \in \mathrm{Vect}\left(f_1,\dots,f_p\right)$.

Il existe alors $(\lambda_1,\dots,\lambda_p)\in\mathbb{C}^p$ tel que :

$$f = \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_p f_p .$$

Soit $x \in \bigcap_{i=1}^{p} \ker f_i$. On a alors pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $x \in \ker f_i$, soit $f_i(x)=0$ et donc :

$$f(x) = \lambda_1 f_1(x) + \dots + \lambda_p f_p(x) = 0 .$$

Ainsi, si $x \in \bigcap_{i=1}^{p} \ker f_i$, $x \in \ker f$, donc :

$$\underline{\bigcap_{i=1}^{p} \ker f_i \subset \ker f .}$$

Finalement, on a bien :

$$\boxed{\bigcap_{i=1}^{p} \ker f_i \subset \ker f \quad \Leftrightarrow \quad f \in \mathrm{Vect}\left(f_1,\dots,f_p\right)}$$

## *Planche n° 18*

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}_+^2\setminus\{(0,0)\}$. On a alors $(x+1)(y+1)(x+y)\neq 0$, donc *f* est bien définie.

Par ailleurs, *f* est rationnelle, donc de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}_+^2\setminus\{(0,0)\}$.

De plus, $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 = x+y-2\sqrt{xy}\geq 0$, donc $\sqrt{xy}\leq \dfrac{x+y}{2}$ et quand $(x,y)\in\mathbb{R}_+^2\setminus\{(0,0)\}$, on a $x+y>0$ et donc $\dfrac{1}{x+y}\leq\dfrac{1}{2\sqrt{xy}}$ et :

$$\left|f(x,y)\right| = \frac{xy}{(x+1)(y+1)(x+y)} \leq \frac{xy}{2\sqrt{xy}} = \frac{\sqrt{xy}}{2} \leq \frac{x+y}{4} .$$

Quand $(x,y)\to(0,0)$, on a $x+y\to 0$ et donc, par théorème de comparaison :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0) .$$

Ainsi, *f* est continue en 0 et sur $\mathbb{R}_+^2\setminus\{(0,0)\}$ (car $C^1$), donc :

$$\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+^2 .}$$

Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}_+^2$, $f(x,y)\geq 0=f(0,0)=f(x,0)=f(0,y)$, donc 0 est le minimum de *f* sur $\mathbb{R}_+^2$.

Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}_+^2\setminus\{(0,0)\}$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{y(x+1)(y+1)(x+y)-xy(y+1)(x+y+x+1)}{(x+1)^2(y+1)^2(x+y)^2}=\frac{y(y-x^2)}{(x+1)^2(y+1)(x+y)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{x(x-y^2)}{(x+1)(y+1)^2(x+y)^2}$$

On a alors :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y-x^2=0\\ x-y^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\quad x=y=1.$$

Ainsi, *f* admet un point critique sur $\mathbb{R}_+^2\setminus\{(0,0)\}$, qui est $(1,1)$ et $f(1,1)=\dfrac{1}{8}$.

Pour tout $(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $x+y>10$, on a :

$$|f(x,y)|=\frac{xy}{(x+1)(y+1)(x+y)}\leq\frac{xy}{xy(x+y)}=\frac{1}{x+y}<\frac{1}{10}<f(1,1).$$

Or, $T=\{(x,y)\in\mathbb{R}_+^2,\ x+y\leq 10\}$ est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}_+^2$. Comme *f* est continue sur $\mathbb{R}_+^2$, elle admet un maximum sur *T* et ce maximum est supérieur ou égal à $f(1,1)=\dfrac{1}{8}$ car $(1,1)\in T$.

Ainsi, *f* admet un maximum sur $\mathbb{R}_+^2$ et comme *f* est nulle sur $\{(x,0),\ x\in\mathbb{R}_+\}\cup\{(0,y),\ y\in\mathbb{R}_+\}$, ce maximum est atteint dans l'ouvert $(\mathbb{R}_+^*)^2$ donc en un point critique, c'est-à-dire en 1.

Finalement :

$$\boxed{\text{Sur } \mathbb{R}_+^2\text{, la fonction } f \text{ admet 0 pour minimum global et } \tfrac{1}{8} \text{ pour maximum global.}}$$

## *Série 4*

### *Planche n° 19*

1) Soit $t\in\,]0,1[$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$u_n(t)=t^{n-1}\sin(n\theta)=\frac{1}{t}\mathrm{Im}\left(t^n e^{in\theta}\right)=\frac{1}{t}\mathrm{Im}\left((te^{i\theta})^n\right).$$

Or, $\left|te^{i\theta}\right|=t\in\,]0,1[$, donc la série géométrique $\sum(te^{i\theta})^n$ converge et ainsi, $\sum u_n(t)$ converge, donc :

$$\boxed{\text{La série de fonctions } \textstyle\sum u_n \text{ converge simplement sur } ]0,1[.}$$

Toujours avec $t\in\,]0,1[$, on a de plus :

$$\frac{1}{t}\sum_{n=1}^{+\infty}(te^{i\theta})^n=\frac{1}{t}\frac{te^{i\theta}}{1-te^{i\theta}}=\frac{e^{i\theta}(1-te^{-i\theta})}{(1-te^{i\theta})(1-te^{-i\theta})}=\frac{e^{i\theta}-t}{t^2-2(\cos\theta)t+1}=\frac{\cos\theta-t+i\sin\theta}{t^2-2(\cos\theta)t+1}.$$

Et comme on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(t)=\mathrm{Im}\left(\frac{1}{t}\sum_{n=1}^{+\infty}(te^{i\theta})^n\right)$, on obtient, pour tout $t\in\,]0,1[$ :

$$\boxed{S(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(t)=\frac{\sin\theta}{t^2-2(\cos\theta)t+1}}$$

2) La fonction $S$, est définie et rationnelle, donc continue, sur $]0,1[$. De plus :

$$\lim_{t\to 0^+}S(t)=\sin\theta \text{ et } \lim_{t\to 1^-}S(t)=\frac{\sin\theta}{2(1-\cos\theta)}\in\mathbb{R} \text{ (car } \theta\in\,]0,\pi[\text{, donc } \cos\theta\neq 1).$$

Ainsi, $S$ est prolongeable par continuité en 0 et 1, donc :

$$\boxed{S \text{ est intégrable entre 0 et 1.}}$$

On a (avec $\sin\theta$, car $\theta\in\,]0,\pi[$) :

$$\int_0^1 S(t)\,dt=\int_0^1\frac{\sin\theta}{t^2-2(\cos\theta)t+1}=\int_0^1\frac{\sin\theta}{(t-\cos\theta)^2+1-\cos^2\theta}dt$$
$$=\int_0^1\frac{\sin\theta}{(t-\cos\theta)^2+\sin^2\theta}dt=\int_0^1\frac{1}{\left(\dfrac{t-\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2+1}\frac{1}{\sin\theta}dt$$

Or, la fonction affine $t \mapsto \dfrac{t-\cos\theta}{\sin\theta}$ est de classe $C^1$ et bijective de $[0,1]$ dans $\left[-\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}, \dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right]$, donc on peut effectuer le changement de variable $u = \dfrac{t-\cos\theta}{\sin\theta}$, qui donne :

$$\begin{aligned}\int_0^1 S(t)\,dt &= \int_{-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}^{\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}} \frac{1}{u^2+1}\,du = \left[\arctan u\right]_{-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}^{\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}} \\ &= \arctan\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right) - \arctan\left(-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) = \arctan\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right) + \arctan\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)\end{aligned}$$

Or :

- $\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)} = \tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$ et $\theta \in \left]0,\pi\right[$, donc $\dfrac{\pi}{2}-\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, d'où :

$$\arctan\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) = \frac{\pi}{2}-\theta$$

- $\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ et $\theta \in \left]0,\pi\right[$, donc $\dfrac{\theta}{2} \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, d'où :

$$\arctan\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right) = \frac{\theta}{2}$$

Ainsi, $\displaystyle\int_0^1 S(t)\,dt = \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2} - \theta$, soit :

$$\boxed{\int_0^1 S(t)\,dt = \frac{\pi-\theta}{2}}$$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n$ est continue sur $[0,1]$ et :

$$\int_0^1 u_n(t)\,dt = \int_0^1 t^{n-1}\sin(n\theta)\,dt = \sin(n\theta)\int_0^1 t^{n-1}\,dt = \frac{\sin(n\theta)}{n} = V_n\,.$$

La série $\sum u_n$ converge simplement sur $]0,1[$ et aussi en 0, mais pas en 1. De plus, la série de terme général $\displaystyle\int_0^1 |u_n(t)|\,dt = \frac{|\sin(n\theta)|}{n}$ ne converge pas (on l'admet ici, ce serait l'objet d'un autre exercice).
On ne peut donc utiliser les théorèmes d'interversion série-intégrale et il faut se débrouiller avec les moyens du bord.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $t\in\left]0,1\right[$, on a :

$$\begin{aligned}\left|S(t)-\sum_{k=1}^{n}u_k(t)\right| &= \left|\sum_{k=1}^{+\infty}u_k(t)-\sum_{k=1}^{n}u_k(t)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}u_k(t)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}t^{k-1}\sin(k\theta)\right| \\ &= \left|\frac{1}{t}\operatorname{Im}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty}(te^{i\theta})^k\right)\right| = \left|\frac{1}{t}\operatorname{Im}\left(\frac{(te^{i\theta})^{n+1}}{1-te^{i\theta}}\right)\right| = \left|t^n\operatorname{Im}\left(\frac{e^{i(n+1)\theta}(1-te^{-i\theta})}{(1-te^{i\theta})(1-te^{-i\theta})}\right)\right| \\ &= \left|t^n\operatorname{Im}\left(\frac{e^{i(n+1)\theta}-te^{in\theta}}{t^2-2(\cos\theta)t+1}\right)\right| = t^n\frac{\left|\sin\left((n+1)\theta\right)-t\sin\left(n\theta\right)\right|}{t^2-2(\cos\theta)t+1}\end{aligned}$$

Or, pour tout $t\in\left]0,1\right[$ :

- $t^2-2(\cos\theta)t+1=(t-\cos\theta)^2+\sin^2\theta\geq\sin^2\theta>0$, donc $\dfrac{1}{t^2-2(\cos\theta)t+1}\leq\dfrac{1}{\sin^2\theta}$ ;
- $\left|\sin\left((n+1)\theta\right)-t\sin\left(n\theta\right)\right|\leq\left|\sin\left((n+1)\theta\right)\right|+t\left|\sin\left(n\theta\right)\right|\leq 1+t\leq 2$.

Donc, pour tout $t\in\left]0,1\right[$ :

$$\left|S(t)-\sum_{k=1}^{n}u_k(t)\right|\leq t^n\frac{2}{\sin^2\theta}.$$

Et :

$$\left|\int_0^1\left(S(t)-\sum_{k=1}^{n}u_k(t)\right)dt\right|\leq\int_0^1\left|S(t)-\sum_{k=1}^{n}u_k(t)\right|dt\leq\int_0^1 t^n\frac{2}{\sin^2\theta}dt=\frac{2}{\sin^2\theta}\frac{1}{n+1}.$$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\sin^2\theta}\frac{1}{n+1}=0$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\left(S(t)-\sum_{k=1}^{n}u_k(t)\right)dt=0$ par le théorème des gendarmes.

Or :

$$\int_0^1\left(S(t)-\sum_{k=1}^{n}u_k(t)\right)dt=\int_0^1 S(t)\,dt-\sum_{k=1}^{n}\int_0^1 u_k(t)\,dt=\int_0^1 S(t)\,dt-\sum_{k=1}^{n}V_k.$$

Ainsi, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^1 S(t)\,dt-\sum_{k=1}^{n}V_k\right)=0$, soit :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}V_k=\int_0^1 S(t)\,dt=\frac{\pi-\theta}{2}.$$

Finalement :

$$\boxed{\text{La série de terme général } V_n=\frac{\sin(n\theta)}{n} \text{ et } \sum_{n\geq1}V_k=\frac{\pi-\theta}{2}.}$$

## *Planche n° 20*

1) Voir le cours.

2) Comme $A \in S_n(\mathbb{R})$, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = diag\left(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = PD\,{}^tP$ et comme $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, on a $\lambda_k > 0$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

En posant $\Delta = diag\left(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, ..., \sqrt{\lambda_n}\right)$ et $B = P\Delta\,{}^tP$, on a :

- ${}^tB = {}^t({}^tP)\,{}^t\Delta\,{}^tP = P\Delta\,{}^tP = B$ donc $B \in S_n(\mathbb{R})$ ;
- les valeurs propres de $B$ sont les $\sqrt{\lambda_k} > 0$, donc $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ ;
- $\Delta^2 = D$ et $B^2 = (P\Delta\,{}^tP)^2 = P\Delta^2\,{}^tP = PD\,{}^tP = A$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{Il existe } B \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ telle que } A = B^2.}$$

3) On a ${}^tMM \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et ${}^t({}^tMM) = {}^tM\,{}^t({}^tM) = {}^tMM$, donc ${}^tMM \in S_n(\mathbb{R})$.

Soit $\lambda \in Sp({}^tMM)$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre (non nul) de ${}^tMM$ associé à $\lambda$.

On a ${}^tMMX = \lambda X$, donc :

$${}^tX\,{}^tMMX = \lambda\,{}^tXX \quad \Leftrightarrow \quad \|MX\|^2 = \lambda\|X\|^2 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{\|MX\|^2}{\|X\|^2} \quad (\text{car } \|X\| \neq 0).$$

Donc $\lambda \geq 0$ et comme les valeurs propres de $M$ sont strictement positives, 0 n'est pas valeur propre de M, donc $MX \neq 0$ et ainsi, $\lambda \neq 0$, soit $\lambda > 0$.

Finalement, on a bien :

$$\boxed{{}^tMM \in S_n^{++}(\mathbb{R})}$$

Comme ${}^tMM \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = diag\left(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^tMM = PD\,{}^tP$ et comme $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, on a $\lambda_k > 0$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

En posant à nouveau $\Delta = diag\left(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, ..., \sqrt{\lambda_n}\right)$, on a :

$$\Delta^{-1}D\Delta^{-1} = diag\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}, ..., \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right) diag\left(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\right) diag\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}, ..., \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right) = I_n.$$

Donc :

$$\Delta^{-1}\,{}^tP\,{}^tMMP\Delta^{-1} = \Delta^{-1}D\Delta^{-1} = I_n.$$

Or, $\Delta^{-1}$ est diagonale, donc $\Delta^{-1} = {}^t(\Delta^{-1})$ et :

$$\Delta^{-1}\,{}^tP\,{}^tMMP\Delta^{-1}\,' = \left({}^t(\Delta^{-1})\,{}^tP\,{}^tM\right)\left(MP\Delta^{-1}\right) = {}^t\left(MP\Delta^{-1}\right)\left(MP\Delta^{-1}\right) = I_n.$$

Ainsi, $C = MP\Delta^{-1} \in O(\mathbb{R})$ et :

$$O = MP\Delta^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad M = C\Delta\,{}^tP = C\,{}^tPP\Delta\,{}^tP = OS$$

avec $O = C\,{}^tP$ et $S = P\Delta\,{}^tP$.

Comme $C \in O(\mathbb{R})$ et ${}^tP \in O_n(\mathbb{R})$, on a $O \in O_n(\mathbb{R})$, car $O_n(\mathbb{R})$ est stable par produit, et $S = P\Delta\,{}^tP$ est la matrice $B$ de la question 1, donc appartient à $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{Il existe une matrice } O \in O(\mathbb{R}) \text{ et } S \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ tel que } M = OS.}$$

## *Planche n° 21*

1) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$. $t \mapsto \dfrac{t^{\alpha-1}}{1+t^\beta}$ est continue sur $]0,1]$.

On a $\dfrac{t^{\alpha-1}}{1+t^\beta} \underset{t \to 0^+}{\sim} t^{\alpha-1}$ et l'intégrale de Riemann $\int_0 t^{\alpha-1} dt$ converge car $\alpha > 0$, donc $\alpha - 1 > -1$.

Ainsi, pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ :

$$\boxed{J(\alpha,\beta) = \int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}}{1+t^\beta} dt \text{ converge.}}$$

2) On a :

$$J\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \int_0^1 \frac{t^{\frac{1}{2}-1}}{1+t^{\frac{1}{2}}} dt = \int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{t}} dt.$$

La fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est une bijection de classe $C^1$ de $]0,1]$ dans $]0,1]$, donc on peu effectuer le changement de variable $u = \sqrt{t}$ qui donne :

$$J\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^1 \frac{1}{1+u} du = 2\left[\ln(1+u)\right]_0^1.$$

Soit :

$$\boxed{J\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = 2\ln 2}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$J(n,1) = \int_0^1 \frac{t^{n-1}}{1+t} dt.$$

Pour tout $t\in[0,1]$, on a pour $n\geq 2$ :

$$\sum_{k=0}^{n-2}(-t)^k=\frac{1-(-t)^{n-1}}{1+t}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{t^{n-1}}{1+t}=\frac{(-1)^{n-1}}{1+t}+(-1)^n\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k t^k\ .$$

Donc :

$$J(n,1)=\int_0^1\frac{t^{n-1}}{1+t}dt=(-1)^{n-1}\int_0^1\frac{dt}{1+t}+(-1)^n\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k\int_0^1 t^k dt\ /$$

Soit pour tout $n\geq 2$ :

$$\boxed{J(n,1)=(-1)^{n-1}\ln 2+(-1)^n\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(-1)^k}{k+1}}$$

3) On procède comme ci-dessus. Pour tout $t\in\,]0,1]$ et tout $n\in\mathbb{N}^*$ :

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-t^\beta)^k=\frac{1-(-t^\beta)^n}{1+t^\beta}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{t^{\alpha-1}}{1+t^\beta}=(-1)^n\frac{t^{\alpha-1+n\beta}}{1+t^\beta}+\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^{\alpha-1+k\beta}\ .$$

Donc, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ :

$$J(\alpha,\beta)=\int_0^1\frac{t^{\alpha-1}}{1+t^\beta}dt=(-1)^n\int_0^1\frac{t^{\alpha-1+n\beta}}{1+t^\beta}dt+\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\int_0^1 t^{\alpha-1+k\beta}dt=(-1)^n\int_0^1\frac{t^{\alpha-1+n\beta}}{1+t^\beta}dt+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{\alpha+k\beta}.$$

Or :

$$\left|\int_0^1\frac{t^{\alpha-1+n\beta}}{1+t^\beta}dt\right|=\int_0^1\frac{t^{\alpha-1+n\beta}}{1+t^\beta}dt\leq\int_0^1 t^{\alpha-1+n\beta}dt=\frac{1}{\alpha+n\beta}.$$

Et comme $\dfrac{1}{\alpha+n\beta}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$, le théorème des gendarmes donne $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{t^{\alpha-1+n\beta}}{1+t^\beta}dt=0$, et ainsi :

$$\boxed{J(\alpha,\beta)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\alpha+k\beta}}$$

4) Pour tout $t\in\,]0,1]$, on a $1-(t^\beta)^2=(1-t^\beta)(1+t^\beta)\leq 1$, donc :

$$1-t^\beta\leq\frac{1}{1+t^\beta}\leq 1.$$

Avec $\displaystyle\int_0^1 t^{\alpha-1}dt=\frac{1}{\alpha}$ et par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^1 t^{\alpha-1}dt-\int_0^1 t^{\alpha-1+\beta}dt\leq J(\alpha,\beta)\leq\int_0^1 t^{\alpha-1}dt\quad\Leftrightarrow\quad\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha+\beta}=\frac{\beta}{\alpha(\alpha+\beta)}\leq J(\alpha,\beta)\leq\frac{1}{\alpha}.$$

Alors :

- $\displaystyle\lim_{\alpha\to 0^+}\frac{\beta}{\alpha(\alpha+\beta)}=+\infty$ donc $\displaystyle\lim_{\alpha\to 0^+}J(\alpha,\beta)=+\infty$ par théorème de comparaison ;

- $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\dfrac{\beta}{\alpha(\alpha+\beta)}=\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\dfrac{1}{\alpha}=0$ donc $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}J(\alpha,\beta)=0$ par le théorème des gendarmes.
- $\lim\limits_{\beta\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\alpha+\beta}\right)=\dfrac{1}{\alpha}$ donc $\lim\limits_{\beta\to+\infty}J(\alpha,\beta)=\dfrac{1}{\alpha}$ par le théorème des gendarmes.

Enfin, pour tout $t\in\left]0,1\right]$, $t^\beta\xrightarrow[\beta\to 0]{}1$ et :

$$J(\alpha,\beta)-\int_0^1\frac{t^{\alpha-1}}{2}dt=\int_0^1\frac{t^{\alpha-1}}{1+t^\beta}dt-\int_0^1\frac{t^{\alpha-1}}{2}dt=\int_0^1 t^{\alpha-1}\left(\frac{1}{1+t^\beta}-\frac{1}{2}\right)dt=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{\alpha-1}\frac{1-t^\beta}{1+t^\beta}dt\,.$$

Or :

$$\left|\int_0^1 t^{\alpha-1}\frac{1-t^\beta}{1+t^\beta}dt\right|=\int_0^1 t^{\alpha-1}\frac{1-t^\beta}{1+t^\beta}dt\le\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t^\beta)dt=\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha+\beta}\,.$$

Comme $\lim\limits_{\beta\to0^+}\left(\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\alpha+\beta}\right)=0$, on $\lim\limits_{\beta\to0^+}\displaystyle\int_0^1 t^{\alpha-1}\frac{1-t^\beta}{1+t^\beta}dt=0$ par le théorème des gendarmes, donc :

$$\lim_{\beta\to0^+}\left(J(\alpha,\beta)-\int_0^1\frac{t^{\alpha-1}}{2}dt\right)=\lim_{\beta\to0^+}\frac{1}{2}\int_0^1 t^{\alpha-1}\frac{1-t^\beta}{1+t^\beta}dt=0\,.$$

Soit :

$$\lim_{\beta\to0^+}J(\alpha,\beta)=\int_0^1\frac{t^{\alpha-1}}{2}dt=\frac{1}{2\alpha}\,.$$

Finalement :

| | |
|---|---|
| $\lim\limits_{\alpha\to0^+}J(\alpha,\beta)=+\infty$ | $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}J(\alpha,\beta)=0$ |
| $\lim\limits_{\beta\to0^+}J(\alpha,\beta)=\dfrac{1}{2\alpha}$ | $\lim\limits_{\beta\to+\infty}J(\alpha,\beta)=\dfrac{1}{\alpha}$ |

## *Planche n° 22*

1) On a pour tout $t\in\mathbb{R}$, $\cos^2 t+4\cos t+3=(\cos t+2)^2-1$ et comme $\cos t+2\ge1$, on a :

$$\cos^2 t+4\cos t+3\ge 0\,.$$

Donc :

$$\boxed{L \text{ est définie sur } \mathbb{R}\,.}$$

Comme les fonctions $\cos$ et $\sin$ le sont, les fonctions $t\mapsto x(t)$ et $t\mapsto y(t)$ sont $2\pi$-périodiques.

La courbe $L$ est donc décrite complètement quand $t$ décrit $[-\pi,\pi]$.

Or, $[-\pi,\pi]$ est symétrique par rapport à 0 et $t \mapsto x(t)$ est paire (car cos l'est) et $t \mapsto y(t)$ est impaire (car sin l'est). Donc :

$$\boxed{\text{La courbe } L \text{ est symétrique par rapport à l'axe des abscisses } (Ox).}$$

2) On peut restreindre l'étude à $[0,\pi]$. Pour $t \in [0,\pi]$, on a :

$$\cos^2 t + 4\cos t + 3 = (\cos t + 2)^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos t = -1 \quad \Leftrightarrow \quad t = \pi .$$

Comme la fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto x(t)$ est dérivable sur $[0,\pi[$ et :

$$x'(t) = \frac{-2\sin t \cos t - 4\sin t}{2\sqrt{\cos^2 t + 4\cos t + 3}} = -\frac{(\cos t + 2)\sin t}{\sqrt{\cos^2 t + 4\cos t + 3}} .$$

Pour tout $t \in [0,\pi[$, on a $x'(t) \leq 0$ avec $x'(t) = 0$ seulement en $t = 0$.

La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$, $t \mapsto y(t)$ est dérivable sur $[0,\pi]$ et $y'(t) = \cos t$.

On obtient le tableau :

| $t$ | $0$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x'(t)$ | $0$ | $-$ | $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ | $-$ | $\Vert$ |
| $x$ | $2\sqrt{2}$ | $\searrow$ | $\sqrt{3}$ | $\searrow$ | $0$ |
| $y$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ |
| $y'(t)$ | $1$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-1$ |

Comme $x'$ et $y'$ ne s'annulent pas simultanément :

$$\boxed{L \text{ n'a pas de point singulier.}}$$

3) Le « point d'origine de $L$ » doit être l'origine du repère… Qui est atteinte en $t = \pi$.

Si on note $M(t)$ le point de coordonnées $x(t)$ et $y(t)$, on a :

$$\frac{1}{t-\pi}\overrightarrow{OM(t)} = \frac{\sqrt{\cos^2 t + 4\cos t + 3}}{t-\pi}\vec{i} + \frac{\sin t}{t-\pi}\vec{j} .$$

Si cette fonction vectorielle admet une limite non nulle quand $t \to \pi$, alors la courbe $L$ admet une tangente en $O$ dirigée par ce vecteur limite.

On a $\lim\limits_{t\to\pi}\dfrac{\sin t}{t-\pi}=\sin'\pi=\cos\pi=-1$ et, avec $u=\pi-t$ :

$$\lim_{t\to\pi^-}\frac{\sqrt{\cos^2 t+4\cos t+3}}{t-\pi}=\lim_{u\to 0^+}\frac{\sqrt{\cos^2(\pi-u)+4\cos(\pi-u)+3}}{-u}=-\lim_{u\to 0^+}\sqrt{\frac{\cos^2 u-4\cos u+3}{u^2}}.$$

Or, $\cos^2 u-4\cos u+3=\left(1-\dfrac{1}{2}u^2+\underset{0}{o}(u^2)\right)^2-4\left(1-\dfrac{1}{2}u^2+\underset{0}{o}(u^2)\right)+3=u^2+\underset{0}{o}(u^2)$, donc :

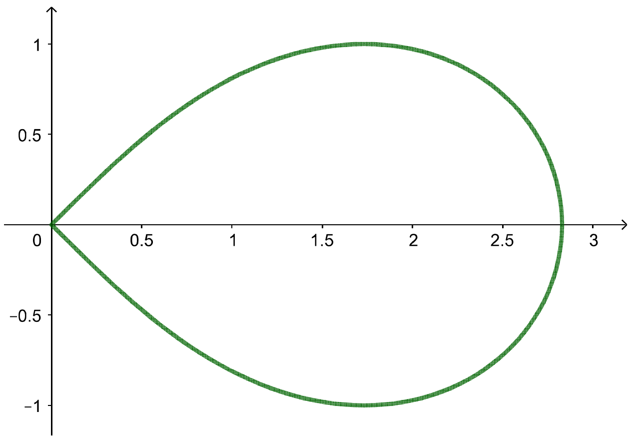
$$\lim_{t\to\pi^-}\frac{\sqrt{\cos^2 t+4\cos t+3}}{t-\pi}=-1.$$

Ainsi, $\dfrac{1}{t-\pi}\overrightarrow{OM(t)}\xrightarrow[t\to\pi^-]{}-\vec{i}-\vec{j}$, donc $L$ admet une demi-tangente en $O$, dirigée par $\vec{i}+\vec{j}$, donc d'équation $y=x$. Par symétrie par rapport à $(Ox)$, $L$ admet aussi la droite d'équation $y=-x$ pour demi-tangente en $O$.

Ainsi :

$$\boxed{L \text{ admet deux demi-tangentes en } O\text{, d'équations respectives } y=x \text{ et } y=-x.}$$

On obtient la courbe $L$ :




4) Si on note $\ell$ la longueur de $L$, on a, du fait de la symétrie :

$$\ell=2\int_0^\pi\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt=2\int_0^\pi\sqrt{\left(\frac{(\cos t+2)\sin t}{\sqrt{\cos^2 t+4\cos t+3}}\right)^2+\cos^2 t}\,dt$$

$$=2\int_0^\pi\sqrt{\frac{(\cos t+2)^2\sin^2 t}{\cos^2 t+4\cos t+3}+\cos^2 t}\,dt$$

$$=2\int_0^\pi\sqrt{\frac{(\cos^2 t+4\cos t+4)(1-\cos^2 t)+\cos^2 t(\cos^2 t+4\cos t+3)}{\cos^2 t+4\cos t+3}}\,dt$$

$$=2\int_0^\pi\sqrt{\frac{\cos^2 t+3\cos t+4}{\cos^2 t+4\cos t+3}}\,dt$$

## *Planche n° 23*

1) C'est du cours de première année.

2) Soit $P=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k\in\mathbb{C}[X]$ tel que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $P(x)\in\mathbb{R}$.

On a $P(0)=a_0\in\mathbb{R}$.

Si pour $k\in[\![0,n-1]\!]$ (quand $n\geq 1$), $a_0,a_1,\dots,a_k\in\mathbb{R}$, alors pour tout $x\in\mathbb{R}$, $P(x)-\sum_{j=0}^{k}a_jx^j\in\mathbb{R}$.

Or :

$$P(x)-\sum_{j=0}^{k}a_jx^j=\sum_{j=k+1}^{n}a_jx^j=x^{k+1}\sum_{j=k+1}^{n}a_jx^{j-k-1}=x^{k+1}\sum_{j=0}^{n-k-1}a_{k+1+j}x^j.$$

Donc, pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, $\frac{1}{x^{k+1}}\left(P(x)-\sum_{j=0}^{k}a_jx^j\right)=\sum_{j=0}^{n-k-1}a_{k+1+j}x^j\in\mathbb{R}$ et par continuité en 0 :

$$\lim_{x\to 0}\left(\sum_{j=0}^{n-k-1}a_{k+1+j}x^j\right)=a_{k+1}\in\mathbb{R}.$$

Donc, si la propriété $a_k\in\mathbb{R}$ est vraie jusqu'au rang *k*, elle est vraie au rang $k+1$. Comme elle est vraie au rang $k=0$, ceci prouve par récurrence forte que pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, $a_k\in\mathbb{R}$ et donc que :

$$\boxed{\text{Les coefficients de } P \text{ sont réels.}}$$

3) Il suffit de prendre $P=(X-1)^{2n}$ avec $n\in\mathbb{N}^*$.

4) Soit $Q\in\mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $Q(x)\geq 0$.

On veut prouver que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $R(x)=Q(x)+Q'(x)+\dots+Q^{(n)}(x)\geq 0$.

Comme $Q\in\mathbb{R}_n[X]$, $\deg Q\leq n$ et $Q^{(n+1)}=0$. On a donc :

$$R'=Q'+Q''+\dots+Q^{(n)}+Q^{(n+1)}=Q+Q'+Q''+\dots+Q^{(n)}-Q=R-Q.$$

Ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}$ :

$$R'(x)-R(x)=-Q(x)\quad\Leftrightarrow\quad e^{-x}R'(x)-e^{-x}R(x)=-e^{-x}Q(x).$$

Or, $x\mapsto e^{-x}R'(x)-e^{-x}R(x)$ est la dérivée de $x\mapsto e^{-x}R(x)$.

De plus, on a $e^{-x}Q(x)=\underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$, et comme $\int^{+\infty}\frac{dt}{t^2}$ converge, $\int^{+\infty}e^{-t}Q(t)\,dt$ converge.

Par ailleurs, $\lim_{x\to+\infty}e^{-x}R(x)=0$ par croissances comparées.

On peut alors intégrer la relation $e^{-x}R'(x)-e^{-x}R(x)=-e^{-x}Q(x)$ entre $x\in\mathbb{R}$ et $+\infty$, ce qui donne :

$$\left[e^{-t}R(t)\right]_x^{+\infty}=-\int_x^{+\infty}e^{-t}Q(t)\,dt\quad\Leftrightarrow\quad e^{-x}R(x)=\int_x^{+\infty}e^{-t}Q(t)\,dt.$$

Ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}$ :

$$R(x)=e^{x}\int_{x}^{+\infty}e^{-t}Q(t)\,dt\,.$$

Comme pour tout $t\in\mathbb{R}$, $e^{-t}Q(t)\geq 0$, on a pour tout $x\in\mathbb{R}$, $e^{x}\int_{x}^{+\infty}e^{-t}Q(t)\,dt\geq 0$, d'où :

$$\boxed{\text{Pour tout } x\in\mathbb{R},\ R(x)=Q(x)+Q'(x)+\ldots+Q^{(n)}(x)\geq 0.}$$

## ***Planche n° 24***

**I)** Soient $a\in\mathbb{R}_{+}^{*}$ et $n\in\mathbb{N}$. La fonction $t\mapsto\dfrac{\sin(nt)}{\sin t}$ est continue sur $]0,a]$ et prolongeable par continuité en 0, car $\dfrac{\sin(nt)}{\sin t}\underset{t\to 0}{\sim}\dfrac{nt}{t}=n$, donc :

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_{0}^{a}\frac{\sin(nt)}{\sin t}\,dt \text{ existe bien.}}$$

Soit $a\in\,]0,\pi[$. On pose $f(x)=\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}$ pour $x\neq 0$ et $f(0)=0$.

Pour tout $x\in\,]0,\pi[$ :

$$f(x)=\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}=\frac{x-\sin x}{x\sin x}=-\frac{\dfrac{\sin x-x}{x}}{\sin x}=-\frac{\dfrac{\sin x-x}{x^{2}}}{\dfrac{\sin x}{x}}\,.$$

Or, pour tout $x\in\mathbb{R}^{*}$ :

$$g(x)=\frac{\sin x-x}{x^{2}}=\frac{1}{x^{2}}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n+1)!}x^{2n+1}-x\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n+1)!}x^{2n-1}$$

$$h(x)=\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n+1)!}x^{2n+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n+1)!}x^{2n}$$

Comme $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to 0}h(x)=1$, donc en posant , les fonctions $g$ et $h$ sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$, donc de classe $C^{\infty}$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in[0,\pi[$, $h(x)\neq 0$.

Alors, comme quotient de fonctions de classe $C^{\infty}$ sur $[0,\pi[$, dont le dénominateur ne s'annule pas :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est de classe } C^{\infty} \text{ sur } ]0,\pi[.}$$

Soit $n\in\mathbb{N}^{*}$.

Comme $f$ et $t\mapsto-\dfrac{\cos(nt)}{n}$ sont de classe $C^{1}$ sur $[0,a]$, on peut faire une intégration par parties :

$$\int_{0}^{a}f(t)\sin(nt)dt=\frac{f(0)-f(a)\cos(na)}{n}+\frac{1}{n}\int_{0}^{a}f'(t)\cos(nt)\,dt\,.$$

Donc :

$$\left|\int_0^a f(t)\sin(nt)dt\right| \le \left|\frac{f(0)-f(a)\cos(na)}{n}\right| + \left|\frac{1}{n}\int_0^a f'(t)\cos(nt)\,dt\right|.$$

Or :

- $\left|\dfrac{f(0)-f(a)\cos(na)}{n}\right| \le \dfrac{|f(0)|+|f(a)|}{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|f(0)|+|f(a)|}{n}$ ;
- $\left|\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^a f'(t)\cos(nt)\,dt\right| \le \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^a |f'(t)\cos(nt)|\,dt \le \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^a |f'(t)|\,dt$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^a |f'(t)|\,dt = 0$.

Donc d'après le théorème de gendarmes :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_0^a f(t)\sin(nt)dt = 0}$$

On a vu que $\displaystyle\int_0^a \frac{\sin(nt)}{\sin t}dt$ converge et on prouve de la même façon que $\displaystyle\int_0^a \frac{\sin(nt)}{t}dt$ converge.

Alors :

$$\int_0^a \frac{\sin(nt)}{\sin t}dt - \int_0^a \frac{\sin(nt)}{t}dt = \int_0^a \left(\frac{1}{\sin t}-\frac{1}{t}\right)\sin(nt)dt = \int_0^a f(t)\sin(nt)dt$$

où *f* est la fonction définie un peu plus haut.

Comme on a vu que la fonction *f* est de classe $C^\infty$ sur $[0,\pi[$, elle est bien de $C^1$ sur $[0,a]\subset[0,\pi[$ et donc on peut utiliser le résultat précédent :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^a \frac{\sin(nt)}{\sin t}dt - \int_0^a \frac{\sin(nt)}{t}dt\right) = 0}$$

On prend $a = \dfrac{\pi}{2}$.

On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nt)}{\sin t}dt - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nt)}{t}dt\right) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nt)}{t}dt = \frac{\pi}{2}$, donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nt)}{\sin t}dt = \frac{\pi}{2}.$$

Si $a \ne \dfrac{\pi}{2}$, on a pour tout $n\in\mathbb{N}$ :

$$\int_0^a \frac{\sin(nt)}{t}dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nt)}{t}dt + \int_{\pi/2}^a \frac{\sin(nt)}{t}dt.$$

Comme $t\mapsto \dfrac{1}{t}$ est de classe $C^1$ sur $\left[a,\dfrac{\pi}{2}\right]$ ou $\left[\dfrac{\pi}{2},a\right]$, on à l'aide d'une intégration par parties come ci-dessus que $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_{\pi/2}^a \frac{\sin(nt)}{t}dt = 0$ et donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^a \frac{\sin(nt)}{t}dt = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nt)}{t}dt + \lim_{n\to+\infty}\int_{\pi/2}^a \frac{\sin(nt)}{t}dt = \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^a \frac{\sin(nt)}{\sin t}\,dt = \lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^a \frac{\sin(nt)}{\sin t}\,dt - \int_0^a \frac{\sin(nt)}{t}\,dt\right) + \lim_{n\to+\infty}\int_0^a \frac{\sin(nt)}{t}\,dt = 0 + \frac{\pi}{2}.$$

Finalement :

$$\boxed{\text{Pour tout } a \in \left]0,\pi\right[,\ \lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nt)}{\sin t}\,dt = \frac{\pi}{2}.}$$

## *Série 5*

### *Planche n° 25*

1) La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x^2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$, en tant que quotient de telles fonctions.

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\left|\dfrac{\sin x}{x^2}\right| \le \dfrac{1}{x^2}$ et $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge, donc $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,dt$ converge.

Ainsi, *f* est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et $-f$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x^2}$, donc :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est définie et dérivable sur } \mathbb{R}_+^*, \text{ de dérivée } x \mapsto -\frac{\sin x}{x^2}.}$$

2) Les fonctions $t \mapsto \sin t$ et $t \mapsto -\dfrac{1}{t}$ sont de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc pour tout $x \in \left]0,\pi\right]$, on peut réaliser une intégration par parties entre $x$ et $\pi$ :

$$\begin{aligned}\int_x^{\pi} \frac{\sin t}{t^2}\,dt &= \left[-\frac{\sin t}{t}\right]_x^{\pi} + \int_x^{\pi} \frac{\cos t}{t}\,dt \\ &= \frac{\sin x}{x} + \int_x^{\pi} \frac{\cos t - 1}{t}\,dt + \int_x^{\pi} \frac{1}{t}\,dt \\ &= \frac{\sin x}{x} + \int_x^{\pi} \frac{\cos t - 1}{t}\,dt + \ln \pi - \ln x\end{aligned}$$

Alors, pour tout $x \in \left]0,\pi\right]$ :

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,dt = \int_x^{\pi} \frac{\sin t}{t^2}\,dt + \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,dt = -\ln x + g(x)$$

avec $g(x) = \dfrac{\sin x}{x} + \displaystyle\int_x^{\pi} \frac{\cos t - 1}{t}\,dt + \ln \pi + \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,dt$.

Or, $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{\cos t - 1}{t} = 0$, donc $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos t - 1}{t}\,dt$ converge. Alors :

$$\lim_{x \to 0} g(x) = 1 + \int_0^{\pi} \frac{\cos t - 1}{t}\,dt + \ln \pi + \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,dt \in \mathbb{R}.$$

Comme $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} (-\ln x) = +\infty$, on a $g(x) \underset{x \to 0}{=} o(-\ln x)$, donc $f(x) = -\ln x + \underset{x \to 0}{o}(-\ln x)$, soit :

$$\boxed{f(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} -\ln x}$$

3) Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. Procédons à deux intégrations par parties successives.

Les fonctions $t \mapsto -\cos t$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ sont de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, d'où :

$$\int_x^y \frac{\sin t}{t^2}\,dt = \left[\frac{-\cos t}{t^2}\right]_x^y - 2\int_x^y \frac{\cos t}{t^3}\,dt\,.$$

Les fonctions $t \mapsto \sin t$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t^3}$ sont de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, d'où :

$$\begin{aligned}\int_x^y \frac{\sin t}{t^2}\,dt &= \left[\frac{-\cos t}{t^2}\right]_x^y - 2\left(\left[\frac{\sin t}{t^3}\right]_x^y + 3\int_x^y \frac{\sin t}{t^4}\,dt\right)\\ &= \frac{\cos x}{x^2} - \frac{\cos y}{y^2} - 2\frac{\sin y}{y^3} + 2\frac{\sin x}{x^3} + 6\int_x^y \frac{\sin t}{t^4}\,dt\end{aligned}$$

Et $\displaystyle\lim_{y \to +\infty} \frac{\cos y}{y^2} = \lim_{y \to +\infty} \frac{\sin y}{y^3} = 0$, et $\left|\dfrac{\sin t}{t^4}\right| \le \dfrac{1}{t^4}$ et $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^4}$ converge, donc $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^4}\,dt$ converge et :

$$\left|\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^4}\,dt\right| \le \int_x^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t^4}\right| dt \le \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^4} = \frac{1}{3x^3} \quad \textbf{(1)}.$$

Alors, en passant à la limite quand $y \to +\infty$, on obtient :

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,dt = \frac{\cos x}{x^2} + 2\frac{\sin x}{x^3} + 6\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^4}\,dt\,.$$

Or :

- $\dfrac{\cos x}{x^2} \underset{x\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ ;
- $\dfrac{\sin x}{x^3} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ ;
- $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^4}\,dt \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ d'après **(1)**.

Ainsi :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right)}$$

4) La fonction $f$ étant dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, elle y est continue. De plus :

- $f(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} -\ln x$ et $x \mapsto -\ln x$ est intégrable en 0 et positive au voisinage de $0^+$, donc $f$ est intégrable en 0.
- $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, et $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est intégrable en $+\infty$ et positive, donc $f$ est intégrable en $+\infty$.

Ceci prouve que :

$$\boxed{f \text{ est intégrable sur } ]0,+\infty[\,.}$$

## *Planche n° 26*

1) La variable *X* (*resp*. *Y*) correspond au rang d'apparition de la première boule verte (*resp*. noire).

On a $X(\Omega)=Y(\Omega)=\mathbb{N}^*$ (on peut obtenir une boule verte à l'issue de n'importe quel tirage).

Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

L'évènement $(X=n)$ se réalise quand on a obtenu des boules noires à l'issue des $n-1$ premiers tirages (pour $n\geq 2$) et une boule verte à l'issue du $n^{\text{ième}}$. Ainsi, si on note $V_k$ (*resp*. $N_k$) l'évènement : « on obtient une boule verte (*resp*. noire) à l'issue du $k^{\text{ième}}$ tirage », on a :

$$P(X=n)=P(N_1\cap\ldots\cap N_{n-1}\cap V_n).$$

La formule de probabilités composées donne alors :

$$P(X=n)=P(N_1)\,P_{(N_1)}(N_2)\ldots P_{(N_1\cap\ldots\cap N_{k-1})}(N_k)\ldots P_{(N_1\cap\ldots\cap N_{n-2})}(N_{n-1})\,P_{(N_1\cap\ldots\cap N_{n-1})}(V_n).$$

Et, $P(N_1)=\dfrac{1}{3}$ et si, pour $2\leq k\leq n-1$ (s'il y a lieu), $N_1\cap\ldots\cap N_{k-1}$ est réalisé, on a $3+k-1=k+2$ boules dans l'urne lors du $k^{\text{ième}}$ tirage, dont *k* boules noires (car on n'a ajouté que des boules noires). Donc :

$$P_{(N_1\cap\ldots\cap N_{k-1})}(N_k)=\frac{k}{k+2}.$$

De même, si $N_1\cap\ldots\cap N_{n-1}$ est réalisé, on a $n+2$ boules dans l'urne lors du $n^{\text{ième}}$ tirage, dont seulement les 2 boules vertes initiales, donc :

$$P_{(N_1\cap\ldots\cap N_{n-1})}(V_n)=\frac{2}{n+2}.$$

Ainsi :

$$P(X=n)=\frac{1}{3}\frac{2}{4}\ldots\frac{k}{k+2}\ldots\frac{n-1}{n+1}\frac{2}{n+2}=\frac{4(n-1)!}{(n+2)!}=\frac{4}{n(n+1)(n+2)}.$$

De la même façon :

$$\begin{aligned}P(Y=n)&=P(V_1)\,P_{(V_1)}(V_2)\ldots P_{(V_1\cap\ldots\cap V_{k-1})}(V_k)\ldots P_{(V_1\cap\ldots\cap V_{n-2})}(V_{n-1})\,P_{(V_1\cap\ldots\cap V_{n-1})}(N_n)\\&=\frac{2}{3}\frac{3}{4}\ldots\frac{k+1}{k+2}\ldots\frac{n}{n+1}\frac{1}{n+2}=\frac{2n!}{(n+2)!}=\frac{2}{(n+1)(n+2)}\end{aligned}$$

Ainsi, $X(\Omega)=Y(\Omega)=\mathbb{N}^*$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ :

$$\boxed{P(X=n)=\frac{4}{n(n+1)(n+2)}\quad\text{et}\quad P(Y=n)=\frac{2}{(n+1)(n+2)}.}$$

2) a. La variable $U_k$ est une variable compteur (de boules vertes), donc on a immédiatement :

$$\boxed{Z_n=U_1+U_2+\ldots+U_n}$$

b. Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $k\in[\![0,n]\!]$.

Si $(Z_n=k)$ est réalisé, alors on a obtenu $k$ boules vertes et $n-k$ boules noires lors des $n$ premiers tirages, donc le $(n+1)^{\text{ième}}$ tirage s'effectue dans une urne contenant $n+3$ boules dont $k+2$ boules vertes (et $n-k+1$ boules noires). Dans ces conditions, la probabilité d'obtenir une boule verte au $(n+1)^{\text{ième}}$ tirage est :

$$\boxed{P\left(U_{n+1}=1\mid Z_n=k\right)=\frac{k+2}{n+3}}$$

c. Rappelons que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $U_n(\Omega)=\{0,1\}$ et $Z_n(\Omega)=[\![0,n]\!]$.

On veut prouver que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $U_n \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{2}{3}\right)$.

Si les $U_n$ étaient indépendantes (attention : ce n'est pas le cas), alors $Z_n=\sum_{k=1}^{n}U_k$ suivrait une loi binomiale de paramètres $n$ et $\frac{2}{3}$. Conjecturons que c'est le cas, malgré tout, c'est-à-dire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $Z_n \hookrightarrow \mathscr{B}\left(n,\frac{2}{3}\right)$.

Prouvons alors cela par récurrence forte. On reprend les notations introduites plus haut.

*Initialisation* :

Pour $n=1$, on a, $P\left(U_1=1\right)=P\left(V_1\right)=\frac{2}{3}$, donc $P\left(U_1=0\right)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$.

La propriété est donc vraie au rang $n=1$.

*Hérédité* :

Supposons la propriété vraie jusqu'à un rang $n\in\mathbb{N}^*$.

Comme $Z_n(\Omega)=[\![0,n]\!]$, la famille $\left(Z_n=k\right)_{k\in[\![0,n]\!]}$ forme un système complet d'évènements, on a d'après la loi des probabilités totales :

$$P\left(U_{n+1}=1\right)=\sum_{k=0}^{n}P\left(Z_n=k\right)P_{(Z_n=k)}\left(U_{n+1}=1\right).$$

Pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, on a vu que $P_{(Z_n=k)}\left(U_{n+1}=1\right)=\frac{k+2}{n+3}$ et par hypothèse de récurrence, $Z_k \hookrightarrow \mathscr{B}\left(k,\frac{2}{3}\right)$, donc :

$$P\left(Z_n=k\right)=\binom{n}{k}\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}.$$

Alors :

$$\begin{aligned}P(U_{n+1}=1)&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{2}{3}\right)^{k}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}\frac{k+2}{n+3}=\frac{1}{n+3}\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}\left(\frac{2}{3}\right)^{k}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}+\frac{2}{n+3}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{2}{3}\right)^{k}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}\\&=\frac{1}{n+3}\sum_{k=1}^{n}k\,\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{k}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}+\frac{2}{n+3}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)^{n}\\&=\frac{n}{n+3}\,\frac{2}{3}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\left(\frac{2}{3}\right)^{k}\left(\frac{1}{3}\right)^{(n-1)-k}+\frac{2}{n+3}\\&=\frac{2}{3}\,\frac{n}{n+3}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{2}{n+3}=\frac{2}{n+3}\,\frac{n+3}{3}=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

Ainsi, $P(U_{n+1}=1)=\frac{2}{3}$ et donc, $U_{n+1}\hookrightarrow\mathscr{B}\left(\frac{2}{3}\right)$.

Soit maintenant $k\in[\![0,n+1]\!]$.

Comme $\{(U_{n+1}=1),(U_{n+1}=0)\}$ forme un système complet d'évènements, on a, à nouveau d'après la loi des probabilités totales :

$$P(Z_{n+1}=k)=P(U_{n+1}=1)P_{(U_{n+1}=1)}(Z_{n+1}=k)+P(U_{n+1}=0)P_{(U_{n+1}=0)}(Z_{n+1}=k).$$

Or, pour $k\in[\![0,n+1]\!]$ :

- $P_{(U_{n+1}=1)}(Z_{n+1}=0)=0$ (car si $(U_{n+1}=1)$ est réalisé $Z_{n+1}$ vaut au moins 1 ;
- pour $k\geq 1$, si $(U_{n+1}=1)$ est réalisé (on a obtenu une boule verte au $(n+1)^{\text{ième}}$ tirage), alors l'évènement $(Z_{n+1}=k)$ est « le même » que $(Z_n=k-1)$, donc :
$$P_{(U_{n+1}=1)}(Z_{n+1}=k)=P(Z_n=k-1)\ ;$$
- si $(U_{n+1}=0)$ est réalisé (on a obtenu une boule noire au $(n+1)^{\text{ième}}$ tirage), alors l'évènement $(Z_{n+1}=k)$ est « le même » que $(Z_n=k)$, donc :
$$P_{(U_{n+1}=0)}(Z_{n+1}=k)=P(Z_n=k).$$

Comme $U_{n+1}\hookrightarrow\mathscr{B}\left(\frac{2}{3}\right)$ et $Z_n\hookrightarrow\mathscr{B}\left(n,\frac{2}{3}\right)$ par hypothèse de récurrence, on obtient :

$$P(Z_{n+1}=0)=\frac{1}{3}P(Z_n=0)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}=\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}.$$

Et pour $k\geq 1$, on a avec la formule de Pascal :

$$\begin{aligned}P(Z_{n+1}=k)&=\frac{2}{3}P(Z_n=k-1)+\frac{1}{3}P(Z_n=k)\\&=\frac{2}{3}\binom{n}{k-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k+1}+\frac{1}{3}\binom{n}{k}\left(\frac{2}{3}\right)^{k}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}\\&=\left[\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right]\left(\frac{2}{3}\right)^{k}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1-k}=\binom{n+1}{k}\left(\frac{2}{3}\right)^{k}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1-k}\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $k \in [\![0, n+1]\!]$, $P(Z_{n+1} = k) = \binom{n+1}{k}\left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1-k}$ et donc $Z_{n+1} \hookrightarrow \mathscr{B}\left(n+1, \frac{2}{3}\right)$.

La propriété est alors vraie au rang $n+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit :

$$\boxed{U_n \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{2}{3}\right) \text{ et } Z_n \hookrightarrow \mathscr{B}\left(n, \frac{2}{3}\right).}$$

3) *La question non retranscrite pouvait concerner l'indépendance éventuelle des $U_n$ (qui n'est pas, il suffit de calculer $P(U_1 = 1, U_2 = 1)$) et/ou des $Z_n$.*
*Cette question pouvait demander des calculs d'espérance et de variance…*

## *Planche n° 27*

On a $U \in S_n(\mathbb{R})$. On veut une *CNS* pour qu'il existe $V \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ telle que $U + V \in O_n(\mathbb{R})$.

1) a. On a donc $U + V \in O_n(\mathbb{R})$, soit ${}^t(U+V)(U+V) = (U+V){}^t(U+V) = I_n$.

Or, comme $U \in S_n(\mathbb{R})$ et $V \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, on a ${}^tU = U$ et ${}^tV = -V$, d'où :

$${}^t(U+V)(U+V) = ({}^tU + {}^tV)(U+V) = (U-V)(U+V) = U^2 - VU + UV - V^2 = U^2 - V^2 + UV - VU .$$

$$(U+V){}^t(U+V) = (U+V)({}^tU + {}^tV) = (U+V)(U-V) = U^2 + VU - UV - V^2 = U^2 - V^2 - UV + VU .$$

Donc :

$${}^t(U+V)(U+V) = (U+V){}^t(U+V) = I_n \quad \Leftrightarrow \quad U^2 - V^2 + UV - VU = U^2 - V^2 - (UV - VU) = I_n .$$

Alors :

- $U^2 - V^2 + UV - VU = U^2 - V^2 - (UV - VU)$ donne $UV - VU = 0_n$ ;
- $U^2 - V^2 + UV - VU = I_n$ donne alors $U^2 - V^2 = I_n$.

Ainsi, on a bien :

$$\boxed{UV = VU \text{ et } I_n = U^2 - V^2 .}$$

b. Soit $\lambda \in Sp(U) \subset \mathbb{R}$ ($U$ est symétrique réelle donc toutes ses valeurs propres sont réelles) et $X$ un vecteur propre associé à $\lambda$ ($X \neq 0$). On a :

$$U^2 X = \lambda^2 X = (I_n + V^2) X = X + V^2 X .$$

Donc :

$${}^tX(\lambda^2 X) = {}^tX(X + V^2 X) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2\, {}^tXX = {}^tXX + {}^tXV^2X \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda^2 - 1)\|X\|^2 = {}^tXV^2X .$$

Or :

$$\|VX\|^2 = {}^t(VX)(VX) = {}^tX\,{}^tVVX = {}^tX(-V)VX = -\,{}^tXV^2X .$$

Donc, ${}^t X V^2 X = -\|VX\|^2 \leq 0$, d'où $(\lambda^2 - 1)\|X\|^2 \leq 0$ et comme $\|X\|^2 > 0$ car $X \neq 0$, on obtient $\lambda^2 - 1 \leq 0$, soit :

$$\boxed{\lambda \in [-1,1]}$$

Comme la matrice $U$ est symétrique réelle, elle est diagonalisable dans une base orthonormée (théorème spectral), donc si $Sp(U) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\} \subset \mathbb{R}$ avec $\dim\ker(U - \lambda_k I_n) = n_k$ pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$D = diag\left(\lambda_1 I_{n_1}, \ldots, \lambda_r I_{n_r}\right) = {}^t PUP.$$

Or, $UV = VU$ , donc les sous-espaces propres de $U$ sont stables par $V$ est ainsi :

$${}^t PVP = diag\left(V_1, \ldots, V_r\right) = \Delta$$

avec $V_k \in \mathcal{M}_{n_k}(\mathbb{R})$ pour tout $k \in [\![1, r]\!]$.

On a alors ${}^t({}^t PVP) = diag\left({}^t V_1, \ldots, {}^t V_r\right)$, mais :

$${}^t({}^t PVP) = {}^t P\, {}^t V\, {}^t({}^t P) = {}^t P(-V)P = -\,{}^t PVP = diag\left(-V_1, \ldots, -V_r\right).$$

Donc, $diag\left({}^t V_1, \ldots, {}^t V_r\right) = diag\left(-V_1, \ldots, -V_r\right)$, autrement dit, pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, ${}^t V_k = -V_k$. Les matrices $V_k$ sont antisymétriques.

De plus :

$$U^2 - V^2 = I_n \quad \Leftrightarrow \quad {}^t PU^2P - {}^t PV^2P = {}^t PI_nP \quad \Leftrightarrow \quad ({}^t PUP)^2 - ({}^t PVP)^2 = I_n \quad \Leftrightarrow \quad D^2 - \Delta^2 = I_n.$$

Or, $D^2 = diag\left(\lambda_1^2 I_{n_1}, \ldots, \lambda_r^2 I_{n_r}\right)$ et $\Delta^2 = diag\left(V_1^2, \ldots, V_r^2\right)$, donc :

$$U^2 - V^2 = I_n \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, k \in [\![1, r]\!],\ \lambda_k^2 I_{n_k} - V_k^2 = I_{n_k} \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, k \in [\![1, r]\!],\ V_k^2 = -(1 - \lambda_k^2) I_{n_k}.$$

Fixons $k \in [\![1, r]\!]$.

Comme $\lambda_k \in [-1,1]$, on a $1 - \lambda_k^2 \geq 0$, donc, on peut poser $\alpha_k = \sqrt{1 - \lambda_k^2}$ , ce qui donne :

$$\begin{cases} V_k \in \mathcal{A}_{n_k}(\mathbb{R}) \\ V_k^2 = -\,\alpha_k^2 I_{n_k} \end{cases}$$

Soit alors $\mu$ une valeur propre réelle ou complexe de $V_k$. Alors, est $\mu^2$ valeur propre de $V_k^2$, donc $\mu^2 = -\,\alpha_k^2$, soit $\mu = \pm\, i\,\alpha_k$. Alors, $\chi_{V_k}$ , le polynôme caractéristique de $V_k$, est :

$$\chi_{V_k} = (X - i\,\alpha_k)^{\gamma_k}(X + i\,\alpha_k)^{\delta_k}$$

où $\gamma_k$ et $\delta_k$ sont deux entiers naturels tels que $\gamma_k + \delta_k = n_k$.

On a alors :

$$\chi_{V_k}(0) = (-\,i\,\alpha_k)^{\gamma_k}(i\,\alpha_k)^{\delta_k} = (-1)^{\gamma_k}(i\,\alpha_k)^{\gamma_k + \delta_k} = (-1)^{\gamma_k}(i\,\alpha_k)^{n_k} = (-1)^{\gamma_k}\,\alpha_k^{n_k}\, i^{n_k}.$$

Et, comme $V_k$ est réelle, $\chi_{V_k} \in \mathbb{R}[X]$, donc $\chi_{V_k}(0) \in \mathbb{R}$.

Supposons maintenant que $\lambda_k \in \left]-1,1\right[$, alors $\alpha_k \neq 0$, donc $\chi_{V_k}(0) = (-1)^{\gamma_k}\, \alpha_k^{n_k}\, i^{n_k} \in \mathbb{R}$ équivaut à $i^{n_k} \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire $n_k$ pair.

Rappelons que $n_k = \dim\ker\left(U - \lambda_k I_n\right)$, et ainsi, pour tout $\lambda \in Sp(U)$ :

$$\boxed{\text{Si } \lambda \in \left]-1,1\right[, \text{ alors } \ker\left(U - \lambda I_n\right) \text{ est de dimension paire.}}$$

2) Rappelons que l'on cherche une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une matrice $V \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ telle que $U + V \in O_n(\mathbb{R})$.

On vient de prouver que si tel est le cas, alors $Sp(U) \subset \left[-1,1\right]$ et pour tout $\lambda \in Sp(U)$ tel que $\lambda \in \left]-1,1\right[$, $\ker\left(U - \lambda I_n\right)$ est de dimension paire.

Montrons que la réciproque est vraie.

On suppose donc que $Sp(U) \subset \left[-1,1\right]$ et pour tout $\lambda \in Sp(U)$ tel que $\lambda \in \left]-1,1\right[$, $\ker\left(U - \lambda I_n\right)$ est de dimension paire.

On reprend les notations introduites dans la question 1 :

- $Sp(U) = \left\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\right\} \subset \left[-1,1\right]$ et pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, $\alpha_k = \sqrt{1 - \lambda_k^2}$ ;
- pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, $\dim\ker\left(U - \lambda_k I_n\right) = n_k$, avec $n_k = 2p_k$ quand $\lambda_k \in \left]-1,1\right[$
- $D = diag\left(\lambda_1 I_{n_1}, \dots, \lambda_r I_{n_r}\right) = {}^tPUP$ avec $P \in O_n(\mathbb{R})$.

Remarquons que toute matrice de la forme $\Delta = diag\left(V_1, \dots, V_r\right)$ avec $V_k \in \mathcal{A}_{n_k}(\mathbb{R})$ pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, est antisymétrique et commute avec $D$ et, si on pose $V = P\Delta\,{}^tP$, alors :

- ${}^tV = P\,{}^t\Delta\,{}^tP = P(-\Delta)\,{}^tP = -P\Delta\,{}^tP = -V$, donc $V \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ ;
- $UV = (PD\,{}^tP)(P\Delta\,{}^tP) = PD\Delta\,{}^tP = P\Delta D\,{}^tP = (P\Delta\,{}^tP)(PD\,{}^tP) = VU$.
- $U^2 - V^2 = I_n$ si et seulement si $D^2 - \Delta^2 = I_n$ (vu plus haut).

Posons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $A^2 = -I_2$.

Pour tous $p \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, si $W = diag\left(\alpha A, \dots, \alpha A\right) \in \mathcal{M}_{2p}(\mathbb{R})$, on a :

$$W^2 = diag\left(\alpha^2 A^2, \dots, \alpha^2 A^2\right) = diag\left(-\alpha^2 I_2, \dots, -\alpha^2 I_2\right) = -\alpha^2 I_{2p}.$$

Posons alors $\Delta = diag\left(V_1, \dots, V_r\right)$ avec pour tout $k \in [\![1, r]\!]$ :

- $V_k = 0_{n_k}$ si $\lambda_k = \pm 1$ ;
- $V_k = diag\left(\alpha_k A, \dots, \alpha_k A\right) \in \mathcal{M}_{2p_k}(\mathbb{R})$ si $\lambda_k \in \left]-1,1\right[$.

On a alors pour tout $k \in [\![1, r]\!]$ :

$$V_k^2 = \begin{cases} 0_{n_k} & \text{si } \lambda_k = \pm 1 \\ -\alpha_k^2 I_{n_k} & \text{si } \lambda_k \in \left]-1,1\right[ \end{cases}$$

Donc :

$$I_{n_k} + V_k^2 = \begin{cases} I_{n_k} & \text{si } \lambda_k = \pm 1 \\ (1-\alpha_k^2) I_{n_k} & \text{si } \lambda_k \in \left]-1,1\right[ \end{cases} = \lambda_k^2 I_{n_k}$$

Et ainsi :

$$I_n + \Delta^2 = I_n + diag\left(V_1^2, \dots, V_r^2\right) = diag\left(I_{n_1} + V_1^2, \dots, I_{n_r} + V_r^2\right) = diag\left(\lambda_1^2 I_{n_1}, \dots, \lambda_r^2 I_{n_r}\right) = D^2.$$

Ainsi, $D^2 - \Delta^2 = I_n$ et donc :

$$U^2 - V^2 = I_n.$$

Nous venons donc de construire $V \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ telle que $UV = VU$ et $U^2 - V^2 = I_n$. Alors :

$${}^t(U+V)(U+V) = ({}^tU + {}^tV)(U+V) = (U-V)(U+V) = U^2 - VU + UV - V^2 = U^2 - V^2 = I_n.$$

Ainsi, $V \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $U + V \in O_n(\mathbb{R})$.

Finalement, une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une matrice *V*, antisymétrique réelle de taille *n*, telle que $U+V$ soit orthogonale est :

$$\boxed{Sp(U) \subset [-1,1] \text{ avec } \dim\ker\left(U - \lambda I_n\right) \text{ paire quand } \lambda \in \left]-1,1\right[.}$$

## *Planche n° 28*

1) L'équation $(E)$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 et normalisée, donc avec la condition initiale $y(t_0) = x_0$, elle forme un problème de Cauchy, qui admet une et une seule solution.

Ainsi :

$$\boxed{\text{L'équation } (E) \text{ admet une unique solution } \varphi \text{ telle que } \varphi(t_0) = x_0.}$$

Soit $F(t) = \int_{t_0}^{t} f(u)\,du$.

La fonction *F* est définie et de classe $C^1$ sur *I* (car *f* est continue sur $\mathbb{R}$), avec $F' = f$.

Comme $\varphi$ est solution de $(E)$ sur *I*, on a :

$$\varphi' + f\varphi = g \quad \Leftrightarrow \quad e^F\varphi' + F'e^F\varphi = (e^F\varphi)' = e^F g.$$

L'équivalence est vraie car $e^F$ ne s'annule jamais sur *I*.

Alors, pour tout $t \in I$ :

$$\int_{t_0}^{t} (e^F \varphi)' = \int_{t_0}^{t} e^F g \quad \Leftrightarrow \quad e^{F(t)}\varphi(t) - e^{F(t_0)}\varphi(t_0) = \int_{t_0}^{t} e^{F(u)} g(u)\, du .$$

Et comme $\varphi(t_0) = x_0$ et $F(t_0) = 0$, on obtient pour tout $t \in I$ :

$$\boxed{\varphi(t) = x_0 e^{-F(t)} + e^{-F(t)} \int_{t_0}^{t} e^{F(u)} g(u)\, du \text{ avec } F(t) = \int_{t_0}^{t} f(u)\, du .}$$

Soit $f : t \mapsto -a$. On a bien $f, h \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. On pose $F(t) = \int_0^t f(u)\, du = -at$.

D'après la question précédente (avec $t_0 = 0$), toute solution $\varphi$ de $(E')$ est de la forme :

$$\varphi : t \mapsto \varphi(0) e^{at} + e^{at} \int_0^t e^{-au} h(u)\, du .$$

Comme $h$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $|h(t)| \le M$ .

Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\left|e^{-at} h(t)\right| \le M e^{-at}$ et comme $a > 0$, la fonction $t \mapsto M e^{-at}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc $t \mapsto e^{-at} h(t)$ l'est aussi. Alors, on peut écrire pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ :

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \varphi(0) e^{at} + e^{at} \int_0^t e^{-au} h(u)\, du \\
&= \varphi(0) e^{at} + e^{at} \left( \int_0^{+\infty} e^{-au} h(u)\, du - \int_t^{+\infty} e^{-au} h(u)\, du \right) \\
&= \left( \varphi(0) + \int_0^{+\infty} e^{-au} h(u)\, du \right) e^{at} - e^{at} \int_t^{+\infty} e^{-au} h(u)\, du
\end{aligned}$$

De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ :

$$\left| e^{at} \int_t^{+\infty} e^{-au} h(u)\, du \right| \le e^{at} \int_t^{+\infty} e^{-au} |h(u)|\, du \le e^{at} \int_t^{+\infty} e^{-au} M\, du = M e^{at} \left[ -\frac{1}{a} e^{-au} \right]_t^{+\infty} = \frac{M}{a} .$$

Ainsi, $t \mapsto e^{at} \int_t^{+\infty} e^{-au} h(u)\, du$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Donc, $\varphi$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si la fonction $t \mapsto \left( \varphi(0) + \int_0^{+\infty} e^{-au} h(u)\, du \right) e^{at}$ l'est.

Or, $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{at} = +\infty$ (car $a > 0$). Ainsi, $\varphi$ est bornée si et seulement si $\varphi(0) + \int_0^{+\infty} e^{-au} h(u)\, du$ et dans ce cas, on a $\varphi : t \mapsto e^{at} \int_{+\infty}^{t} e^{-au} h(u)\, du$.

Finalement :

$$\boxed{\text{L'équation } (E') \text{ admet une unique solution bornée sur } \mathbb{R}_+ \text{, qui est } t \mapsto e^{at} \int_{+\infty}^{t} e^{-au} h(u)\, du .}$$

## *Planche n° 29*

On a $S_\alpha = \left\{ f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \setminus f(0)=\alpha,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(\gamma x) \right\}$.

Remarquons que pour toute $f \in S_\alpha$, $f'(0) = f(0) = \alpha$.

1) Pour $\gamma = 1$, on a $S_\alpha = \left\{ f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \setminus f(0)=\alpha,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(x) \right\}$, donc :

$$\boxed{\text{Pour } \gamma = 1,\ S_\alpha = \left\{ x \mapsto \alpha e^x \right\}.}$$

Pour $\gamma = -1$, on a $S_\alpha = \left\{ f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \setminus f(0)=\alpha,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(-x) \right\}$.

Pour toute $f \in S_\alpha$, $f$ est $C^2$ sur $\mathbb{R}$, donc $f'$ est $C^2$ sur $\mathbb{R}$ et on peut dériver la relation $f'(x) = f(-x)$, ce qui donne pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = -f'(-x)$. Or, en remplaçant $x$ par pour tout $-x$ dans $f'(x) = f(-x)$, on obtient $f'(-x) = f(x)$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = -f(x)$, autrement dit, *f* est solution de $y'' + y = 0$, donc *f* est de la forme $x \mapsto A\cos x + B\sin x$ avec *A* et *B* des constantes réelles. Comme $f'(0) = f(0) = \alpha$, on obtient $f(0) = A = \alpha$ et $f'(0) = B = \alpha$, d'où :

$$f : x \mapsto \alpha(\cos x + \sin x).$$

On vérifie facilement que $x \mapsto \alpha(\cos x + \sin x)$ est bien dans $S_\alpha$ et ainsi :

$$\boxed{\text{Pour } \gamma = 1,\ S_\alpha = \left\{ x \mapsto \alpha(\cos x + \sin x) \right\}.}$$

2) Posons $a_n = \dfrac{1}{n!}\gamma^{\frac{n(n-1)}{2}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Comme $n(n-1)$ est le produit de deux entiers consécutifs, donc est un entier pair, $\dfrac{n(n-1)}{2}$ est toujours un entier naturel. Ainsi, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie pour tout $\gamma \in [-1,1]$.

- Quand $\gamma = 0$, on a $a_n = 0$ pour tout $n \geq 2$, donc le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ est infini.
- Quand $\gamma \neq 0$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ :

$$\left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \left| \frac{\frac{1}{(n+1)!}\gamma^{\frac{n(n+1)}{2}}}{\frac{1}{n!}\gamma^{\frac{n(n-1)}{2}}} x \right| = \frac{1}{n+1}|\gamma|^n |x| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \quad (\text{car } |\gamma| \leq 1).$$

  D'après la règle de d'Alembert, la série $\sum a_n x^n$, donc dans ce cas aussi, le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ est infini.

Finalement :

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence de la série entière } \sum_{n\geq 0} a_n x^n \text{ est infini.}}$$

3) Posons $h(x)=\sum_{n\geq 0} a_n x^n = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}\gamma^{\frac{n(n-1)}{2}} x^n$.

La fonction $h$ est de classe $C^\infty$ (donc $C^2$) sur $\mathbb{R}$ (car somme d'une série entière sur $\mathbb{R}$).

De plus, $h(0)=a_0=\frac{1}{0!}\gamma^0=1$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$ :

$$h'(x)=\sum_{n\geq 1} n\,a_n x^{n-1} = \sum_{n\geq 1} n\frac{1}{n!}\gamma^{\frac{n(n-1)}{2}} x^{n-1} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n-1)!}\gamma^{\frac{n(n-1)}{2}} x^{n-1}.$$

En réindexant, on obtient pour tout $x\in\mathbb{R}$ :

$$h'(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}\gamma^{\frac{(n+1)n}{2}}x^n=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}\gamma^{\frac{(n-1)n+2n}{2}}x^n=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}\gamma^{\frac{(n-1)n}{2}}\gamma^n x^n=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}\gamma^{\frac{(n-1)n}{2}}(\gamma x)^n=h(\gamma x).$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La somme de la série } \sum_{n\geq 0}\frac{\gamma^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!}x^n \text{ appartient bien à } S_1.}$$

Si $f\in S_1$, alors si $g=\alpha f$, on a $g(0)=\alpha\times 1=\alpha$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$ :

$$g'(x)=\alpha f'(x)=\alpha f(\gamma x)=g(\gamma x).$$

Donc, $g=\alpha f\in S_\alpha$. Ainsi :

$$\boxed{\text{La fonction } x\mapsto \alpha\sum_{n\geq 0}\frac{\gamma^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!}x^n \text{ appartient bien à } S_\alpha.}$$

4) Pour tout $f\in E$, on a $T(f): x\mapsto \alpha+\int_0^x f(\gamma t)\,dt$.

De plus, pour toute $f\in E$, on a $T(f)(0)=\alpha$ et $T(f)$ est de classe $C^3$ sur $\mathbb{R}$ (car $f$ est $C^2$) et pour tout $x\in\mathbb{R}$ :

$$T(f)'(x)=f(\gamma x).$$

a. Soit $f\in E$. On a :

$$\begin{aligned} T(f)=f \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x\in\mathbb{R},\ T(f)(x)=\alpha+\int_0^x f(\gamma t)\,dt=f(x)\\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} T(f)(0)=f(0)=\alpha\\ \forall x\in\mathbb{R},\ T(f)'(x)=f(\gamma x)=f'(x)\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \quad f\in S_\alpha \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\text{Une fonction } f \text{ est un point fixe de } T \text{ si et seulement si } f\in S_\alpha.}$$

b. Soit $(f,g)\in E^2$. On a $\|f-g\|_\infty = \sup\limits_{[-a,\,a]}|f-g|$.

Or, pour tout $x\in\mathbb{R}$ :

$$|T(f)(x)-T(g)(x)|=\left|\int_0^x f(\gamma t)\,dt-\int_0^x g(\gamma t)\,dt\right|=\left|\int_0^x [f(\gamma t)-g(\gamma t)]\,dt\right|\le\left|\int_0^x |f(\gamma t)-g(\gamma t)|\,dt\right|.$$

Donc, si $x\in[-a,a]$, alors pour tout $t\in[0,x]$ ou $[x,0]$, on a $|\gamma t|=|\gamma||t|\le a$ (car $|\gamma|\le 1$) et, ainsi, pour tout $x\in[-a,a]$ :

$$|T(f)(x)-T(g)(x)|\le\left|\int_0^x \|f-g\|_\infty\,dt\right|=\|f-g\|_\infty\,|x|\le a\|f-g\|_\infty.$$

D'où :

$$\boxed{\|T(f)-T(g)\|_\infty\le a\|f-g\|_\infty}$$

c. Remarquons déjà que d'après la question a, l'ensemble des points fixes de *T* est $S_\alpha$, et d'après la question 3, $S_\alpha$ contient au moins une fonction, donc *T* admet au moins un point fixe.

- Si $\gamma=0$, alors si *f* est *g* un point fixe de *T*, on a pour tout $x\in\mathbb{R}$ :

$$f(x)=T(f)(x)=\alpha+\int_0^x f(0)\,dt=\alpha+f(0)\,x.$$

  Et $f(0)=\alpha$, donc $f:x\mapsto\alpha(x+1)$ et ainsi, *f* est unique.

- Si $\gamma=\pm1$, alors $S_\alpha$ ne contient qu'une seule fonction d'après la question 1, donc *T* admet un unique point fixe.

- Supposons que $\gamma\in\,]-1,1[\,\setminus\{0\}$ et soient *f* et *g* deux points fixes de *T*.

  Alors, pour tout $a\in\,]0,1[$, on a :

$$\|T(f)-T(g)\|_\infty=\|f-g\|_\infty\le a\|f-g\|_\infty.$$

  Comme $a<1$, ceci est absurde si $\|f-g\|_\infty\ne0$ et donc $\|f-g\|_\infty=0$ ce qui veut dire que *f* et *g* coïncident sur $[-a,a]$. Comme ceci est vrai pour tout $a\in\,]0,1[$, donc les fonctions *f* et *g* coïncident sur $]-1,1[$.

  Comme pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=f(\gamma x)$ et $\gamma\ne0$, on a pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'\left(\frac{1}{\gamma}x\right)=f(x)$, et de même pour *g*. Alors, $x\mapsto f'\left(\frac{1}{\gamma}x\right)$ et $x\mapsto g'\left(\frac{1}{\gamma}x\right)$ coïncident sur $]-1,1[$, donc $f'$ et $g'$ coïncident sur $\left]-\frac{1}{|\gamma|},\frac{1}{|\gamma|}\right[$. Comme $f(0)=g(0)=\alpha$, *f* et *g* coïncident sur $\left]-\frac{1}{|\gamma|},\frac{1}{|\gamma|}\right[$.

Supposons maintenant que pour $k\in\mathbb{N}$, *f* et *g* coïncident sur $\left]-\frac{1}{|\gamma|^k},\frac{1}{|\gamma|^k}\right[$. Alors, on montre comme ci-dessus que $f'$ et $g'$ coïncident sur $\left]-\frac{1}{|\gamma|^{k+1}},\frac{1}{|\gamma|^{k+1}}\right[$, et donc que *f* et *g* coïncident sur $\left]-\frac{1}{|\gamma|^{k+1}},\frac{1}{|\gamma|^{k+1}}\right[$.

Ceci prouve par récurrence que *f* et *g* coïncident sur $\left]-\frac{1}{|\gamma|^k},\frac{1}{|\gamma|^k}\right[$ pour tout $k\in\mathbb{N}$.

Alors, *f* et *g* coïncident sur $\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\left]-\frac{1}{|\gamma|^k},\frac{1}{|\gamma|^k}\right[$. Et comme $\gamma\in\left]-1,1\right[\setminus\{0\}$, on a $\frac{1}{|\gamma|}>1$ et donc, $\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\left]-\frac{1}{|\gamma|^k},\frac{1}{|\gamma|^k}\right[=\mathbb{R}$.

Ainsi, les fonctions *f* et *g* coïncident sur $\mathbb{R}$, autrement dit, elles sont égales et donc, *T* admet un unique point fixe.

Finalement, dans tous les cas :

$$\boxed{T \text{ possède un unique point fixe.}}$$

Comme on a vu plus haut que l'ensemble des points fixes de *T* est $S_\alpha$ et comme *T* possède un unique point fixe :

$$\boxed{S_\alpha \text{ ne contient que la fonction } x\mapsto \alpha\sum_{n\geq 0}\frac{\gamma^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!}x^n.}$$

## *Planche n° 30*

**I)** Notons $h:t\mapsto e^{pt}$.

On cherche donc les fonctions *f* trois fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $f'''-f=h$

Soit *f* une fonction trois fois dérivables sur $\mathbb{R}$. Posons alors $g=f'-f$.

Comme *f* est trois fois dérivables sur $\mathbb{R}$, *g* l'est deux fois (en tant que différence de telles fonctions) et :

$$g''+g'+g=(f'''-f'')+(f''-f')+(f'-f)=f'''-f.$$

Donc :

$$f'''-f=h \quad\Leftrightarrow\quad g''+g'+g=h.$$

Appelons alors $(E)$ l'équation différentielle $y''+y'+y=h$.

L'équation homogène associée est $(H): y''+y'+y=0$.

L'équation caractéristique est $r^2+r+1=0$, de racines $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\overline{j}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$, donc les solutions de $(H)$ sont les fonctions $t\mapsto e^{-\frac{t}{2}}\left[A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right]$ avec $A,B\in\mathbb{R}$.

Par ailleurs, une solution particulière de $(E)$ est $t\mapsto\frac{1}{p^2+p+1}e^{pt}$, donc les solutions de $(E)$ sont les fonctions :

$$t\mapsto e^{-\frac{t}{2}}\left[A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right]+\frac{1}{p^2+p+1}e^{pt}\text{ avec }A,B\in\mathbb{R}.$$

Alors, avec $g=f'-f$, $f'''-f=h$ si et seulement s'il existe $(A,B)\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $t\in\mathbb{R}$ :

$$f'(t)-f(t)=e^{-\frac{t}{2}}\left[A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right]+\frac{1}{p^2+p+1}e^{pt}.$$

En posant $\varphi: t\mapsto e^{-t}f(t)$ (trois fois dérivables sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de telles fonctions), on obtient, avec $\varphi': t\mapsto e^{-t}f'(t)-e^{-t}f(t)$ :

$$\varphi'(t)=e^{-\frac{3t}{2}}\left[A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right]+\frac{1}{p^2+p+1}e^{(p-1)t}.$$

Une primitive $t\mapsto e^{-\frac{3t}{2}}\left[A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right]$ est $t\mapsto e^{-\frac{3t}{2}}\left[\lambda\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+\mu\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right]$ avec :

$$\begin{cases}\mu\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}\lambda=A\\ -\frac{3}{2}\mu-\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda=B\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda=-\frac{1}{2}A-\frac{\sqrt{3}}{6}B\\ \mu=\frac{\sqrt{3}}{6}A-\frac{1}{2}B\end{cases}$$

Et une primitive $t\mapsto\frac{1}{p^2+p+1}e^{(p-1)t}$ est $t\mapsto\frac{1}{(p-1)(p^2+p+1)}e^{(p-1)t}=\frac{1}{p^3-1}e^{(p-1)t}$ quand $p\neq 1$ et $t\mapsto\frac{1}{3}t$ quand $p=1$. Ainsi :

$$\varphi: t\mapsto\begin{cases}e^{-\frac{3t}{2}}\left[\lambda\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+\mu\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right]+\frac{1}{p^3-1}e^{(p-1)t}+\nu & \text{quand } p\neq 1\\ e^{-\frac{3t}{2}}\left[\lambda\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+\mu\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right]+\frac{1}{3}t+\nu & \text{quand } p=1\end{cases}$$

avec $(\lambda,\mu,\nu)\in\mathbb{R}^3$.

Et comme $f(t)=e^t\varphi(t)$, les solutions du problème sont les fonctions :

$$\boxed{f: t\mapsto \lambda e^{-\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+\mu e^{-\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+\nu e^t+\begin{cases}\dfrac{1}{p^3-1}e^{pt} & \text{si } p\neq 0\\ \dfrac{1}{3}te^t & \text{si } p=0\end{cases} \quad \text{avec } (\lambda,\mu,\nu)\in\mathbb{R}^3}$$

**II)** Comme les racines du polynôme caractéristique sont les valeurs propres de la matrice $M$ et tout polynôme caractéristique est unitaire, on veut prouver que pour tout polynôme unitaire, non constant $P=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$ de $\mathbb{C}[X]$ (avec $a_n=1$) et toute racine $\lambda$ de $P$, on a $|\lambda|\le\sum_{k=0}^{n}|a_k|$.

Soit donc $P=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k\in\mathbb{C}[X]$ non constant tel que $a_n=1$ et $\lambda$ une racine complexe de $P$ (le théorème fondamental de l' algèbre assure l'existence d'une racine).

On a alors :

$$P(\lambda)=\sum_{k=0}^{n}a_k\lambda^k=\lambda^n+\sum_{k=0}^{n-1}a_k\lambda^k=0 \quad\Leftrightarrow\quad \lambda^n=-\sum_{k=0}^{n-1}a_k\lambda^k .$$

Donc :

$$|\lambda|^n=\left|\sum_{k=0}^{n-1}a_k\lambda^k\right|\le\sum_{k=0}^{n-1}|a_k||\lambda|^k .$$

Considérons alors deux cas.

- Si $|\lambda|\le 1$, alors :

$$|\lambda|\le 1+|\lambda|^n\le 1+\sum_{k=0}^{n-1}|a_k||\lambda|^k\le 1+\sum_{k=0}^{n-1}|a_k|=\sum_{k=0}^{n}|a_k| .$$

- Si $|\lambda|\ge 1$, alors $\lambda\neq 0$, $\dfrac{1}{|\lambda|}\le 1$ et :

$$|\lambda|=\frac{|\lambda|^n}{|\lambda|^{n-1}}\le\sum_{k=0}^{n-1}|a_k||\lambda|^k=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{|a_k|}{|\lambda|^{n-1-k}}\le\sum_{k=0}^{n-1}|a_k|\le 1+\sum_{k=0}^{n-1}|a_k|=\sum_{k=0}^{n}|a_k| .$$

Dans, tous les cas, on a $|\lambda|\le\sum_{k=0}^{n}|a_k|$.

Ainsi, pour toute $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, si $P=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k=\chi_M$, on a pour tout $\lambda\in Sp(M)$ :

$$\boxed{|\lambda|\le\sum_{k=0}^{n}|a_k|}$$