Préparation aux oraux : Corrigés des planches Mines/Ponts

Série 1

Planche n° 1

Exercice I

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{n^\alpha} x(1-x)^\alpha$.

- Si $\alpha < 0$, f_n n'est pas définie, ni même prolongeable par continuité en 1 (car $\lim\limits_{x \to 1^-} f_n(x) = +\infty$).

  Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \left]0;1\right[$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = +\infty$ (car $x(1-x)^\alpha > 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n^{-\alpha} = +\infty$) donc la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas simplement. Il n'est bien entendu pas question alors de la convergence de $\sum f_n$.
- Si $\alpha = 0$, on a $f_n : x \mapsto x$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante : elle converge uniformément vers $x \mapsto x$ sur $[0;1]$. Par contre, la série $\sum f_n$ diverge grossièrement.
- Si $\alpha > 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est définie sur $[0;1]$ et pour tout $x \in [0;1]$, $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$ donc la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction nulle.

  De plus, $f_1 : x \mapsto x(1-x)^\alpha$ est dérivable sur $\left[0;1\right[$ en tant que produit de telles fonctions et pour tout $x \in \left[0;1\right[$, $f_1'(x) = (1-x)^\alpha - \alpha x(1-x)^{\alpha-1} = \big(1-(\alpha+1)x\big)(1-x)^{\alpha-1}$, donc f_1 est croissante sur $\left[0;\dfrac{1}{\alpha+1}\right]$ de 0 à $f_1\left(\dfrac{1}{\alpha+1}\right) = \dfrac{1}{\alpha+1}\left(\dfrac{\alpha}{\alpha+1}\right)^\alpha > 0$ et décroissante sur $\left[\dfrac{1}{\alpha+1};1\right]$ de $f_1\left(\dfrac{1}{\alpha+1}\right)$ à 0.

  Ainsi, $\sup\limits_{[0;1]} |f_n| = \max\limits_{[0;1]} |f_n| = \dfrac{1}{n^\alpha} \max\limits_{[0;1]} |f_1| = \dfrac{1}{n^\alpha} f_1\left(\dfrac{1}{\alpha+1}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, donc, sur $[0;1]$, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction nulle.

  Enfin, si $0 < \alpha \leq 1$, la série $\sum f_n(x) = \sum \dfrac{f_1(x)}{n^\alpha}$ diverge pour tout $x \in \left]0;1\right[$ (car $f_1(x) \neq 0$) et si $\alpha > 1$, alors $\sum \sup\limits_{[0;1]} |f_n| = \sum \dfrac{1}{n^\alpha} f_1\left(\dfrac{1}{\alpha+1}\right)$ converge par comparaison à une série de Riemann convergente. Donc, la série $\sum f_n$ diverge normalement, donc uniformément.

Finalement :

- Si $\alpha < 0$, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas simplement et la série $\sum f_n$ diverge.
- Si $\alpha = 0$, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers $x \mapsto x$ sur $[0;1]$.
  La série $\sum f_n$ diverge grossièrement.
- Si $\alpha > 0$, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction nulle.
  Si $0 < \alpha \leq 1$, la série $\sum f_n$ diverge et si $\alpha > 1$, la série $\sum f_n$ diverge normalement.

Exercice II

On note $K=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ et $I=\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ avec pour tout $n\in\mathbb{N}$, $K_n=\ker(f^n)$ et $I_n=\operatorname{Im}(f^n)$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$:

- $\operatorname{Im}(f^{n+1})=f^{n+1}(E)=f^n\left(f(E)\right)=f^n\left(\operatorname{Im} f\right)\subset f^n(E)=\operatorname{Im}(f^n)$, soit $\underline{I_{n+1}\subset I_n}$;
- pour tout $x\in\ker(f^n)$, $f^n(x)=0_E$ donc $f^{n+1}(x)=f\left(f^n(x)\right)=f(0_E)=0_E$ et $x\in\ker(f^{n+1})$; ainsi, $\underline{K_n\subset K_{n+1}}$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0_E\in K_n$ et $0_E\in I_n$, donc $0_E\in K$ et $0_E\in I$.

Soient $x,x'\in E$ et λ un scalaire.

- Si $x,x'\in K$, il existe $(n,n')\in\mathbb{N}^2$ tel que $x\in K_n$ et $x'\in K_{n'}$. Quitte à intervertir x et x', on peut supposer que $n\le n'$ et dans ce cas, $K_n\subset K_{n'}$ et $x\in K_{n'}$. Comme $K_{n'}$ est un sous-espace vectoriel de *E*, $x+\lambda x'\in K_{n'}\subset K$, donc *K* est stable par combinaison linéaire.
- Si $x,x'\in I$, alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x,x'\in I_n$ donc $x+\lambda x'\in I_n$ car I_n est un sous-espace vectoriel de *E*. Ainsi, $x+\lambda x'\in I_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, donc $x+\lambda x'\in I$ et *I* est stable par combinaison linéaire.

Finalement, *I* et *K* sont non vides et stables par combinaison linéaire, donc :

$$\boxed{I \text{ et } K \text{ sont de sous-espaces vectoriels de } E.}$$

On a vu plus haut que la suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion. Alors, la suite $\left(\dim K_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers croissante et majorée par $\dim E$, donc stationnaire : il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\dim K_{N+n}=\dim K_N$ donc $K_{N+n}=K_N$ (car $K_N\subset K_{N+n}$).

Par le théorème du rang, on a alors $\dim I_{N+n}=\dim E-\dim K_{N+n}=\dim E-\dim K_N=\dim I_N$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, donc $I_{N+n}=I_N$ (car $I_{N+n}\subset I_N$).

De plus, si pour $k\in\mathbb{N}$, $I_{k+1}=I_k$, alors pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$I_{k+n+1}=\operatorname{Im}(f^{k+n+1})=f^{k+n+1}(E)=f^n\left(f^{k+1}(E)\right)=f^n\left(\operatorname{Im} f^{k+1}\right)=f^n\left(\operatorname{Im} f^k\right)=\operatorname{Im} f^{n+k}=I_{k+n}.$$

La suite $(I_{k+n})_{n\in\mathbb{N}}$ est donc constante.

Ceci montre que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante (pour l'inclusion) jusqu'au rang *N* (si $N\ge 1$) et constante à partir du rang *N*. Alors : $I=I_N$.

Immédiatement, on obtient que la suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante (pour l'inclusion) jusqu'au rang *N* (si $N\ge 1$) et constante à partir du rang *N* et : $K=K_N$.

Enfin, on a alors :

$$0=\dim K_0<\dim K_1<\dim K_2<\dots<\dim K_N\le\dim E.$$

Les nombres $\dim K_1,\dots,\dim K_N$ sont donc *N* entiers distincts entre 1 et $\dim E$, donc $N\le\dim E$.

Finalement :

$$\boxed{\text{Il existe } N \in [\![0, \dim E]\!] \text{ tel que pour tout } n \in \mathbb{N},\ K_{N+n} = K_N .}$$

D’après ce qui précède, on a $I = I_N$ et $K = K_N$.

D’après le théorème du rang :

$$\dim I + \dim K = \dim I_N + \dim K_N = \dim\left(\mathrm{Im}(f^N)\right) + \dim\left(\ker(f^N)\right) = \dim E .$$

Soit maintenant $x \in I_N \cap K_N$.

Comme $x \in K_N = \ker(f^N)$, on a $f^N(x) = 0_E$.

Or, $x \in I_N = \mathrm{Im}(f^N)$, donc il existe $z \in E$ tel que $x = f^N(z)$.

Alors, $f^N(x) = f^{2N}(z) = 0_E$ et donc $z \in \ker(f^{2N})$. Mais, comme $2N \geq N$, $\ker(f^{2N}) = \ker(f^N)$, donc $z \in \ker(f^N)$, soit :

$$x = f^N(z) = 0_E .$$

Ainsi :

$$I_N \cap K_N = \{0_E\} .$$

Finalement, $\dim I + \dim K = \dim E$ et $I \cap K = I_N \cap K_N = \{0_E\}$, donc :

$$\boxed{I \oplus K = E}$$

Planche n° 2

Exercice I

Soit $X = {}^t\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$MX = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ \quad \vdots \\ x_{n-1} + x_n = 0 \\ x_1 + x_n = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_{k+1} = -\, x_k & \forall\, k \in [\![1, n-1]\!] \\ x_n = -\, x_1 \end{cases}$$

La suite $(x_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ est géométrique de raison -1, donc :

$$MX = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_k = (-1)^{k-1} x_1 & \forall\, k \in [\![1, n-1]\!] \\ x_n = -\, x_1 \end{cases}$$

Ceci donne, entre autres, $x_n = (-1)^{n-1} x_1 = -\, x_1$, d'où $(-1)^n x_1 = x_1$. Il faut donc distinguer deux cas.

- Si n est impair, alors $-x_1 = x_1$ et $MX = 0$ équivaut à $x_k = 0$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Ainsi, $\ker M = \{0\}$, M est inversible et $rg\,(M) = n$.
- Si n est pair, alors $MX = 0$ équivaut à $x_k = (-1)^{k-1} x_1$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Ainsi, $\ker M = \operatorname{Vect}(X_0)$ avec $X_0 = {}^t\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Donc, $\dim(\ker M) = 1$ et avec le théorème du rang on obtient $rg\,(M) = n - 1$.

  Si on note $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ (identifié à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$), on a :

  $$X_0 = e_1 - e_2 + e_3 - \ldots + e_{n-1} - e_n .$$

  Les colonnes de M sauf la première forment une famille libre de $n-1$ vecteurs, donc une base de $\operatorname{Im} M$ et ainsi :

  $$\operatorname{Im} M = \operatorname{Vect}(e_1 + e_2, e_2 + e_3, \ldots, e_{n-1} + e_n).$$

Finalement :

- Si n est impair, alors $rg\,(M) = n$, $\ker M = \{0\}$ et $\operatorname{Im} M = \mathbb{R}^n$.
- Si n est pair, alors $rg\,(M) = n - 1$, $\ker M = \operatorname{Vect}\left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} e_k \right)$ et $\operatorname{Im} M = \operatorname{Vect}(e_1 + e_2, e_2 + e_3, \ldots, e_{n-1} + e_n)$.

Exercice II

Soit $h:(x,t)\mapsto \dfrac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}$, définie sur $\mathbb{R}\times[0,1]$.

- Pour tout $x\in\mathbb{R}$, la fonction $t\mapsto h(x,t)$ est continue sur le segment $[0,1]$ en tant que quotient de telles fonctions ; elle est donc continue par morceaux et intégrable sur $[0,1]$.
- Pour tout $t\in[0,1]$, $x\mapsto h(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ car proportionnelle à une fonction exponentielle.
- Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $t\mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)=-e^{-x(1+t^2)}$ est continue par morceaux sur $[0,1]$ composée de fonctions continues par morceaux.
- Pour tout $a\in\mathbb{R}_-$ et tout $(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,1]$, on a :

$$\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right|=e^{-x(1+t^2)}\le e^{2|a|}.$$

  Et la fonction constante $t\mapsto e^{2|a|}$ est positive, continue par morceaux et intégrable sur $[0,1]$.

Alors, $f:x\mapsto \int_0^1 \dfrac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}dt$ est de classe C^1 sur $[a;+\infty[$ (de dérivée $x\mapsto -\int_0^1 e^{-x(1+t^2)}dt$). Ceci étant vrai pour tout $a\in\mathbb{R}_-$ et comme $\bigcup_{a\in\mathbb{R}_-}[a;+\infty[=\mathbb{R}$, on peut conclure que :

$$\boxed{\text{La fonction } f:x\mapsto \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}dt \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}\text{, de dérivée } x\mapsto -\int_0^1 e^{-x(1+t^2)}dt.}$$

La fonction $g:x\mapsto f(x^2)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions de classe C^1 avec pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$g'(x)=2xf'(x^2)=-2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}dt=-2e^{-x^2}\int_0^1 e^{-(xt)^2}x\,dt.$$

La fonction $t\mapsto xt$ est de classe C^1 est bijective de $[0,1]$ dans $[0,x]$ ou $[x,0]$, et avec le changement de variable $u=xt$, on obtient pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\boxed{g'(x)=-2e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}du}$$

Posons $G(x)=g(x)+\left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)^2$. La fonction G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de telles fonctions et pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$G'(x)=g'(x)+2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt=0.$$

Donc G est constante sur $\mathbb{R}$.

Or, $G(0)=g(0)=f(0)=\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt=\left[\arctan t\right]_0^1=\frac{\pi}{4}$, donc pour tout $x\in\mathbb{R}$, $G(x)=\frac{\pi}{4}$ soit :

$$\boxed{g(x)+\left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2=\frac{\pi}{4}}$$

Comme $e^{-t^2}\underset{t\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $\int^{+\infty}\frac{dt}{t^2}$ converge, $\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\,dt$ converge et est positive car la fonction $t\mapsto e^{-t^2}$ est positive sur $\mathbb{R}_+$.

Par ailleurs, pour tout $x\in\mathbb{R}$ et tout $t\in[0,1]$, on a :

$$0\leq\frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}=e^{-x^2}\,\frac{e^{-x^2t^2}}{1+t^2}\leq e^{-x^2}\,\frac{1}{1+t^2}.$$

Donc, pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$0\leq g(x)=\int_0^1\frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt\leq e^{-x^2}\int_0^1\frac{1}{1+t^2}\,dt=\frac{\pi}{4}e^{-x^2}.$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\pi}{4}e^{-x^2}=0$, le théorème des gendarmes permet de conclure que :

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=0.$$

Alors :

$$\left(\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\,dt\right)^2=\lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{4}-g(x)\right)=\frac{\pi}{4}.$$

Et donc :

$$\boxed{\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

Planche n° 3

Exercice I

Soit $x \in D = \left]-1,+\infty\right[$.

La fonction $t \mapsto \dfrac{t^x \ln t}{t-1}$ est continue sur $\left]0,1\right[$ en tant que quotient de telles fonctions.

- En 0 : $\dfrac{t^x \ln t}{t-1} \underset{t\to 0}{\sim} -t^x \ln t$.

  Par croissances comparées (avec $\dfrac{x+1}{2} > 0$), on a $\lim\limits_{t\to 0} t^{\frac{x+1}{2}} \ln t = 0$, donc :
  $$-t^x \ln t = -t^{\frac{x-1}{2}} t^{\frac{x+1}{2}} \ln t = \underset{t\to 0}{o}\left(t^{\frac{x-1}{2}}\right).$$
  Comme $\dfrac{x-1}{2} > -1$, $t \mapsto t^{\frac{x-1}{2}}$ est intégrable en 0, donc $t \mapsto \dfrac{t^x \ln t}{t-1}$ l'est aussi.

- En 1 : $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{t^x \ln t}{t-1} = 1$, donc $t \mapsto \dfrac{t^x \ln t}{t-1}$ est prolongeable par continuité, donc intégrable en 1.

Finalement :

$$\boxed{I(x) = \int_0^1 \frac{t^x \ln t}{t-1}\,dt \text{ existe pour tout } x \in D = \left]-1,+\infty\right[.}$$

- Pour tout $t \in \left]0,1\right[$, la fonction $x \mapsto \dfrac{t^x \ln t}{t-1} = \dfrac{\ln t}{t-1} e^{x \ln t}$ est de classe C^∞ sur D, car elle est proportionnelle à une fonction exponentielle, de dérivée $k^{\text{ième}}$ (pour tout $k \in \mathbb{N}$) :
  $$x \mapsto \frac{\ln t}{t-1} (\ln t)^k e^{x \ln t} = \frac{t^x (\ln t)^{k+1}}{t-1}.$$

- Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in D = \left]-1,+\infty\right[$, la fonction $t \mapsto \dfrac{t^x (\ln t)^{k+1}}{t-1}$ est continue, donc continue par morceaux, sur $\left]0,1\right[$ en tant que quotient de telles fonctions.

- Pour tout $a \in \left]-1,+\infty\right[$, tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \left[a,+\infty\right[$, , on a :
  $$\left|\frac{t^x (\ln t)^{k+1}}{t-1}\right| = \frac{e^{x \ln t} |\ln t|^{k+1}}{1-t} \leq \frac{e^{a \ln t} |\ln t|^{k+1}}{1-t} = \frac{t^a |\ln t|^{k+1}}{1-t} = \varphi(t).$$
  La fonction φ est continue et positive sur $\left]0,1\right[$, $\lim\limits_{1} \varphi = 0$ quand $k \in \mathbb{N}^*$ et $\lim\limits_{1} \varphi = 1$ quand $k = 0$, donc φ est intégrable en 1 et comme $\lim\limits_{t\to 0} t^{\frac{a+1}{2}} |\ln t|^{k+1} = 0$ par croissances comparées, on a comme plus haut, $\dfrac{t^a |\ln t|^{k+1}}{1-t} = \underset{t\to 0}{o}\left(t^{\frac{a-1}{2}}\right)$ avec $t \mapsto t^{\frac{a-1}{2}}$ est intégrable en 0, donc φ l'est aussi.

Nous avons donc toutes les hypothèses pour conclure que I est de classe C^{∞} sur $[a,+\infty[$, avec pour tout $k\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[a,+\infty[$, $I^{(k)}(x)=\int_0^1 \frac{t^x(\ln t)^{k+1}}{t-1}dt$.

Ceci étant vrai pour tout $a\in\,]-1,+\infty[$:

$$\boxed{\text{La fonction } I \text{ est de classe } C^{\infty} \text{ sur } D\text{, avec pour tout } k\in\mathbb{N}\text{, } I^{(k)} : x\mapsto \int_0^1 \frac{t^x(\ln t)^{k+1}}{t-1}dt.}$$

Soit $x\in D$ fixé.

Pour tout $t\in\,]0,1[$, $\frac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{+\infty}t^n$, donc :

$$\frac{t^x\ln t}{t-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}t^{n+x}\ln t\,.$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $t\mapsto t^{n+x}\ln t$ est continue par morceaux sur $]0,1[$ en tant que produit de telles fonctions.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction $t\mapsto \frac{1}{n+x+1}t^{n+x+1}$ et $t\mapsto \ln t$ est de classe C^1 sur $]0,1[$.

On peut donc procéder à une intégration par parties sur tout $[a,b]\subset\,]0,1[$, qui s'écrit :

$$\begin{aligned}\int_a^b t^{n+x}\ln t\,dt &= \left[\frac{1}{n+x+1}t^{n+x+1}\ln t\right]_a^b-\int_a^b\frac{1}{n+x+1}t^{n+x+1}\frac{1}{t}dt\\ &=\frac{1}{n+x+1}\left[t^{n+x+1}\ln t\right]_a^b-\frac{1}{n+x+1}\left[\frac{1}{n+x+1}t^{n+x+1}\right]_a^b\\ &=\frac{1}{n+x+1}\left[b^{n+x+1}\ln b-a^{n+x+1}\ln a\right]-\frac{1}{(n+x+1)^2}\left[b^{n+x+1}-a^{n+x+1}\right]\end{aligned}$$

Or, comme $x>-1$ et $n\geq 0$, on a $n+x+1>0$, d'où :

$$\lim_{a\to 0}a^{n+x+1}\ln a=\lim_{a\to 0}a^{n+x+1}=\lim_{b\to 1}b^{n+x+1}\ln b=0$$
$$\lim_{b\to 1}b^{n+x+1}=1$$

Donc, $\int_0^1 t^{n+x}\ln t\,dt$ converge avec :

$$\int_0^1 t^{n+x}\ln t\,dt=-\frac{1}{(n+x+1)^2}\,.$$

Comme pour tous $t\in\,]0,1[$ et $n\in\mathbb{N}$, $t^{n+x}\ln t<0$, $\int_0^1\left|t^{n+x}\ln t\right|dt$ converge avec :

$$\int_0^1\left|t^{n+x}\ln t\right|dt=-\int_0^1 t^{n+x}\ln t\,dt=\frac{1}{(n+x+1)^2}\,.$$

Or, $\dfrac{1}{(n+x+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$ et la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge, donc $\sum \int_0^1 \left|t^{n+x} \ln t\right| dt$ converge.

Nous avons donc toutes les hypothèses pour conclure que la série $\sum \int_0^1 t^{n+x} \ln t \, dt$ converge et :

$$\int_0^1 \frac{t^x \ln t}{t-1} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 t^{n+x} \ln t \, dt .$$

Ainsi, pour tout $x \in D$:

$$\boxed{I(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+x+1)^2}}$$

Exercice II

Comme *f* laisse stable toute droite de *E*, on a $f\big(\mathrm{Vect}(x)\big) \subset \mathrm{Vect}(x)$ pour tout vecteur *x* non nul de *E*. Ceci implique que $f(x) \in \mathrm{Vect}(x)$ et ceci reste vrai même si *x* est nul. Ainsi :

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in E \text{, il existe } \lambda_x \in \mathbb{K} \text{ tel que } f(x) = \lambda_x x .}$$

Montrer que le coefficient λ_x est indépendant du vecteur *x* revient à montrer que pour tous vecteurs *x* et *y* de *E*, $\lambda_x = \lambda_y$. Soit donc $(x, y) \in E^2$. Il existe alors trois scalaires λ_x, λ_y et λ_{x+y} tels que :

$$f(x) = \lambda_x x, \quad f(y) = \lambda_y y \quad \text{et} \quad f(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y) .$$

Comme on peut choisir le λ_x que l'on veut (en particulier λ_y) quand *x* est nul, on peut supposer que *x* n'est pas nul. Considérons alors deux cas.

- Si la famille (x, y) est libre, on a :

  $$f(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y) = \lambda_{x+y}x + \lambda_{x+y}y = f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y .$$

  Donc $\lambda_{x+y}x + \lambda_{x+y}y = \lambda_x x + \lambda_y y$ et comme (x, y) est libre, on obtient $\lambda_{x+y} = \lambda_x$ et $\lambda_{x+y} = \lambda_y$, d'où $\lambda_x = \lambda_y$.

- Si la famille (x, y) est liée, il existe un scalaire *k* tel que $y = kx$ (avec $x \neq 0$). Alors :

  $$f(y) = \lambda_y y = f(kx) = k f(x) = k\lambda_x x = \lambda_x k x = \lambda_x y .$$

  Ainsi, $\lambda_y y = \lambda_x y$, et $\lambda_y = \lambda_x$ (on prendre cette égalité même quand *y* est nul).

Finalement, dans tous les cas, $\lambda_y = \lambda_x$ et donc :

$$\boxed{\text{Le coefficient } \lambda_x \text{ est indépendant du vecteur } x.}$$

Remarquons que ce résultat se reformule en :

$$\boxed{\text{Si } f \text{ laisse stable toute droite de } E\text{, alors } f \text{ est une homothétie.}}$$

On veut maintenant prouver que pour $n \geq 2$, si f laisse stable tout sous-espace de dimension k avec $k \in [\![1, n-1]\!]$, alors f est une homothétie.

Remarquons que si $n = 2$, alors $[\![1, n-1]\!] = \{1\}$ et on vient de prouver le résultat.

On suppose maintenant que $n \geq 3$ et on procède par récurrence finie sur k.

- *Initialisation* :

  On vient de prouver que la propriété est vraie au rang $k = 1$ (les sous-espaces de dimension 1 sont les droites).

- *Hérédité* :

  Supposons la propriété vraie à un rang $k \in [\![1, n-2]\!]$ (comme $n \geq 3$, on a bien $n-2 \geq 1$).

  Supposons que f laisse stable tout sous-espace de dimension $k+1 \in [\![1, n-1]\!]$.

  Soit F un sous-espace de E de dimension k et $(e_1, \dots, e_k)$ une base de F. Comme $k \leq n-2$, il existe deux vecteurs e_{k+1} et e_{k+2} tels que $rg(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, e_{k+2}) = k+2$, autrement dit la famille $(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, e_{k+2})$ est libre. Posons alors :

  $$G_1 = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}) \text{ et } G_2 = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k, e_{k+2}).$$

  Comme la famille $(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, e_{k+2})$ est libre, les familles $(e_1, \dots, e_k, e_{k+1})$ et $(e_1, \dots, e_k, e_{k+2})$ le sont aussi, et donc :

  $$\dim G_1 = \dim G_2 = k+1.$$

  Par hypothèse, G_1 et G_2 sont stables par f, soit $f(G_1) \subset G_1$ et $f(G_2) \subset G_2$. Alors :

  $$f(G_1 \cap G_2) \subset f(G_1) \cap f(G_2) \subset G_1 \cap G_2.$$

  Or :

  $$G_1 \cap G_2 = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}) \cap \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k, e_{k+2}) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k) = F.$$

  Et donc :

  $$f(F) \subset F.$$

  Comme F était un sous-espace de E de dimension k quelconque, nous venons de prouver que f laisse stable tout sous-espace de dimension k. Par hypothèse de récurrence, f est alors une homothétie et la propriété est vraie au rang $k+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, autrement dit, pour $k \in [\![1, n-1]\!]$ donné :

Si f laisse stable tout sous-espace de dimension k, alors f est une homothétie.

Planche n° 4

Exercice I

Remarquons que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction $x\mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...\sqrt{2+2x}}}}}$ est continue, positive et décroissante sur $[0,1]$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc bien définie.

Soit $x\in[0,1]$. Posons pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$v_n=\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...\sqrt{2+2x}}}}}.$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $0<v_n\le\dfrac{1}{\sqrt2}<1$, donc $v_n\in\left]0,\dfrac{1}{\sqrt2}\right]\subset[0,1]$ et :

$$v_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{2+\dfrac{1}{v_n}}}=\sqrt{\frac{v_n}{2v_n+1}}=f(v_n).$$

avec $f:t\mapsto\sqrt{\dfrac{t}{2t+1}}$, définie sur $[0,1]$.

Pour tout $t\in[0,1]$, $f(t)=\sqrt{\dfrac{t}{2t+1}}=\sqrt{\dfrac12\left(1-\dfrac{1}{2t+1}\right)}$ et la fonction $t\mapsto\dfrac12\left(1-\dfrac{1}{2t+1}\right)$ est continue, strictement croissante et positive sur $[0,1]$, donc *f* est continue et strictement croissante sur $[0,1]$.

On a $v_1=\dfrac{1}{\sqrt{2+2x}}$ et :

$$v_2^2-v_1^2=f(v_1)^2-v_1^2=\frac{1}{2+\sqrt{2+2x}}-\frac{1}{2+2x}=\frac{2x-\sqrt{2+2x}}{\left(2+\sqrt{2+2x}\right)(2+2x)}$$

$$=\frac{(2x)^2-(2x+2)}{\left(2x+\sqrt{2+2x}\right)\left(2+\sqrt{2+2x}\right)(2+2x)}=\frac{2(2x+1)(x-1)}{\left(2x+\sqrt{2+2x}\right)\left(2+\sqrt{2+2x}\right)(2+2x)}$$

Donc, $v_2^2\le v_1^2$ et comme $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive, on a $v_2\le v_1$.

De plus, si $v_{n+1}\le v_n$, alors $v_{n+2}=f(v_{n+1})\le f(v_n)=v_{n+1}$ (car *f* est croissante).

Ceci prouve par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $v_{n+1}\le v_n$ et donc que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. Comme $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée ($v_n\in\left]0,\dfrac{1}{\sqrt2}\right]$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$), elle converge vers une limite $\ell\in\left[0,\dfrac{1}{\sqrt2}\right]$ et comme *f* est continue sur $\left[0,\dfrac{1}{\sqrt2}\right]$, on a $f(\ell)=\ell$.

Ceci donne :

$$\sqrt{\frac{\ell}{2\ell+1}}=\ell \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\ell}{2\ell+1}=\ell^2 \quad\Leftrightarrow\quad \ell^2(2\ell+1)-\ell=0 \quad\Leftrightarrow\quad \ell(2\ell^2+\ell-1)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \ell(2\ell-1)(\ell+1)=0.$$

Comme $\ell+1\neq 0$, on obtient $\ell=0$ ou $\ell=\frac{1}{2}$.

Remarquons que :

$$v_1<\frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{\sqrt{2+2x}}<\frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{2+2x}>2 \quad\Leftrightarrow\quad 2+2x>4 \quad\Leftrightarrow\quad x>1.$$

Or, $x\in[0,1]$, donc $v_1\geq\frac{1}{2}$ et si $v_n\geq\frac{1}{2}$, alors $v_{n+1}=f(v_n)\geq f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$ (car *f* est croissante).

Ceci prouve par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $v_n\geq\frac{1}{2}$ et donc que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne peut converger vers 0. Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n=\frac{1}{2}.$$

Nous venons de prouver que la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ avec $g_n : x\mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...\sqrt{2+2x}}}}}$ (où le symbole racine carrée apparait *n* fois) converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction constante $x\mapsto\frac{1}{2}$.

On a vu aussi que pour tout $x\in[0,1]$, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $v_n\in\left]\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$. Or, *f* est dérivable sur ce segment comme composée de fonctions dérivables, avec pour tout $t\in\left[\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$:

$$0<f'(t)=\frac{1}{2(2t+1)^{\frac{3}{2}}\sqrt{t}}\leq\frac{1}{2(2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{4}.$$

Alors, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, *f* est dérivable sur $\left[\frac{1}{2},v_n\right]$, donc d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$\left|\frac{f(v_n)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{v_n-\frac{1}{2}}\right|=\left|\frac{v_{n+1}-\frac{1}{2}}{v_n-\frac{1}{2}}\right|\leq\frac{1}{4}.$$

Alors, pour $n \geq 2$:

$$\left|\frac{v_n - \frac{1}{2}}{v_1 - \frac{1}{2}}\right| = \prod_{k=1}^{n-1}\left|\frac{v_{n+1} - \frac{1}{2}}{v_n - \frac{1}{2}}\right| \leq \prod_{k=1}^{n-1}\frac{1}{4} = \frac{1}{4^{n-1}}.$$

Cette inégalité est une égalité pour $n = 1$.

Finalement, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left|g_n(x) - \frac{1}{2}\right| = \left|v_n - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{4^{n-1}}\left|v_1 - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{4^{n-1}}\left|\frac{1}{\sqrt{2+2x}} - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{4^{n-1}}\left(\frac{1}{\sqrt{2+2x}} - \frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{4^{n-1}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\right).$$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{4^{n-1}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\right) = 0$, la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers $x \mapsto \frac{1}{2}$ et donc :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \int_0^1 g_n(x)\,dx = \int_0^1 \left(\lim_{n \to +\infty} g_n(x)\right)dx = \int_0^1 \frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{2}.$$

Soit :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{2}}$$

Exercice II

Remarquons déjà que les homothéties commutent avec tous les endomorphismes de *E*, donc avec tous les isomorphismes de *E*.

Soit maintenant $u \in \mathcal{L}(E)$ qui commute avec tous les isomorphismes de *E*.

Soit *x* un vecteur non nul de *E* et σ_x une symétrie par rapport à la droite $\mathrm{Vect}(x)$ (parallèlement à un supplémentaire de cette droite). On alors, $\sigma_x(x) = x$ et comme les symétries sont des isomorphismes, u et σ_x commutent, donc :

$$\sigma_x\left(u(x)\right) = \sigma_x \circ u(x) = u \circ \sigma_x(x) = u\left(\sigma_x(x)\right) = u(x).$$

Ainsi, $u(x) \in \ker(\sigma_x - id_E) = \mathrm{Vect}(x)$, donc pour tout $x \in E$ (même le vecteur nul), $u(x)$ est colinéaire à *x*. D'après la planche précédente, ceci implique que *u* est une homothétie.

Finalement :

Les endomorphismes de *E* qui commutent avec tous les isomorphismes de *E* sont les homothéties.

Exercice III

Appelons *N* et *X* les variables représentant le nombre de clients arrivant dans une journée et le nombre de produits vendus (en supposant une réserve infinie pour l'instant).

La variable *N* suit une loi de Poisson de paramètre $t \in \mathbb{R}_+^*$, donc $N(\Omega) = \mathbb{N}$.

En supposant une réserve infinie de produits, on a aussi $X(\Omega)=\mathbb{N}$.

Soit $n\in\mathbb{N}$. Si n clients se présentent dans la journée, chacun d'entre eux achète le produit avec une probabilité $p\in\,]0,1[$, et ceci, de manière indépendante des autres clients. Le nombre de produits achetés (donc vendus) quand n clients se présentent dans la journée suit donc une loi binomiale de paramètre p, donc pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, $P_{(N=n)}(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ et, bien entendu, quand $k>n$, $P_{(N=n)}(X=k)=0$, car un client achète au plus un produit, donc on ne peut vendre plus de produits qu'il n'y a de clients.

La famille $\big((N=n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'évènements, donc la loi des probabilités totales s'écrit, pour tout $k\in\mathbb{N}$:

$$P(X=k)=\sum_{n=0}^{+\infty}P(N=n)P_{(N=n)}(X=k)=\sum_{n=k}^{+\infty}e^{-t}\frac{t^n}{n!}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=e^{-t}\frac{p^k}{k!}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{(n-k)!}t^n(1-p)^{n-k}$$

$$=e^{-t}\frac{p^k}{k!}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}t^{n+k}(1-p)^n=e^{-t}\frac{p^kt^k}{k!}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{[t(1-p)]^n}{n!}=e^{-t}\frac{(pt)^k}{k!}e^{t(1-p)}=e^{-pt}\frac{(pt)^k}{k!}$$

Ainsi, la variable X suit une loi de Poisson de paramètre pt.

La probabilité p d'avoir rupture de stock dans la journée est celle de vendre les N produits, ce qui se traduit par :

$$p=P(X\geq N)=\sum_{k=N}^{+\infty}e^{-pt}\frac{(pt)^k}{k!}=1-e^{-pt}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{(pt)^k}{k!}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La probabilité d'avoir rupture de stock dans la journée est } 1-e^{-pt}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{(pt)^k}{k!}.}$$

Série 2

Planche n° 5

Exercice I

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto e^{-kt}\sin(xe^t)$ est continue, donc continue par morceaux, sur $\mathbb{R}_+$ en tant que produit de telles fonctions.
- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $x \mapsto e^{-kt}\sin(xe^t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, car la fonction sinus l'est.
- Pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, $\left|e^{-kt}\sin(xe^t)\right| \le e^{-kt}$ et la fonction $t \mapsto e^{-kt}$ (indépendante de x) est continue, positive et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (car $k > 0$).

Alors, $t \mapsto e^{-kt}\sin(xe^t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$\boxed{F_k : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-kt}\sin(xe^t)\,dt \text{ est définie et continue sur } \mathbb{R}.}$$

On suppose que $k \ge 2$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto e^{-kt}\sin(xe^t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $x \mapsto e^{-kt}\sin(xe^t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, car la fonction sinus l'est, de dérivée $x \mapsto e^{-kt}e^t\cos(xe^t)$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto e^{-kt}e^t\cos(xe^t)$ continue, donc continue par morceaux, sur $\mathbb{R}_+$ en tant que produit de telles fonctions.
- Pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, $\left|e^{-kt}e^t\cos(xe^t)\right| \le e^{-(k-1)t}$ et la fonction $t \mapsto e^{-(k-1)t}$ (indépendante de x) est continue, positive et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (car $k \ge 2$, donc $k-1>0$).

Alors :

$$F_k \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ de dérivée } F_k' : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-kt}e^t\cos(xe^t)\,dt.$$

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
xF_k'(x) - kF_k(x) &= x\int_0^{+\infty} e^{-kt}e^t\cos(xe^t)\,dt - k\int_0^{+\infty} e^{-kt}\sin(xe^t)\,dt \\
&= \int_0^{+\infty}\left[e^{-kt}\left(xe^t\cos(xe^t)\right) + \left(-ke^{-kt}\right)\sin(xe^t)\right]dt \\
&= \left[e^{-kt}\sin(xe^t)\right]_0^{+\infty} = 0 - e^0\sin(xe^0) = -\sin x
\end{aligned}$$

Ainsi, pour $k \ge 2$:

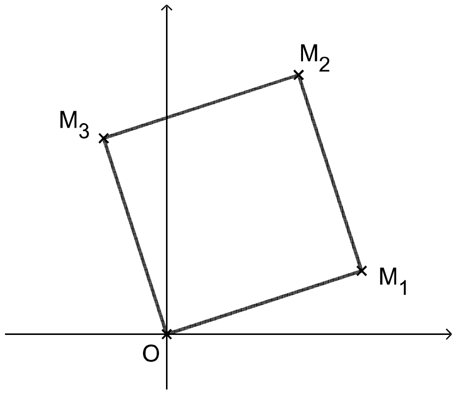
$$\boxed{F_k \text{ est solution de } xy' - ky = -\sin x.}$$

Exercice II

Soient O l'origine et M_1, M_2, M_3 les points du plan complexe d'affixes respectives z_1, z_2, z_3. Quitte à renuméroter les racines de $P = X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{C}[X]$, on peut supposer que le quadrilatère $OM_1M_2M_3$ est direct. Alors, $0, z_1, z_2, z_3$ sont les affixes des sommets d'un carré si et seulement si $OM_1M_2M_3$ est un carré (direct), c'est-à-dire si et seulement si :

- $\overrightarrow{M_3M_2} = \overrightarrow{OM_1}$, soit $z_2 - z_3 = z_1$ ($OM_1M_2M_3$ est alors un parallélogramme direct) ;
- M_3 est l'image de M_1 par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, soit $z_3 = e^{i\frac{\pi}{2}} z_1 = i z_1$.

On a le schéma :



Ainsi, $0, z_1, z_2, z_3$ soit les affixes des sommets d'un carré si et seulement si :

$$\begin{cases} z_2 - z_3 = z_1 \\ z_3 = i z_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_2 = (i+1) z_1 \\ z_3 = i z_1 \end{cases} \quad (S)$$

Par ailleurs, z_1, z_2, z_3 sont les racines de $P = X^3 + aX^2 + bX + c$ si et seulement si :

$$P = (X - z_1)(X - z_2)(X - z_3) = X^3 - (z_1 + z_2 + z_3) X^2 + (z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3) X - z_1 z_2 z_3 .$$

Ceci équivaut à :

$$\begin{cases} a = -(z_1 + z_2 + z_3) \\ b = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3 \\ c = -z_1 z_2 z_3 \end{cases}$$

Alors, si z_1, z_2, z_3 vérifient (S), on a :

$$\begin{cases} a = -(z_1 + z_2 + z_3) = -\big(1 + (i+1) + i\big) z_1 = -2(i+1) z_1 \\ b = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3 = 3i z_1^2 \\ c = -z_1 z_2 z_3 = -(i+1) i z_1^3 = (1-i) z_1^3 \end{cases}$$

Alors, $z_1 = -\frac{1}{2(i+1)}a = -\frac{1-i}{4}a$ et donc :

$$\begin{cases} b = \frac{3}{8}a^2 \\ c = \frac{1}{16}a^3 \end{cases}$$

Réciproquement, pour tout $a \in \mathbb{C}$, si $b = \frac{3}{8}a^2$ et $c = \frac{1}{16}a^3$, alors en posant :

$$\begin{cases} z_1 = -\frac{1-i}{4}a \\ z_2 = (i+1)z_1 = -\frac{1}{2}a \\ z_3 = iz_1 = -\frac{i+1}{4}a \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{cases} -(z_1 + z_2 + z_3) = a \\ z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3 = \frac{3}{8}a^2 = b \\ -z_1 z_2 z_3 = \frac{1}{16}a^3 = c \end{cases}$$

Donc, $z_1, z_2 = (i+1)z_1, z_3 = iz_1$ sont les racines de $P = X^3 + aX^2 + bX + c$ et les affixes des sommets d'un carré.

Finalement :

$$\boxed{0, z_1, z_2, z_3 \text{ sont les affixes des sommets d'un carré si et seulement si } \begin{cases} b = \frac{3}{8}a^2 \\ c = \frac{1}{16}a^3 \end{cases}}$$

Planche n° 6

Exercice I

En divisant l'équation (E) par – 2, $y''-\frac{1}{2}xy'-\frac{1}{2}y=0$, qui est une équation linéaire, homogène, normalisée, d'ordre 2. On a alors à résoudre le système :

$$\begin{cases} y''-\frac{1}{2}xy'-\frac{1}{2}y=0 \\ y(0)=\sqrt{\pi},\ \ y'(0)=0 \end{cases}$$

Ceci est un problème de Cauchy, donc :

$$\boxed{\text{Le problème posé admet une unique solution.}}$$

Cherchons une solution $f : x \mapsto \sum_{n\geq 0} a_n x^n$, développable en série entière sur un intervalle $]-R,R[$.

La fonction f est de classe C^2 sur $]-R,R[$, avec $f' : x \mapsto \sum_{n\geq 1} n\,a_n x^{n-1}$ et $f'' : x \mapsto \sum_{n\geq 2} n(n-1)\,a_n x^{n-2}$.

Alors, pour tout $x \in]-R,R[$:

$$\begin{aligned} -2f''(x)+xf'(x)+f(x) &= -2\sum_{n\geq 2} n(n-1)\,a_n x^{n-2} + x\sum_{n\geq 1} n\,a_n x^{n-1} + \sum_{n\geq 0} a_n x^n \\ &= -2\sum_{n\geq 0} (n+2)(n+1)\,a_{n+2} x^n + \sum_{n\geq 0} n\,a_n x^n + \sum_{n\geq 0} a_n x^n \\ &= \sum_{n\geq 0} \left[-2(n+2)(n+1)\,a_{n+2} + (n+1)\,a_n\right] x^n \\ &= \sum_{n\geq 0} (n+1)\left[-2(n+2)\,a_{n+2} + a_n\right] x^n \end{aligned}$$

Et comme *f* est solution de (E), on a $-2f''(x)+xf'(x)+f(x)=0$ pour tout $x \in]-R,R[$ et par unicité du développement en série entière, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(n+1)\left[-2(n+2)\,a_{n+2}+a_n\right]=0 \iff -2(n+2)\,a_{n+2}+a_n=0 \iff a_{n+2}=\frac{a_n}{2(n+2)}.$$

Si on pose pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u_p = a_{2p}$ et $v_p = a_{2p+1}$, on obtient :

$$u_{p+1} = a_{2p+2} = \frac{a_{2p}}{2(2p+2)} = \frac{1}{4(p+1)} u_p$$

$$v_{p+1} = a_{2p+3} = \frac{a_{2p+1}}{2(2p+3)} = \frac{1}{2(2p+3)} v_p$$

Remarquons qu'on a alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, $4^{p+1}(p+1)!u_{p+1} = 4^p p!u_p$, donc la suite $\left(4^p p!u_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est constante, et pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$4^p p!u_p = u_0 = a_0 \iff a_{2p} = \frac{a_0}{4^p p!}.$$

Par ailleurs, si $v_p \neq 0$, alors $v_{p+1} = \dfrac{1}{2(2p+3)} v_p \neq 0$. Ceci prouve par récurrence que si en supposant que $v_0 = a_1 \neq 0$, alors $v_p \neq 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ et dans ce cas, on peut écrire (avec un produit télescopique), pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\prod_{k=0}^{p-1} \frac{v_{k+1}}{v_k} = \prod_{k=0}^{p-1}\left(\frac{1}{2(2k+3)}\right) \Leftrightarrow \frac{v_p}{v_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^p \frac{1}{3\times 5\times \ldots \times (2p+1)}$$

$$\Leftrightarrow v_p = \left(\frac{1}{2}\right)^p \frac{2\times 4\times \ldots \times (2p)}{(2p+1)!} v_0$$

$$\Leftrightarrow v_p = \frac{p!}{(2p+1)!} v_0$$

$$\Leftrightarrow a_{2p+1} = \frac{p!}{(2p+1)!} a_1$$

Remarquons que pour tout $x \in \left]-R, R\right[$, $\left(a_n x^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (lemme d'Abel), donc les suites extraites $\left(a_{2p} x^{2p}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ et $\left(a_{2p+1} x^{2p+1}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ le sont aussi, et les séries $\sum a_{2p} x^{2p}$ et $\sum a_{2p+1} x^{2p+1}$ convergent (toujours d'après le lemme d'Abel). Alors, pour tout $x \in \left]-R, R\right[$, on peut écrire :

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n = \sum_{p\geq 0} a_{2p} x^{2p} + \sum_{p\geq 0} a_{2p+1} x^{2p+1} = \sum_{p\geq 0} \frac{1}{4^p\, p!} a_0 x^{2p} + \sum_{p\geq 0} \frac{p!}{(2p+1)!} a_1 x^{2p+1}.$$

Soit :

$$f = a_0 f_0 + a_1 f_1$$

avec $f_0 : x \mapsto \sum_{p\geq 0} \dfrac{1}{4^p\, p!} x^{2p}$ et $f_1 : x \mapsto \sum_{p\geq 0} \dfrac{p!}{(2p+1)!} x^{2p+1}$.

Si *f* vérifie les conditions initiales désirées, on a $f(0) = a_0 = \sqrt{\pi}$ et $f'(0) = a_1 = 0$. Ainsi :

$$f = \sqrt{\pi} f_0.$$

Remarquons que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_0(x) = \sum_{p\geq 0} \frac{1}{4^p\, p!} x^{2p} = \sum_{p\geq 0} \frac{1}{p!}\left(\frac{x^2}{4}\right)^p = e^{-\frac{x^2}{4}}.$$

Ainsi, f_0 est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ tout entier (on montre à l'aide de la règle de d'Alembert que c'est aussi le cas de f_1). Ainsi, l'unique solution du problème de Cauchy posé est :

$$\boxed{x \mapsto \sqrt{\pi}\, e^{\frac{x^2}{4}}}$$

Soit $f : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx - t^2}\, dt$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto e^{tx-t^2}$ est continue, donc continue par morceaux, sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

- Pour tout $t\in\mathbb{R}$, $x\mapsto e^{tx-t^2}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ (car proportionnelle à une fonction exponentielle), de dérivée première $x\mapsto te^{tx-t^2}$ et seconde $x\mapsto t^2e^{tx-t^2}$.
- Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $t\mapsto te^{tx-t^2}$ et $t\mapsto t^2e^{tx-t^2}$ sont continues, donc continues par morceaux, sur $\mathbb{R}$ en tant que produits de telles fonctions.
- Pour tout $x\in\mathbb{R}$ et tout $k\in\mathbb{N}$, on a $\left|t^ke^{tx-t^2}\right|=|t|^k e^{tx-t^2}\underset{t\to\pm\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, par croissances comparées et $\displaystyle\int_{-\infty}\frac{dt}{t^2}$ et $\displaystyle\int^{+\infty}\frac{dt}{t^2}$ convergent, donc $t\mapsto t^ke^{tx-t^2}$, et en particulier $t\mapsto e^{tx-t^2}$ et $t\mapsto te^{tx-t^2}$, sont intégrables sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout réel $a>0$ et pour tout $x\in[-a,a]$, $t^2e^{tx-t^2}\le t^2e^{|t|a-t^2}$ et $t\mapsto t^2e^{|t|a-t^2}$ continue, positive et intégrable sur $\mathbb{R}$ (d'après ce qu'on a vu ci-dessus avec $k=2$).

Ainsi :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ avec } f':x\mapsto\int_{-\infty}^{+\infty}te^{tx-t^2}dt \text{ et } f'':x\mapsto\int_{-\infty}^{+\infty}t^2e^{tx-t^2}dt.}$$

Soit $x\in\mathbb{R}$. Les fonctions $t\mapsto t$ et $t\mapsto e^{tx-t^2}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Alors, pour tout segment $[a,b]\subset\mathbb{R}$, une intégration par parties donne :

$$\int_a^b e^{tx-t^2}dt=\left[te^{tx-t^2}\right]_a^b-\int_a^b t(x-2t)e^{tx-t^2}dt=be^{bx-b^2}-ae^{ax-a^2}-x\int_a^b t\,e^{tx-t^2}dt+2\int_a^b t^2e^{tx-t^2}dt.$$

Or, $\lim\limits_{a\to-\infty}ae^{ax-a^2}=\lim\limits_{b\to+\infty}be^{bx-b^2}=0$ par croissances comparées.

Avec les expressions de $f'(x)$ et $f''(x)$ obtenues plus haut, on obtient en passant à la limite que $a\to-\infty$ et $b\to+\infty$ dans la relation ci-dessus :

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{tx-t^2}dt=-x\int_{-\infty}^{+\infty}t\,e^{tx-t^2}dt+2\int_{-\infty}^{+\infty}t^2e^{tx-t^2}dt=-x\,f'(x)+2f''(x).$$

Ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $-2f''(x)+x\,f'(x)+f(x)=0$ donc f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

De plus :

$$f(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}$$

$$f'(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}te^{-t^2}dt=\left[-\frac{1}{2}e^{-t^2}\right]_{-\infty}^{+\infty}=0$$

Donc, f vérifie le problème de Cauchy initial. Comme ce problème n'a qu'une solution, on obtient :

$$\boxed{\text{Pour tout } x\in\mathbb{R},\ \int_{-\infty}^{+\infty}e^{tx-t^2}dt=\sqrt{\pi}\,e^{\frac{x^2}{4}}.}$$

Exercice II

Comme on procède avec remise, les tirages sont indépendants.

La variable aléatoire X_1 donne le nombre de tirages nécessaires pour obtenir 1 boule blanche, autrement dit, le rang d'apparition de la première boule blanche, qui a une probabilité p d'apparaitre :

$$\boxed{\text{La variable } X_1 \text{ suit donc une loi géométrique de paramètre } p \text{ et } G_{X_1} : t \mapsto \frac{pt}{1-(1-p)t}.}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour obtenir $n+1$ boules blanches, il faut en avoir obtenu n, puis une autre. Les tirages étant indépendants, on a $X_{n+1} = X_n + X_1$ et les variables X_n et X_1 sont indépendantes (c'est l'effet sans mémoire de la loi géométrique). Alors, $G_{X_{n+1}} = G_{X_n + X_1} = G_{X_n} G_{X_1}$.

Ainsi, pour tout $t \in \left] -\frac{1}{1-p}, \frac{1}{1-p} \right[$, la suite $\left(G_{X_n}(t)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $G_{X_1}(t)$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$G_{X_n}(t) = \left[G_{X_1}(t)\right]^n.$$

Soit, pour tout $t \in \left] -\frac{1}{1-p}, \frac{1}{1-p} \right[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$G_{X_n}(t) = \left(\frac{pt}{1-(1-p)t}\right)^n.$$

Or, pour tout $h \in \left]-1,1\right[$:

$$(1-h)^{-n} = 1 + \sum_{k\geq 1} \frac{(n-1)!n(n+1)\ldots(n+k-1)}{k!} h^k = 1 + \sum_{k\geq 1} \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!} h^k = \sum_{k\geq 0} \binom{n-1+k}{k} h^k.$$

Donc, pour tout $t \in \left] -\frac{1}{1-p}, \frac{1}{1-p} \right[$:

$$G_{X_n}(t) = (pt)^n \left(1-(1-p)t\right)^{-n} = (pt)^n \sum_{k\geq 0} \binom{n-1+k}{k} (1-p)^k t^k = \sum_{k\geq 0} \binom{n-1+k}{k} p^n (1-p)^k t^{n+k}.$$

Soit, en réindexant, pour tout $t \in \left] -\frac{1}{1-p}, \frac{1}{1-p} \right[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{G_{X_n}(t) = \sum_{k\geq n} \binom{k-1}{k-n} p^n (1-p)^{k-n} t^k}$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{P(X_n = k) = \begin{cases} 0 & \text{quand } k < n \\ \binom{k-1}{k-n} p^n (1-p)^{k-n} & \text{quand } k \geq n \end{cases}}$$

Comme $\dfrac{1}{1-p} > 1$, G_{X_n} est dérivable en 1 et :

$$E(X_n) = G_{X_n}'(1) = n\,G_{X_1}'(1)\big[G_{X_1}(t)\big]^{n-1} = n\,E(X_1)\,.$$

Soit :

$$\boxed{E(X_n) = \frac{n}{p}}$$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$. On cherche $P(X_n = k)$, c'est-à-dire la probabilité d'obtenir exactement n boules blanches à l'issue de k tirages successifs.

Pour pouvoir obtenir n boules blanches, il faut réaliser au moins n tirages successifs, donc $P(X_n = k) = 0$ quand $k < n$.

On suppose que $k \geq n$.

Pour obtenir exactement n boules blanches à l'issue de k tirages, il faut avoir obtenu $n-1$ boules blanches au cours des $k-1$ premiers tirages (évènement A) et une boule blanche au $k^{\text{ième}}$ tirage (évènement B). On a $(X_n = k) = A \cap B$

Les tirages étant indépendants, le nombre de boules blanches obtenues au cours de $k-1$ tirages suit une loi binomiale de paramètres $k-1$ et p (la probabilité d'obtenir une boule blanche lors d'un tirage), donc :

$$P(A) = \binom{k-1}{(k-1)-(n-1)} p^{n-1}(1-p)^{(k-1)-(n-1)} = \binom{k-1}{k-n} p^{n-1}(1-p)^{k-n} \quad \text{et} \quad P(B) = p\,.$$

De plus, les évènements A et B sont indépendants, donc :

$$P(X_n = k) = P(A\cap B) = P(A)P_A(B) = P(A)P(B) = \binom{k-1}{k-n} p^{n-1}(1-p)^{k-n}\,p\,.$$

Et ainsi, on retrouve, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{P(X_n = k) = \begin{cases} 0 & \text{quand } k < n \\ \dbinom{k-1}{k-n} p^n (1-p)^{k-n} & \text{quand } k \geq n \end{cases}}$$

Planche n° 7

Exercice I

Tel qu'indiqué, considérons une variable aléatoire Y, indépendante de *X* et suivant la même loi. On peut : il suffit de reproduire l'expérience aléatoire conduisant à *X* de manière indépendante.

Comme *f* et *g* sont croissantes, pour tout $\omega \in \Omega$:

- si $X(\omega) \leq Y(\omega)$, alors $f\left(X(\omega)\right) \leq f\left(Y(\omega)\right)$ et $g\left(X(\omega)\right) \leq g\left(Y(\omega)\right)$, donc :

$$\begin{cases} f\left(X(\omega)\right) - f\left(Y(\omega)\right) \leq 0 \\ g\left(X(\omega)\right) - g\left(Y(\omega)\right) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \left(f\left(X(\omega)\right) - f\left(Y(\omega)\right)\right)\left(g\left(X(\omega)\right) - g\left(Y(\omega)\right)\right) \geq 0 \ ;$$

- si $X(\omega) \geq Y(\omega)$, alors $f\left(X(\omega)\right) \geq f\left(Y(\omega)\right)$ et $g\left(X(\omega)\right) \geq g\left(Y(\omega)\right)$, donc :

$$\begin{cases} f\left(X(\omega)\right) - f\left(Y(\omega)\right) \geq 0 \\ g\left(X(\omega)\right) - g\left(Y(\omega)\right) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \left(f\left(X(\omega)\right) - f\left(Y(\omega)\right)\right)\left(g\left(X(\omega)\right) - g\left(Y(\omega)\right)\right) \geq 0 .$$

Ainsi, dans tous les cas, $\left(f\left(X(\omega)\right) - f\left(Y(\omega)\right)\right)\left(g\left(X(\omega)\right) - g\left(Y(\omega)\right)\right) \geq 0$ donc :

$$\left(f(X) - f(Y)\right)\left(g(X) - g(Y)\right) \geq 0 .$$

Alors, $E\left[\left(f(X) - f(Y)\right)\left(g(X) - g(Y)\right)\right] \geq 0$ (cette espérance existe car *X*, donc *Y* qui suit la même loi, admettent un moment d'ordre 2). Or, par linéarité de l'espérance (toutes les espérances existent) :

$$\begin{aligned} E\left[\left(f(X) - f(Y)\right)\left(g(X) - g(Y)\right)\right] &= E\left[f(X)g(X) - f(X)g(Y) - f(Y)g(X) + f(Y)g(Y)\right] \\ &= E\left(f(X)g(X)\right) - E\left(f(X)g(Y)\right) - E\left(f(Y)g(X)\right) + E\left(f(Y)g(Y)\right) \end{aligned}$$

Comme *X* et *Y* sont indépendantes, $f(Y)$ et $g(X)$ le sont, ainsi que $f(X)$ et $g(Y)$, donc :

$$\begin{aligned} E\left(f(X)g(Y)\right) &= E\left(f(X)\right)E\left(g(Y)\right) \\ E\left(f(Y)g(X)\right) &= E\left(f(Y)\right)E\left(g(X)\right) \end{aligned}$$

Comme *X* et *Y* suivent la même loi, $h(X)$ et $h(Y)$ aussi, pour toute fonction *h*, $h(X)$ et $h(Y)$ ont donc la même espérance, donc (avec $h = f,\ g,\ fg$ successivement) :

$$\begin{aligned} E\left(f(X)\right) &= E\left(f(Y)\right) \\ E\left(g(X)\right) &= E\left(g(Y)\right) \\ E\left(f(Y)g(Y)\right) &= E\left(f(X)g(X)\right) \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} E\left[\left(f(X) - f(Y)\right)\left(g(X) - g(Y)\right)\right] &= 2E\left(f(X)g(X)\right) - 2E\left(f(X)\right)E\left(g(X)\right) \\ &= 2\left[E\left(f(X)g(X)\right) - E\left(f(X)\right)E\left(g(X)\right)\right] \\ &= 2\operatorname{cov}\left(f(X), g(X)\right) \end{aligned}$$

Et finalement, on a bien :

$$\boxed{\operatorname{cov}\left(f(X), g(X)\right) \geq 0}$$

Soient *f* et *g* deux fonctions croissantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $f(n)=a_n$ et $g(n)=b_n$. On peut trouver de telles fonctions car les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont croissantes : il suffit de prendre *f* et *g* affines entre n et $n+1$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, constantes sur $\left]-\infty,1\right]$ et au-delà de la limite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et/ou $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ si elle(s) existe(nt).

Soit alors $n\in\mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire telle que $X(\Omega)=[\![1,n]\!]$ et suivant une loi uniforme (autrement dit, $P(X=k)=\dfrac{1}{n}$ pour tout $k\in[\![1,n]\!]$).

D'après le théorème du transfert, on a alors :

$$E\big(f(X)\big)=\sum_{k=1}^{n}P(X=k)f(k)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k$$

$$E\big(g(X)\big)=\sum_{k=1}^{n}P(X=k)g(k)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}b_k$$

$$E\big(f(X)g(X)\big)=\sum_{k=1}^{n}P(X=k)f(k)g(k)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_kb_k$$

Donc :

$$\operatorname{cov}\big(f(X),g(X)\big)=E\big(f(X)g(X)\big)-E\big(f(X)\big)E\big(g(X)\big)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_kb_k-\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}b_k\right).$$

Et d'après ce qui précède, $\operatorname{cov}\big(f(X),g(X)\big)\geq 0$, donc :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_kb_k-\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}b_k\right)=\frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n}a_kb_k-\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k\right)\right]\geq 0\,.$$

Soit, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\geq\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k\right)}$$

<u>Exercice II</u>

Si $\alpha=0$, alors f est nulle et c'est terminé. On suppose $\alpha\neq 0$ (donc $e^{\alpha}\neq e^{-\alpha}$).

On a pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$x^2-2x\operatorname{ch}\alpha+1=x^2-(e^{\alpha}+e^{-\alpha})x+e^{\alpha}e^{-\alpha}=(x-e^{\alpha})(x-e^{-\alpha})\,.$$

Et, pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{e^{\alpha},e^{-\alpha}\}$:

$$f(x)=\frac{x\operatorname{sh}\alpha}{x^2-2x\operatorname{ch}\alpha+1}=\frac{1}{2}x\frac{2\operatorname{sh}\alpha}{(x-e^{\alpha})(x-e^{-\alpha})}=\frac{1}{2}x\left(\frac{1}{x-e^{\alpha}}-\frac{1}{x-e^{-\alpha}}\right)=\frac{1}{2}x\left(-\frac{e^{-\alpha}}{1-xe^{-\alpha}}+\frac{e^{\alpha}}{1-xe^{\alpha}}\right).$$

Comme la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1-t}$ est développable en série entière, avec un rayon de convergence de 1, les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{1-xe^{-\alpha}}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{1-xe^{\alpha}}$ sont développables en série entière, avec un rayon de convergence de e^{α} et $e^{-\alpha}$ respectivement.

Alors, *f* est développable en série entière, avec un rayon de convergence égal à $R=\min(e^{\alpha},e^{-\alpha})$ et pour tout $x \in \left]-R,R\right[$:

$$f(x)=\frac{1}{2}x\left(-\frac{e^{-\alpha}}{1-xe^{-\alpha}}+\frac{e^{\alpha}}{1-xe^{\alpha}}\right)=\frac{1}{2}\left(-xe^{-\alpha}\sum_{n=0}^{+\infty}(xe^{-\alpha})^n+xe^{\alpha}\sum_{n=0}^{+\infty}(xe^{\alpha})^n\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\sum_{n=0}^{+\infty}(xe^{-\alpha})^{n+1}+\sum_{n=0}^{+\infty}(xe^{\alpha})^{n+1}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{-e^{-(n+1)\alpha}+e^{(n+1)\alpha}}{2}x^{n+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\operatorname{sh}\big((n+1)\alpha\big)\,x^{n+1}$$

Et en réindexant, on obtient pour tout $x \in \left]-R,R\right[$, avec $R=\min(e^{\alpha},e^{-\alpha})$:

$$\boxed{f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\operatorname{sh}(n\alpha)\,x^n}$$

Planche n° 8

Exercice I

Soit $x\in\mathbb{R}$. La fonction $t\mapsto \dfrac{e^{ixt}-1}{t}e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que produit de telles fonctions.

L'intégrale $\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{ixt}-1}{t}e^{-t}dt$ est impropre en 0 et en + ∞.

- $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^{ixt}-1}{t}e^{-t}=ix$, donc $t\mapsto \dfrac{e^{ixt}-1}{t}e^{-t}$ est prolongeable par continuité, donc intégrable en 0.
- Pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$, $\left|\dfrac{e^{ixt}-1}{t}e^{-t}\right|\leq\dfrac{2}{t}e^{-t}$. Comme $\dfrac{2}{t}e^{-t}=\underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et $\int^{+\infty}\dfrac{dt}{t^2}$ converge, $t\mapsto \dfrac{e^{ixt}-1}{t}e^{-t}$ est intégrable en + ∞.

Finalement, $\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{ixt}-1}{t}e^{-t}dt$ converge quel que soit $x\in\mathbb{R}$, donc :

$$\boxed{T(x)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{ixt}-1}{t}e^{-t}dt \text{ existe pour tout } x\in\mathbb{R}.}$$

Soit $f:(x,t)\mapsto\dfrac{e^{ixt}-1}{t}e^{-t}$, définie sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$.

- Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on vient de voir que $t\mapsto f(x,t)$ est continue, donc continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$, $x\mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (car $x\mapsto e^{ixt}$ l'est).
- Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $t\mapsto\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)=ie^{ixt}e^{-t}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.
- pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$, on a $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|=e^{-t}$ et $t\mapsto e^{-t}$ est positive, continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Alors, la fonction $x\mapsto T(x)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$T'(x)=\int_0^{+\infty}ie^{ixt}e^{-t}dt=i\int_0^{+\infty}e^{(-1+ix)t}dt=i\left[\frac{1}{-1+ix}e^{(-1+ix)t}\right]_0^{+\infty}=\frac{i}{1-ix}=\frac{i(1+ix)}{1+x^2}=\frac{i-x}{1+x^2}.$$

Comme $T(0)=\int_0^{+\infty}0dt=0$, on a :

$$T(x)=\int_0^x\frac{i-u}{1+u^2}du=i\int_0^x\frac{du}{1+u^2}-\frac{1}{2}\int_0^x\frac{2u}{1+u^2}du=\left[i\arctan u-\frac{1}{2}\ln(1+u^2)\right]_0^x.$$

Soit, pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\boxed{T(x)=-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+i\arctan x}$$

Exercice II

1) On note $\|\cdot\|$ la norme canonique de $\mathbb{R}^n$.

Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, S est diagonalisable dans une base orthonormée, autrement dit, il existe $D = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $P \in O_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$S = {}^tPDP.$$

On veut :

$$S \in S_n^+(\mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, X \in \mathbb{R}^n,\ {}^tXSX \geq 0.$$

($\Rightarrow$) On suppose que $S \in S_n^+(\mathbb{R})$. Les λ_k sont alors les valeurs propres de S, donc positifs.

On peut poser $\Delta = diag\left(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}\right)$. Alors, ${}^t\Delta\Delta = \Delta^2 = D$ et, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$:

$${}^tXSX = {}^tX\,{}^tPDPX = {}^tX\,{}^tP\,{}^t\Delta\Delta PX = {}^t(\Delta PX)\Delta PX = \|\Delta PX\|^2 \geq 0.$$

($\Leftarrow$) On suppose que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, ${}^tXSX \geq 0$.

Soit $\lambda \in Sp(S)$ et $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé. On a alors :

$${}^tXSX = {}^tX(\lambda X) = \lambda\,{}^tXX = \lambda\|X\|^2.$$

Or, par hypothèse, ${}^tXSX \geq 0$ et comme $\|X\|^2 > 0$ (car $X \neq 0$), on a $\lambda \geq 0$.

Ainsi, toutes les valeurs propres de S sont positives, donc $S \in S_n^+(\mathbb{R})$

Finalement, on a bien :

$$\boxed{S \in S_n^+(\mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, X \in \mathbb{R}^n,\ {}^tXSX \geq 0}$$

2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $S = A\,{}^tA$. On a :

- ${}^tS = {}^t(A\,{}^tA) = {}^t({}^tA)\,{}^tA = A\,{}^tA = S$, donc $S \in S_n(\mathbb{R})$;
- pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, ${}^tXSX = {}^tXA\,{}^tAX = {}^t({}^tAX)({}^tAX) = \|{}^tAX\|^2 \geq 0$.

Donc d'après la question précédente :

$$\boxed{S \in S_n^+(\mathbb{R})}$$

3) Soit $S \in S_n^+(\mathbb{R})$. En reprenant les notations de la question 1, on a :

$$S = {}^tPDP = {}^tP\Delta\Delta P = {}^tP\Delta(P\,{}^tP)\Delta P = ({}^tP\Delta P)({}^tP\Delta P) = ({}^tP\Delta P)\,{}^t({}^tP\Delta P).$$

Donc, avec $A = {}^tP\Delta P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (et même $A \in S_n^+(\mathbb{R})$), on a :

$$\boxed{S = A\,{}^tA}$$

Série 3

Planche n° 9

Exercice I

On a $X(\Omega)=Y(\Omega)=\mathbb{N}^*$, donc $T(\Omega)=\mathbb{N}^*$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$(T=n)=(X=n,Y=n)\cup(X=n,Y>n)\cup(X>n,Y=n).$$

Et cette union est disjointe, donc :

$$P(T=n)=P(X=n,Y=n)+P(X=n,Y>n)+P(X>n,Y=n).$$

Comme les variables *X* et *Y* sont indépendantes :

$$P(T=n)=P(X=n)P(Y=n)+P(X=n)P(Y>n)+P(X>n)P(Y=n).$$

Comme *X* et *Y* suivent la même loi géométrique de paramètre $p\in\,]0,1[$:

$$\begin{aligned}P(X=n)&=P(Y=n)=p(1-p)^{n-1}\\ P(X>n)&=P(Y>n)=\sum_{k=n+1}^{+\infty}P(X=k)=\sum_{k=n+1}^{+\infty}p(1-p)^{k-1}\\ &=p\sum_{k=0}^{+\infty}(1-p)^{k+n}=p(1-p)^n\frac{1}{1-(1-p)}=(1-p)^n\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}P(T=n)&=\left[p(1-p)^{n-1}\right]^2+2p(1-p)^{n-1}(1-p)^n\\ &=p^2\left[(1-p)^2\right]^{n-1}+2p(1-p)\left[(1-p)^2\right]^{n-1}.\\ &=(2p-p^2)(1-2p+p^2)^{n-1}\end{aligned}$$

Et en posant $q=2p-p^2=1-(1-p)^2\in\,]0,1[$, on obtient pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $P(T=n)=q(1-q)^{n-1}$, donc :

$$\boxed{T\text{ suit une loi géométrique de paramètre } q=2p-p^2\in\,]0,1[.}$$

On a alors immédiatement (c'est du cours) :

$$\boxed{E(T)=\frac{1}{q}=\frac{1}{2p-p^2}\quad\text{et}\quad G_T(t)=\frac{qt}{1-(1-q)t}=\frac{(2p-p^2)t}{1-(1-p)^2t}.}$$

Sous réserve d'existence, le théorème du transfert donne :

$$E\left(\frac{1}{T(T+1)}\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}P(T=n)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)q(1-q)^{n-1}=\frac{q}{1-q}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{(1-q)^n}{n}-\frac{1}{1-q}\frac{(1-q)^{n+1}}{n+1}\right).$$

Or, la série entière $\sum \frac{x^n}{n}$ admet 1 pour rayon de convergence et pour tout $x \in \left]-1,1\right[$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x).$$

Comme $q \in \left]0,1\right[$, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-q)^n}{n} = -\ln q$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-q)^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(1-q)^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-q)^n}{n} - (1-q) = -\ln q - (1-q)$$

Donc, $\sum \frac{1}{n(n+1)} P(T=n)$ converge (absolument car la série est à termes positifs) et :

$$\begin{aligned} E\left(\frac{1}{T(T+1)}\right) &= \frac{q}{1-q}\left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-q)^n}{n} - \frac{1}{1-q}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-q)^{n+1}}{n+1}\right] \\ &= \frac{q}{1-q}\left[-\ln q - \frac{1}{1-q}\big(-\ln q - (1-q)\big)\right] \\ &= \frac{q}{1-q}\left[\frac{q}{1-q}\ln q + 1\right] \end{aligned}$$

Et finalement :

$$\boxed{\frac{1}{T(T+1)} \text{ admet une espérance, qui est } \frac{q}{1-q}\left(\frac{q}{1-q}\ln q + 1\right).}$$

Exercice II

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto x^n \ln x$ est de classe C^1 sur $\left]0,1\right]$ en tant que produit de telles fonctions et l'intégrale I_n est impropre en 0.

Or, $I_0 = \int_0^1 \ln x\, dx$ converge (c'est du cours) avec $I_0 = \left[x\ln x - x\right]_0^1 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\lim_{x\to 0} x^n \ln x = 0$, donc $x \mapsto x^n \ln x$ se prolonge par continuité en 0 et $I_n = \int_0^1 x^n \ln x\, dx$ converge.

Ainsi, I_n est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

De plus, la dérivée de $h : x \mapsto x^{n+1} \ln x$ est $h' : x \mapsto (n+1)x^n \ln x + x^n$, donc pour tout $a \in \left]0,1\right]$:

$$\begin{aligned} \int_a^1 h'(x)\, dx = \left[h(x)\right]_a^1 &= \left[x^{n+1}\ln x\right]_a^1 = -\,a^{n+1}\ln a \\ &= \int_a^1 \left[(n+1)x^n \ln x + x^n\right] dx = (n+1)\int_a^1 x^n \ln x\, dx + \left[\frac{1-a^{n+1}}{n+1}\right] \end{aligned}$$

En faisant tendre a vers 0, on obtient $(n+1)I_n + \frac{1}{n+1} = 0$, soit pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{I_n = -\frac{1}{(n+1)^2}}$$

On munit $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$ du produit scalaire usuel (et on note $\|\cdot\|$ la norme associée).

Notons $g : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{quand } x = 0 \\ x\ln x & \text{quand } x \in \left]0,1\right] \end{cases}$, $f_1 : x \mapsto x$ et $f_2 : x \mapsto x^2$ (définies sur $[0,1]$).

On a $g, f_1, f_2 \in E$ et pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$:

$$\int_0^1 x^2 \left|\ln x - \alpha x - \beta\right|^2 dx = \int_0^1 \left(x\ln x - \alpha x^2 - \beta x\right)^2 dx = \left\|g - (\alpha f_1 + \beta f_2)\right\|^2 .$$

Enfin, si $F = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$, F est un sous-espace de dimension finie de l'espace préhilbertien réel E, donc $\inf\limits_{f\in F} \|g - f\|^2$ existe (et vaut $d(g,F)^2$) et est atteint en $p_F(g) = a f_1 + b f_2$, le projeté orthogonal de g sur F. Or, $\inf\limits_{f\in F} \|g - f\|^2 = \inf\limits_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2} \|g - (\alpha f_1 + \beta f_2)\|^2 = \inf\limits_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 x^2 \left|\ln x - \alpha x - \beta\right|^2 dx$, donc :

$$\boxed{\text{Il existe bien } (a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \int_0^1 x^2 \left|\ln x - ax - b\right|^2 dx = \inf_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 x^2 \left|\ln x - \alpha x - \beta\right|^2 dx .}$$

Planche n° 10

Exercice I

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. On veut :

$$\big(A \text{ diagonalisable}\big) \iff \big(\forall\, P \in \mathbb{C}[X],\ \deg P > 0,\ \exists\, M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}),\ P(M) = A\big).$$

($\Rightarrow$) On suppose que A est diagonalisable, donc il existe $Q \in GL_2(\mathbb{C})$ et $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tels que :

$$A = QDQ^{-1} \text{ avec } D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

Remarquons ici que toute application polynômiale de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ est surjective. C'est une conséquence immédiate du théorème fondamental de l'algèbre. En effet, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$ et tout $z \in \mathbb{C}$, $P - z$ admet au moins une racine complexe, donc il existe $t \in \mathbb{C}$ tel que $P(t) = z$.

Soit donc $P \in \mathbb{C}[X]$. D'après ce que l'on vient de dire, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que $P(\alpha) = a$ et $P(\beta) = b$. Alors, si on pose $\Delta = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, on a $P(\Delta) = \begin{pmatrix} P(\alpha) & 0 \\ 0 & P(\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = D$ et :

$$A = QDQ^{-1} = QP(\Delta)Q^{-1} = P(Q\Delta Q^{-1}).$$

Donc, en notant $M = Q\Delta Q^{-1}$, on a :

$$P(M) = A.$$

Remarquons qu'ici on n'a pas besoin de la dimension 2.

($\Leftarrow$) On suppose que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant, il existe $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $P(M) = A$.

Comme A est une matrice 2×2, elle admet une seule valeur propre ou deux valeurs propres distinctes. Dans ce dernier cas, A est diagonalisable d'après le cours.

Supposons que la matrice A admet une seule valeur propre $a \in \mathbb{C}$. Elle est trigonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, donc semblable à une matrice $B = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & a \end{pmatrix} = aI_2 + cN$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Il existe donc $Q \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que :

$$A = QBQ^{-1} = Q(aI_2 + cN)Q^{-1} = aI_2 + c\,QNQ^{-1}.$$

Supposons $c \neq 0$.

Alors, $P = cX^2 + a \in \mathbb{C}[X]$ n'est pas constant et d'après l'hypothèse, il existe $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $P(M) = A$, soit :

$$cM^2 + aI_2 = aI_2 + c\,QNQ^{-1} \iff M^2 = QNQ^{-1}.$$

Or, $N^2 = 0_2$, donc $M^4 = (M^2)^2 = (QNQ^{-1})^2 = QN^2Q^{-1} = 0_2$.

Ainsi, M est nilpotente, donc sa seule valeur propre est 0 et son polynôme caractéristique est X^2 et, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $M^2 = 0_2$, soit $QNQ^{-1} = 0_2$ et donc $N = 0_2$, qui est absurde. Finalement, l'hypothèse $c \neq 0$ mène à une absurdité donc $c = 0$ et $A = aI_2$ est scalaire, donc diagonale, donc diagonalisable.

Dans les cas, on a bien A diagonalisable.

Finalement, on bien :

$$\boxed{\big(A \text{ diagonalisable}\big) \iff \big(\forall\, P \in \mathbb{C}[X],\ \deg P > 0,\ \exists\, M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}),\ P(M) = A\big)}$$

Exercice II

Soit $h:(x,t) \mapsto e^{-x\tan t}$ définie sur $\mathbb{R} \times \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto h(x,t)$ est continue, donc continue par morceaux, comme composée de fonctions continues et donc intégrable sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.
- Pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $x \mapsto h(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ comme fonction exponentielle, de dérivée $x \mapsto -(\tan t)e^{-x\tan t}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto -(\tan t)e^{-x\tan t}$ continue, donc continue par morceaux, sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ en tant que produit de telles fonctions.
- Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Pour tout $(x,t) \in [-a, +\infty[\times \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $\tan t \in [0,1]$ et $\left|-(\tan t)e^{-x\tan t}\right| \leq e^{a\tan t}$, et la fonction $t \mapsto e^{a\tan t}$ (indépendante de *x*) est continue, positive et intégrable sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Alors, $f : x \mapsto \int_0^{\pi/4} e^{-x\tan t}dt$ est de classe C^1sur $[-a, +\infty[$ de dérivée $f' : x \mapsto -\int_0^{+\infty} (\tan t)e^{-x\tan t}dt$.
Ceci est vrai pour tout $a \in \mathbb{R}_+$ et comme $\mathbb{R} = \bigcup_{a\in\mathbb{R}_+} [-a, +\infty[$:

$$\boxed{f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ de dérivée } f' : x \mapsto -\int_0^{\pi/4} (\tan t)e^{-x\tan t}dt.}$$

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto -(\tan t)e^{-x\tan t}$ est continue, non nulle et négative sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, on peut conclure par croissance de l'intégrale que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) < 0$, donc :

$$\underline{f \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}.}$$

De plus, pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}\times\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, on a $e^{-x\tan t}>0$, $t\leq\tan t$ et $\frac{1}{\cos^2 t}\geq 1$.

- Si $x<0$:

$$f(x)=\int_0^{\pi/4}e^{-x\tan t}dt=\int_0^{\pi/6}e^{-x\tan t}dt+\int_{\pi/6}^{\pi/4}e^{-x\tan t}dt\geq\int_{\pi/6}^{\pi/4}e^{-x\tan t}dt\geq\int_{\pi/6}^{\pi/4}e^{-x\tan\frac{\pi}{6}}dt=\frac{\pi}{12}e^{-x/\sqrt{3}}.$$

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\pi}{12}e^{-x/\sqrt{3}}=+\infty$, on a par comparaison :

$$\underline{\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty}.$$

- Si $x>0$, $e^{-xt}\leq e^{-x\tan t}\leq\frac{1}{\cos^2 t}e^{-x\tan t}$ pour tout $t\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, donc :

$$\int_0^{\pi/4}e^{-xt}dt\leq\int_0^{\pi/4}e^{-x\tan t}dt\leq\int_0^{\pi/4}\frac{1}{\cos^2 t}e^{-x\tan t}dt.$$

Soit :

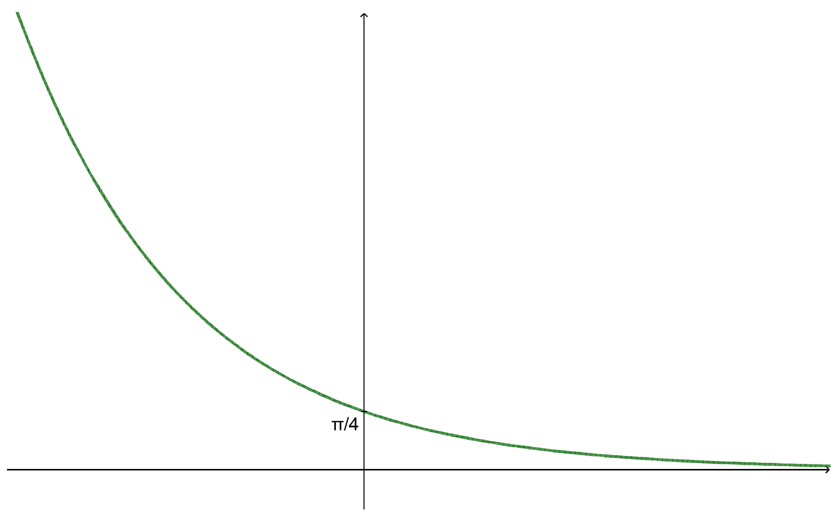
$$\frac{1-e^{-\frac{\pi}{4}x}}{x}\leq f(x)\leq\frac{1-e^{-x}}{x}.$$

Ceci permet de conclure que $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{x}$ et donc que :

$$\underline{\lim_{x\to+\infty}f(x)=0}.$$

Enfin, on a $f(0)=\int_0^{\pi/4}dt=\frac{\pi}{4}$ et $f'(0)=-\int_0^{\pi/4}\tan t\,dt=\left[\ln(\cos t)\right]_0^{\pi/4}=\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\ln 2}{2}$.

Donc la courbe de *f* a l'allure suivante :



On a vu que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ et $\int^{+\infty} \frac{dx}{x}$ diverge, donc n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Comme *f* est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et $f(0)=\frac{\pi}{4}$, on a $f(x)\geq\frac{\pi}{4}$ pour tout $x\in\mathbb{R}_-$, donc *f* n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_-$.

Finalement :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ n'est intégrable ni sur } \mathbb{R}_+, \text{ ni sur } \mathbb{R}_-.}$$

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0\in\mathbb{R}$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)$.

On a vu que *f* est strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=f(u_{n-1})>0$.

De plus, comme *f* est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et $f(0)=\frac{\pi}{4}$, on a $f(x)<\frac{\pi}{4}$ pour tout $x>0$, donc, pour tout entier $n\geq 2$, $u_{n-1}>0$ et $u_n=f(u_{n-1})<\frac{\pi}{4}$. Ainsi :

$$\underline{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée, avec } 0<u_n<\frac{\pi}{4} \text{ pour tout entier } n\geq 2.}$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $u_{n+2}=f(u_{n+1})=f\left(f(u_n)\right)=(f\circ f)(u_n)$.

Comme *f* est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, $f\circ f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, si $u_n<u_{n+2}$ (*resp.* $u_n>u_{n+2}$, *resp.* $u_n=u_{n+2}$), alors $u_{n+2}<u_{n+4}$ (*resp.* $u_{n+2}>u_{n+4}$, *resp.* $u_{n+2}=u_{n+4}$).

Ceci prouve par récurrence que :

$$\underline{\text{Les suites extraites } \left(u_{2k}\right)_{k\in\mathbb{N}} \text{ et } \left(u_{2k+1}\right)_{k\in\mathbb{N}} \text{ sont monotones.}}$$

Comme elles sont bornées, elles convergent et comme $f\circ f$ est continue sur $\mathbb{R}$ (car *f* l'est) :

$$\underline{\text{Les suites extraites } \left(u_{2k}\right)_{k\in\mathbb{N}} \text{ et } \left(u_{2k+1}\right)_{k\in\mathbb{N}} \text{ convergent vers un point fixe de } f\circ f.}$$

Comme somme de telles fonctions, la fonction $x\mapsto f(x)-x$ est continue sur $\mathbb{R}$ et strictement décroissante de $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\mapsto f(x)-x\right]=+\infty$ à $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\mapsto f(x)-x\right]=-\infty$.

La fonction $x\mapsto f(x)-x$ réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: elle s'annule donc une et une seule fois en un réel α. Comme $f(0)-0=\frac{\pi}{4}>0$ et $f\left(\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{4}=f\left(\frac{\pi}{4}\right)-f(0)<0$, on a :

$$\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{4}\right[.$$

La fonction $f\circ f$ est alors de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (car f l'est), avec pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$(f\circ f)'(x)=f'(x)\times f'\big(f(x)\big).$$

Or, pour pout $x\in\mathbb{R}_+$ et tout $t\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, on a $0\leq(\tan t)e^{-x\tan t}\leq 1$ donc :

$$0\leq\left|f'(x)\right|=\int_0^{\pi/4}(\tan t)e^{-x\tan t}dt\leq\frac{\pi}{4}<1.$$

Et, comme pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)>0$, on obtient pour pout $x\in\mathbb{R}_+$:

$$(f\circ f)'(x)\leq\left(\frac{\pi}{4}\right)^2<1.$$

Ainsi, pour pout $x\in\mathbb{R}_+$, $(f\circ f)'(x)-1<0$, donc la fonction $g:x\mapsto(f\circ f)(x)-x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

De plus :

- $\lim\limits_{x\to-\infty}(f\circ f)(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f\big(f(x)\big)=\lim\limits_{X\to+\infty}f(X)=0$ et $g(0)=f\left(\frac{\pi}{4}\right)>0$;
- $\lim\limits_{x\to+\infty}(f\circ f)(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f\big(f(x)\big)=\lim\limits_{X\to 0}f(X)=\frac{\pi}{4}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$.

Sur $\mathbb{R}_+$, la fonction g est donc continue (car C^1) et strictement décroissante de $g(0)>0$ à $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$: elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $\left]-\infty,g(0)\right]$, et comme $g(0)>0$, g s'annule une et une seule fois sur $\mathbb{R}_+$. Or, $\alpha\in\mathbb{R}_+$ et $g(\alpha)=f\big(f(\alpha)\big)-\alpha=f(\alpha)-\alpha=0$, donc le seul point fixe positif de $f\circ f$ est α.

En définitive :

- pour tout $x\in\left[0,\alpha\right[$, $g(x)>g(\alpha)=0$, soit $(f\circ f)(x)>x$;
- $(f\circ f)(\alpha)=\alpha$;
- pour tout $x\in\left]\alpha,+\infty\right[$, $g(x)<g(\alpha)=0$, soit $(f\circ f)(x)<x$.

Alors :

- si $u_1\in\left[0,\alpha\right[$, alors $(f\circ f)(u_1)=u_3>u_1$ et d'après ce qu'on a vu plus haut $\left(u_{2k+1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante et, comme f est strictement décroissante, on a $u_4=f(u_3)<f(u_1)=u_2$, donc $\left(u_{2k}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. Les deux suites convergent vers α.
- si $u_1=\alpha$, alors $u_0=\alpha$ et la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
- Si $u_1\in\left]\alpha,+\infty\right[$, alors on montre comme ci-dessus que $\left(u_{2k+1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante, $\left(u_{2k}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et les deux suites convergent vers α.

Enfin, on a $u_1=f(u_0)<\alpha=f(\alpha)$ si et seulement si $u_0>\alpha$.

Tout ceci permet de conclure que, α étant l'unique point fixe de f :

- si $u_0 > \alpha$, alors $(u_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(u_{2k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante ;
- si $u_0 = \alpha$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante ;
- Si $u_0 < \alpha$, alors $(u_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $(u_{2k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ est croissante ;
- Dans tous les cas, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

Planche n° 11

Exercice I

Remarquons déjà que quel que soit $b\in\mathbb{R}$, $t\mapsto\dfrac{\arctan t}{t^b}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus, $\dfrac{\arctan t}{t^b}\underset{t\to 0}{\sim} t^{1-b}$ et $\int_0 t^{1-b}dt$ converge si et seulement si $1-b>-1$, soit $b<2$.

Donc, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est définie pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $b<2$.

Nous allons alors considérer plusieurs cas suivant *b*, tel que demandé dans l'énoncé.

$b\in\left]0,2\right[\setminus\{1\}$

Les fonctions $t\mapsto\arctan t$ et $t\mapsto\dfrac{1}{1-b}t^{1-b}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et une intégration par parties donne pour tout $\varepsilon\in\left]0,1\right[$:

$$\int_\varepsilon^n\frac{\arctan t}{t^b}dt=\left[\frac{1}{1-b}t^{1-b}\arctan t\right]_\varepsilon^n-\int_\varepsilon^n\frac{1}{1-b}\frac{t^{1-b}}{1+t^2}dt=\frac{1}{1-b}\left(\frac{\arctan n}{n^{b-1}}-\varepsilon^{1-b}\arctan\varepsilon-\int_\varepsilon^n\frac{t^{1-b}}{1+t^2}dt\right).$$

Or, $\varepsilon^{1-b}\arctan\varepsilon\underset{\varepsilon\to 0}{\sim}\varepsilon^{1-b}\varepsilon=\varepsilon^{2-b}$ et comme $2-b>0$, on a $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{1-b}\arctan\varepsilon=0$.

Alors, comme $\int_0^n\dfrac{\arctan t}{t^b}dt$, $\int_0^n\dfrac{t^{1-b}}{1+t^2}dt$ aussi et on obtient :

$$\int_0^n\frac{\arctan t}{t^b}dt=\frac{1}{1-b}\left(\frac{\arctan n}{n^{b-1}}-\int_0^n\frac{t^{1-b}}{1+t^2}dt\right).$$

Soit, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$u_n=\frac{1}{1-b}\left(\frac{\arctan n}{n^{a+b-1}}-\frac{1}{n^a}\int_0^n\frac{t^{1-b}}{1+t^2}dt\right).$$

Or, pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$, $0<\dfrac{t^{1-b}}{1+t^2}<\dfrac{t^{1-b}}{t^2}=\dfrac{1}{t^{b+1}}$ et $\int^{+\infty}\dfrac{dt}{t^{b+1}}$ converge car $b+1>1$, donc $I=\int_0^{+\infty}\dfrac{t^{1-b}}{1+t^2}dt$ converge et $I>0$.

Alors, $\dfrac{1}{n^a}\int_0^n\dfrac{t^{1-b}}{1+t^2}dt\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{I}{n^a}$ et $\sum\dfrac{1}{n^a}\int_0^n\dfrac{t^{1-b}}{1+t^2}dt$ converge si et seulement si $a>1$.

Par ailleurs, on a $\dfrac{\arctan n}{n^{a+b-1}}\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{\pi/2}{n^{a+b-1}}$, donc $\sum\dfrac{\arctan n}{n^{a+b-1}}$ converge si et seulement si $a+b-1>1$.

Considérons alors deux cas :

- $b<1$, alors $a+b-1>1$ entraine $a>1$, donc $\sum u_n$ converge si et seulement si $a+b-1>1$;
- $b>1$, alors $a>1$ entraine $a+b-1>1$, donc $\sum u_n$ converge si et seulement si $a>1$.

$b=1$

Un raisonnement similaire entraine pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$u_n=\frac{\ln n}{n^a}\arctan n-\frac{1}{n^a}\int_0^n\frac{\ln t}{1+t^2}dt.$$

Et $J=\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{1+t^2}dt$ converge (car $\frac{\ln t}{1+t^2}=\underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^{1,5}}\right)$) et est non nulle, donc $\frac{1}{n^a}\int_0^n\frac{\ln t}{1+t^2}dt\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{J}{n^a}$ et $\sum\frac{1}{n^a}\int_0^n\frac{\ln t}{1+t^2}dt$ converge si et seulement si $a>1$. De plus :

- quand $a>1$, on a $\frac{\ln n}{n^a}\arctan n=\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{(a+1)/2}}\right)$ et $\sum\frac{1}{n^{(a+1)/2}}$ converge car $\frac{a+1}{2}>1$, donc $\sum\frac{\ln n}{n^a}\arctan n$ converge ;
- quand $a<1$, on a $\frac{1}{n}=\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{\ln n}{n^a}\arctan n\right)$ et $\sum\frac{1}{n}$ diverge, donc $\sum\frac{\ln n}{n^a}\arctan n$ diverge.

Finalement, quand $b=1$, $\sum u_n$ converge si et seulement si $a>1$.

$b\le 0$

La fonction $t\mapsto\frac{1}{t^b}=t^{-b}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ (l'intégrale $\int_0^n\frac{\arctan t}{t^b}dt$ n'est plus impropre en 0).

Pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, $0\le\frac{\arctan t}{t^b}<\frac{\pi}{2}\frac{1}{t^b}$ et pour $t\in\left[\frac{\pi}{4},+\infty\right[$, $\frac{1}{t^b}=\frac{\arctan(\pi/4)}{t^b}\le\frac{\arctan t}{t^b}$, donc pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ ($n\ge 1>\frac{\pi}{4}$), on a :

$$\int_{\pi/4}^n\frac{1}{t^b}dt\le\int_{\pi/4}^n\frac{\arctan t}{t^b}dt\le\int_0^n\frac{\arctan t}{t^b}dt\le\int_0^n\frac{\pi}{2}\frac{1}{t^b}dt=\frac{\pi}{2}\int_0^n\frac{1}{t^b}dt.$$

Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$v_n\le u_n\le\frac{\pi}{2(1-b)}\frac{1}{n^{a+b-1}}\quad\textbf{(1)}$$

avec $v_n=\frac{1}{1-b}\frac{1}{n^{a+b-1}}-\frac{(\pi/4)^{-b+1}}{1-b}\frac{1}{n^a}$.

Or, $\frac{1}{n^a}=\frac{1}{n^{a+b-1}}\frac{1}{n^{1-b}}=\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{a+b-1}}\right)$ (car $1-b>0$), donc $v_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{1-b}\frac{1}{n^{a+b-1}}$ et $\sum v_n$ converge si et seulement si $\sum\frac{1}{n^{a+b-1}}$ converge, donc si et seulement si $a+b-1>1$.

Les trois suites de la double inégalité **(1)** sont positives, au moins à partir d'un certain rang (pour $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$). On peut donc conclure, par comparaison, que la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $a+b-1>1$.

Finalement, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est définie uniquement quand $b<2$ et :

- Si $b<1$, $\sum u_n$ converge si et seulement si $a+b-1>1$.
- Si $1\leq b<2$, $\sum u_n$ converge si et seulement si $a>1$.

Exercice II

L'application $t\mapsto a+tb$ est continue sur $\mathbb{R}$, et comme l'application $x\mapsto \|x\|$ est continue sur E :

$$\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

Pour tout $(t,t')\in\mathbb{R}^2$, on a :

$$\left|f(t)-f(t')\right| = \left|\|a+tb\|-\|a+t'b\|\right| \leq \|(a+tb)-(a+t'b)\| = \|(t-t')b\| = \|b\|.|t-t'|.$$

Donc :

$$\boxed{f \text{ est } \|b\| \text{-lipschitzienne.}}$$

Pour tout $t\in\mathbb{R}$, on a :

$$\|b\|.|t| = \|tb\| = \|a+tb-a\| \leq \|a+tb\|+\|a\| = f(t)+\|a\|.$$

Donc, pour tout $t\in\mathbb{R}$:

$$f(t)\geq \|b\|.|t|-\|a\|.$$

Comme $\lim\limits_{t\to-\infty}\left[\|b\|.|t|-\|a\|\right] = \lim\limits_{t\to+\infty}\left[\|b\|.|t|-\|a\|\right] = +\infty$, on obtient par comparaison :

$$\boxed{\lim_{t\to-\infty} f(t) = \lim_{t\to+\infty} f(t) = +\infty}$$

On a, en posant $g=f-1$:

$$I=\{t\in\mathbb{R},\ a+tb\in B(0,1)\} = \{t\in\mathbb{R},\ \|a+tb\|<1\} = \{t\in\mathbb{R},\ f(t)<1\} = \{t\in\mathbb{R},\ g(t)<0\}.$$

Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, $g=f-1$ l'est aussi, donc I est une partie ouverte de $\mathbb{R}$.

Supposons que I n'est pas vide. Soit alors $(t,t')\in I^2$ et $\lambda\in[0,1]$. On a :

$$\left\|a+\left(\lambda t+(1-\lambda)t'\right)b\right\| = \|\lambda a+(1-\lambda)a+\lambda tb+(1-\lambda)t'b\| = \|\lambda(a+tb)+(1-\lambda)(a+t'b)\|.$$

Donc, avec $\lambda\geq 0$ et $1-\lambda\geq 0$:

$$\left\|a+\left(\lambda t+(1-\lambda)t'\right)b\right\| \leq \|\lambda(a+tb)\|+\|(1-\lambda)(a+t'b)\| = \lambda\|a+tb\|+(1-\lambda)\|a+t'b\|.$$

Or, $t, t' \in I$, donc $\|a+tb\|<1$ et $\|a+t'b\|<1$, d'où :

$$\left\|a+\left(\lambda t+(1-\lambda)t'\right)b\right\|<\lambda+(1-\lambda)=1.$$

Ainsi, $\lambda t+(1-\lambda)t' \in I$. Ceci prouve que si *I* n'est pas vide, c'est une partie convexe de $\mathbb{R}$, donc un intervalle. Comme *I* est ouvert :

$$\boxed{I=\left\{t\in\mathbb{R},\ a+tb\in B(0,1)\right\} \text{ est soit vide, soit un intervalle ouvert de } \mathbb{R}.}$$

Planche n° 12

Exercice I

Posons $F=\text{Vect}(e_1,\ldots,e_n)$. Si $\dim F<n$, alors, $\dim F^\perp=n-\dim F>0$ et donc, il existe $x\in F^\perp$ tel que $x\neq 0$. Alors, on a $\langle x,e_k\rangle=0$ pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, donc $\|x\|^2=\sum_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle^2=0$, qui est absurde car $x\neq 0$. Ainsi, $\dim F<n$ mène à une absurdité et la famille $\mathcal{B}=(e_1,\ldots,e_n)$ est libre.

Soit $k\in[\![1,n]\!]$ fixé et $H_k=\text{Vect}\left(e_i,\,i\in[\![1,n]\!]\setminus\{k\}\right)$.

Comme $rg(e_1,\ldots,e_n)=n$, on a $\dim H_k=n-1$ et donc $\dim H_k^\perp=1$. Soit alors f_k un vecteur directeur (donc non nul) de la droite $H_k^\perp$.

On a $E=H_k\oplus H_k^\perp$, donc il existe $x\in H_k$ et $\lambda\in\mathbb{R}$ tels que $e_k=x+\lambda f_k$.

- D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$\|e_k\|^2=\|x\|^2+\|\lambda f_k\|^2=\|x\|^2+\lambda^2\|f_k\|^2.$$

- Comme $f_k\in H_k^\perp$, on a $\langle f_k,e_i\rangle=0$ pour tout $i\in[\![1,n]\!]\setminus\{k\}$ et par hypothèse :

$$\|f_k\|^2=\sum_{i=1}^{n}\langle f_k,e_i\rangle^2=\langle f_k,e_k\rangle^2=\langle f_k,\lambda f_k\rangle^2=\lambda^2\langle f_k,f_k\rangle^2=\lambda^2\|f_k\|^4.$$

  Comme $f_k\neq 0$, on obtient $\lambda^2\|f_k\|^2=1$ et donc :

$$\|e_k\|^2=\|x\|^2+\|\lambda f_k\|^2=\|x\|^2+1\geq 1.$$

- Par hypothèse, on a aussi :

$$\|e_k\|^2=\sum_{i=1}^{n}\langle e_k,e_i\rangle^2=\langle e_k,e_k\rangle^2+\sum_{i=1,i\neq k}^{n}\langle e_k,e_i\rangle^2=\|e_k\|^4+\sum_{i=1,i\neq k}^{n}\langle x,e_i\rangle^2\geq\|e_k\|^4.$$

  Donc $\|e_k\|^4\leq\|e_k\|^2$, et comme $e_k\neq 0$, on obtient :

$$\|e_k\|^2\leq 1.$$

Finalement, $1\leq\|e_k\|^2=\|x\|^2+1\leq 1$ donc $\|e_k\|^2=1$ et $\|x\|^2=0$, d'où $e_k=\lambda f_k\in H_k^\perp$, soit :

$$\|e_k\|=1 \text{ et } \langle e_k,e_i\rangle=0 \text{ pour tout } i\in[\![1,n]\!]\setminus\{k\}.$$

Ceci étant vrai pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, on en conclut que :

$$\boxed{\mathcal{B}=(e_1,\ldots,e_n) \text{ est une base orthonormée de } E.}$$

<u>Exercice II</u>

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction rationnelle $x \mapsto \dfrac{x^n}{1+x+x^2}$ est continue sur $[0,1]$, donc I_n est définie.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$, on a $0 \le \dfrac{x^{n+1}}{1+x+x^2} \le \dfrac{x^n}{1+x+x^2}$, donc :

$$0 \le I_{n+1} \le I_n .$$

La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0, donc :

$$\boxed{\text{La suite } (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge.}}$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n + I_{n+1} + I_{n+2} = \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1} + x^{n+2}}{1+x+x^2}\,dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} .$$

Or, $I_{n+2} \le I_{n+1} \le I_n$, donc :

$$3I_{n+2} \le I_n + I_{n+1} + I_{n+2} \le 3I_n \quad \Leftrightarrow \quad 3I_{n+2} \le \frac{1}{n+1} \le 3I_n .$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \ge 2$, on a $\dfrac{1}{n+1} \le 3I_n$ et $3I_n \le \dfrac{1}{n-2+1} = \dfrac{1}{n-1}$, donc :

$$\frac{n}{n+1} \le 3nI_n \le \frac{n}{n-1} .$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n-1} = 1$, le théorème des gendarmes permet de conclure que :

$$\lim_{n\to+\infty} 3nI_n = 1 .$$

D'où :

$$\boxed{I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3n} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} I_n = 0 .}$$

Série 4

Planche n° 13

Exercice I

La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que quotient de telles fonctions.

De plus, par croissances comparées, on a $\dfrac{e^{-t}}{t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et $\int^{+\infty} \dfrac{dt}{t^2}$, donc, pour tout réel $x>0$, l'intégrale $\int_x^{+\infty} \dfrac{e^{-t}}{t}\,dt$ converge (et est positive pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$) et ainsi :

$$\boxed{f : x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt \text{ est définie sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = -\int_{+\infty}^{x} \dfrac{e^{-t}}{t}\,dt$, donc *f* est une primitive de $x \mapsto -\dfrac{e^{-x}}{x}$, et :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ avec } f' : x \mapsto -\frac{e^{-x}}{x}.}$$

Pour tout $x \in \left]0,1\right[$, on a avec $g : t \mapsto \dfrac{e^{-t}-1}{t}$:

$$f(x) = \int_x^1 \frac{e^{-t}}{t}\,dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt = \int_x^1 \frac{1}{t}\,dt + \int_x^1 \frac{e^{-t}-1}{t}\,dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt = -\ln x + \int_x^1 g(t)\,dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt.$$

Or, la fonction $h : t \mapsto e^{-t}$ est dérivable sur $[0,1]$ et pour tout $t \in [0,1]$, $|h'(t)| = \left|-e^{-t}\right| = e^{-t} \leq 1$. L'inégalité des accroissements finis appliquée entre 0 et *t* pour $t \in [0,1]$ donne alors :

$$\left|\frac{h(t)-h(0)}{t-0}\right| = \left|\frac{e^{-t}-1}{t}\right| = |g(t)| \leq 1.$$

Donc :

$$\left|\int_x^1 g(t)\,dt\right| \leq \int_x^1 |g(t)|\,dt \leq \int_x^1 dt = 1-x \leq 1.$$

Ainsi, la fonction $x \mapsto \int_x^1 g(t)\,dt + \int_1^{+\infty} \dfrac{e^{-t}}{t}\,dt$ est bornée au voisinage de 0 et comme $\lim\limits_{x\to 0}(-\ln x) = +\infty$, on a :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln x}$$

Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$. La fonction $t\mapsto t-x$ est une bijection de classe C^1 de $[x,+\infty[$ dans $\mathbb{R}_+$, et en effectuant le changement de variable $u=t-x$, on obtient :

$$f(x)=\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u-x}}{u+x}du=\frac{e^{-x}}{x}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{1+\frac{u}{x}}du\,.$$

Or, pour tout $z\in\mathbb{R}_+$, on a $1-z\leq\frac{1}{1+z}\leq 1$, donc pour tout $u\in\mathbb{R}_+$ et avec $x\in\mathbb{R}_+^*$, on a $\frac{u}{x}\in\mathbb{R}_+$ et :

$$e^{-u}-\frac{1}{x}u\,e^{-u}\leq\frac{e^{-u}}{1+\frac{u}{x}}\leq e^{-u}\,.$$

Les intégrales $\int_0^{+\infty}e^{-u}du$ et $\int_0^{+\infty}u\,e^{-u}du$ convergent, car $u\,e^{-u}\underset{u\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{u^2}\right)$ pour la seconde, d'où :

$$\int_0^{+\infty}e^{-u}dt-\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}u\,e^{-u}dt\leq\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{1+\frac{u}{x}}du\leq\int_0^{+\infty}e^{-u}dt\,.$$

Soit, avec $\int_0^{+\infty}e^{-u}du=\left[-e^{-u}\right]=1$:

$$1-\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}u\,e^{-u}dt\leq\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{1+\frac{u}{x}}du\leq 1\,.$$

Comme $\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}u\,e^{-u}dt\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$, le théorème des gendarmes donne $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{1+\frac{u}{x}}du=1$ et donc :

$$\boxed{f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{e^{-x}}{x}}$$

Les fonctions f et $x\mapsto x$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et une intégration par parties donne pour tout $[a,b]\subset\mathbb{R}_+^*$:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\left[x\,f(x)\right]_a^b-\int_a^b x\,f'(x)\,dx=\left[x\,f(x)\right]_a^b-\int_a^b x\left(-\frac{e^{-x}}{x}\right)dx$$

$$=\left[x\,f(x)\right]_a^b+\int_a^b e^{-x}\,dx=\left[x\,f(x)-e^{-x}\right]_a^b=b\,f(b)-a\,f(a)-e^{-b}+e^{-a}$$

Et :

- $\lim\limits_{a\to 0}a\,f(a)=0$, car $a\,f(a)\underset{a\to 0}{\sim}-a\ln a$, et $\lim\limits_{a\to 0}e^{-a}=1$;
- $\lim\limits_{b\to+\infty}b\,f(b)=0$, car $b\,f(b)\underset{b\to+\infty}{\sim}e^{-b}$, et $\lim\limits_{b\to+\infty}e^{-b}=0$.

Ainsi, $\int_0^{+\infty}f(x)\,dx$ converge est vaut 1 et, comme f est positive sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que :

$$\boxed{f\text{ est intégrable sur }\mathbb{R}_+^*\text{ et }\int_0^{+\infty}f(x)\,dx=1.}$$

Exercice II

Le polynôme caractéristique de M est :

$$\chi_M = \begin{vmatrix} X-2 & -1 & -1 \\ -1 & X & -1 \\ -1 & -3 & X+2 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2}}{=} \begin{vmatrix} X-1 & -(X+1) & 0 \\ -1 & X & -1 \\ 0 & -(X+3) & X+3 \end{vmatrix}$$

$$= (X+3)\begin{vmatrix} X-1 & -(X+1) & 0 \\ -1 & X & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \underset{C_2 \leftarrow C_2 + C_3}{=} (X+3)\begin{vmatrix} X-1 & -(X+1) & 0 \\ -1 & X-1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Et en développant par rapport à la dernière ligne, on obtient :

$$\chi_M = (X+3)\begin{vmatrix} X-1 & -(X+1) \\ -1 & X-1 \end{vmatrix} = (X+3)\left[(X-1)^2 - (X+1)\right] = (X+3)(X-3)X\ .$$

La matrice M admet trois valeurs propres réelles : $-3, 0, 3$. Comme c'est une matrice 3×3, elle est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et ses trois sous-espaces propres sont des droites D_1, D_2, D_3.

Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ une éventuelle solution du problème.

Comme $f = g^3 + 2g$ est un polynôme en g, g et f commutent. Alors, D_1, D_2, D_3, les sous-espaces propres de f sont stables par g. Comme $D_1 \oplus D_2 \oplus D_3 = \mathbb{R}^3$, D_1, D_2, D_3 sont aussi les sous-espaces propres de g. Ceci veut dire que f et g sont diagonalisables dans une même base de vecteurs propres.

Donc, il existe $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}M\,P = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = D$ et $P^{-1}N\,P = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \Delta$, où N est la matrice de g dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On a alors :

$$g^3 + 2g = f \quad \Leftrightarrow \quad N^3 + 2N = M \quad \Leftrightarrow \quad P^{-1}N^3P + 2P^{-1}N\,P = P^{-1}M\,P$$

Et comme $P^{-1}N^3P = (P^{-1}NP)^3 = \Delta^3$, on obtient :

$$g^3 + 2g = f \quad \Leftrightarrow \quad \Delta^3 + 2\Delta = P(\Delta) = D$$

avec $P = X^3 + 2X$. Or, $P(\Delta) = diag\big(P(a), P(b), P(c)\big)$, donc :

$$g^3 + 2g = f \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} P(a) = -3 \\ P(b) = 0 \\ P(c) = 3 \end{cases}$$

Remarquons que, sur $\mathbb{R}$, la fonction polynômiale $t \mapsto P(t) = t^3 + 2t$ est continue et strictement croissante de $\lim\limits_{-\infty} P = -\infty$ à $\lim\limits_{+\infty} P = +\infty$, donc d'après le théorème de la bijection continue, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Comme $P(-1) = 3$, $P(0) = 0$ et $P(1) = 3$, on a $a = -1$, $b = 0$ et $c = 1$.

Ainsi, $\Delta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}D$ et donc :

$$N = P\Delta P^{-1} = P\left(\frac{1}{3}D\right)P^{-1} = \frac{1}{3}PDP^{-1} = \frac{1}{3}M \ .$$

Finalement, l'unique endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ tel que $g^3 + 2g = f$ est :

$$\boxed{g = \frac{1}{3}f}$$

Planche n° 14

<u>*Exercice I*</u>

Notons $p = rg\,(u)$. Comme $\mathrm{Im}\,u = \ker u$, on a $\dim(\ker u) = p$ et le théorème du rang donne :

$$\dim E = rg\,(u) + \dim(\ker u) = 2p\,.$$

Remarquons que $\mathrm{Im}\,u = \ker u$ implique immédiatement que $u^2 = 0$.

Soit alors $(x, x') \in E^2$. On a :

$$\big(u(x) \mid v(x')\big) = \big(u^2(x) \mid y\big) = \big(0 \mid y\big) = 0\,.$$

Ceci prouve que $\mathrm{Im}\,u \perp \mathrm{Im}\,v$ et donc que :

$$\underline{\mathrm{Im}\,u + \mathrm{Im}\,v = \mathrm{Im}\,u \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}\,v\,.}$$

Par ailleurs, pour tout $(x, y) \in \ker u \times E$, on a :

$$\big(x \mid v(y)\big) = \big(u(x) \mid y\big) = \big(0 \mid y\big) = 0\,.$$

Donc, $\ker u \perp \mathrm{Im}\,v$ et :

$$\mathrm{Im}\,v \subset (\ker u)^{\perp}\,.$$

Or, $\dim\big((\ker u)^{\perp}\big) = 2p - \dim(\ker u) = p$, donc :

$$\underline{rg\,(v) \leq p} \quad \textbf{(1)}.$$

De la même façon, on obtient $\ker v \perp \mathrm{Im}\,u$, donc :

$$\ker v \subset (\mathrm{Im}\,u)^{\perp}\,.$$

Et $\dim\big((\mathrm{Im}\,u)^{\perp}\big) = 2p - \dim(\mathrm{Im}\,u) = p$, d'où :

$$\underline{\dim(\ker v) \leq p} \quad \textbf{(2)}.$$

Or, d'après le théorème du rang, $rg\,(v) + \dim(\ker v) = 2p$. Avec **(1)** et **(2)**, ceci donne :

$$\underline{rg\,(v) = \dim(\ker v) = p = rg\,(u) = \dim(\ker u) = \dim\big((\mathrm{Im}\,u)^{\perp}\big) = \dim\big((\ker u)^{\perp}\big).}$$

Ainsi, on a $\mathrm{Im}\,u + \mathrm{Im}\,v = \mathrm{Im}\,u \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}\,v$ et $rg\,(v) = rg\,(u) = p$, donc :

$$\dim(\mathrm{Im}\,u \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}\,v) = rg\,(v) + rg\,(u) = 2p = \dim E\,.$$

Ceci prouve que :

$$\boxed{E = \mathrm{Im}\,u \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}\,v}$$

Remarquons qu'avec $\operatorname{Im} v \subset (\ker u)^{\perp}$, $\ker v \subset (\operatorname{Im} u)^{\perp}$ et $\operatorname{Im} u = \ker u$, on obtient :

$$\operatorname{Im} v = (\ker u)^{\perp} = (\operatorname{Im} u)^{\perp} = \ker v.$$

Soit maintenant $x \in \ker(u+v)$. On a $(u+v)(x) = u(x) + v(x) = 0$, donc $y = u(x) = -v(x) = v(-x)$. Ainsi, $y \in \operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v = \{0\}$, donc $y = u(x) = -v(x) = 0$.

Ceci donne : $x \in \ker u \cap \ker v = \operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v = \{0\}$, donc $x = 0$.

Ainsi, $\ker(u+v) = \{0\}$, et comme on est en dimension finie, on peut conclure que :

$$\boxed{u + v \text{ est inversible.}}$$

<u>Exercice II</u>

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \operatorname{sh}(xt)\, e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ comme produit de telles fonctions.

De plus :

- si $x = 0$, alors $F(x) = \int_0^{+\infty} \operatorname{sh}(xt)\, e^{-t^2} dt = \int_0^{+\infty} 0\, dt = 0$ existe ;
- si $x \neq 0$, alors $\operatorname{sh}(xt)\, e^{-t^2} \underset{t \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{2} e^{|x|t - t^2}$ et par croissances comparées, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^2 e^{|x|t - t^2} = 0$, donc $\operatorname{sh}(xt)\, e^{-t^2} \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$; comme $\int^{+\infty} \dfrac{dt}{t^2}$ converge, $F(x) = \int_0^{+\infty} \operatorname{sh}(xt)\, e^{-t^2} dt$ converge.

Ainsi :

$$\boxed{F(x) = \int_0^{+\infty} \operatorname{sh}(xt)\, e^{-t^2} dt \text{ existe pour tout } x \in \mathbb{R}.}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\operatorname{sh}(xt) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(xt)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} t^{2n+1}.$$

Donc, pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, on a :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} t^{2n+1} e^{-t^2} \right) dt = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt$$

avec $f_n : t \mapsto \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} t^{2n+1} e^{-t^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue (comme produit de telles fonctions) donc continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+$, car $t^{2n+1} e^{-t^2} \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

- La série $\sum f_n$ converge simplement vers $t \mapsto \operatorname{sh}(xt)e^{-t^2}$, qui est continue (comme produit de telles fonctions) donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,dt = \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}\int_0^{+\infty} t^{2n+1}e^{-t^2}\,dt = \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}(t^2)^n e^{-t^2}\,2t\,dt\,.$$

La fonction carrée réalise une bijection de classe C^1 de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, donc en posant le changement de variable $u = t^2$, on a $\int_0^{+\infty}(t^2)^n e^{-t^2}\,2t\,dt = \int_0^{+\infty} u^n e^{-u}\,du = n!$ (ce dernier résultat, classique, a été établi plusieurs fois pendant l'année, ne serait-ce qu'avec la fonction gamma).

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,dt = \frac{1}{2}\frac{n!}{(2n+1)!}|x|^{2n+1}\,.$$

Et, pour $x \neq 0$, $\dfrac{\frac{1}{2}\frac{(n+1)!}{(2n+3)!}|x|^{2n+3}}{\frac{1}{2}\frac{n!}{(2n+1)!}|x|^{2n+1}} = \dfrac{|x|^2}{2(2n+3)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc, d'après la règle de d'Alembert, la série $\sum \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge.

Alors :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \operatorname{sh}(xt)e^{-t^2}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt\,.$$

Soit :

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2}\frac{n!}{(2n+1)!}x^{2n+1}\,.$$

Ceci prouve que :

F est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et de développement $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2}\frac{n!}{(2n+1)!}x^{2n+1}$.

Planche n° 15

Exercice I

Le système $\begin{cases} x' = x + 2y + te^t \\ y' = 8x + y + e^{-t} \end{cases}$ se récrit :

$$X' = AX + B(t)$$

avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} te^t \\ e^{-t} \end{pmatrix}$.

Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A = (X-1)^2 - 16 = (X-5)(X+3)$; il admet deux racines réelles distinctes : -3 et 5. La matrice A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$. On a :

$$A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad b = -2a \quad \text{et} \quad A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad b = 2a\,.$$

Donc, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ (donc $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$) et $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, on a $A = PDP^{-1}$ et :

$$X' = AX + B(t) \quad \Leftrightarrow \quad X' = PDP^{-1}X + B(t) \quad \Leftrightarrow \quad (P^{-1}X)' = D(P^{-1}X) + P^{-1}B(t)\,.$$

Soit avec $P^{-1}X = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$:

$$\begin{cases} u' = -3u + \frac{1}{4}(2te^t - e^{-t}) \\ v' = 5v + \frac{1}{4}(2te^t + e^{-t}) \end{cases}$$

On trouve (en cherchant une solution de chaque équation sous la forme d'une combinaison linéaire de $t \mapsto e^t$, $t \mapsto te^t$ et $t \mapsto e^{-t}$) :

$$\begin{cases} u(t) = ae^{-3t} + \frac{1}{8}te^t - \frac{1}{32}e^t - \frac{1}{8}e^{-t} \\ v(t) = be^{5t} - \frac{1}{8}te^t - \frac{1}{32}e^t - \frac{1}{24}e^{-t} \end{cases} \quad \text{avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2\,.$$

Et avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u+v \\ -2u+2v \end{pmatrix}$, on obtient :

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = ae^{-3t} + be^{5t} - \frac{1}{16}e^t - \frac{1}{6}e^{-t} \\ y(t) = -2ae^{-3t} + 2be^{5t} - \frac{1}{2}te^t + \frac{1}{6}e^{-t} \end{cases} \quad \text{avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2\,.}$$

Exercice II

On a $X(\Omega)=Y(\Omega)=\mathbb{N}$ et $\sum_{(k,n)\in\mathbb{N}^2} P(X=k,Y=n)=1$, soit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k,Y=n)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^n p(1-p)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[a^n p(1-p)^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\right]$$

$$=p\sum_{n=0}^{+\infty}a^n(1-p)^n 2^n=p\sum_{n=0}^{+\infty}\left[2a(1-p)\right]^n=\frac{p}{1-2a(1-p)}=1$$

Donc, $2a(1-p)=1-p$ (et remarquons que $2a(1-p)\in\left]0,1\right[$, donc la série géométrique $\sum\left[2a(1-p)\right]^n$ converge bien). Ceci donne :

$$\boxed{a=\frac{1}{2}}$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$P(Y=n)=\sum_{k=0}^{+\infty}P(X=k,Y=n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{2^n}p(1-p)^n .$$

Soit :

$$\boxed{P(Y=n)=p(1-p)^n}$$

Montrer que pour tout $x\in\left]-1,1\right[$ (et sous réserve de convergence) :

$$\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}x^{n-k}=\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{n!}{k!(n-k)!}x^{n-k}=\frac{1}{k!}\sum_{n=k}^{+\infty}n(n-1)...(n-k+1)x^{n-k} .$$

Or, la fonction $x\mapsto\frac{1}{1-x}$ est développable en série entière et de classe C^∞ sur $\left]-1,1\right[$ avec $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n$ et pour tout $k\in\mathbb{N}$, la dérivée $k^{\text{ième}}$ de $x\mapsto\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n$ est :

$$x\mapsto\frac{k!}{(1-x)^{k+1}}=\sum_{n=k}^{+\infty}n(n-1)...(n-k+1)x^{n-k} .$$

Donc, la série $\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}x^{n-k}$ converge pour tout $x\in\left]-1,1\right[$ avec :

$$\boxed{\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}x^{n-k}=\frac{1}{(1-x)^{k+1}}}$$

Pour tout $k\in\mathbb{N}$:

$$P(X=k)=\sum_{n=0}^{+\infty}P(X=k,Y=n)=\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}\frac{1}{2^n}p(1-p)^n=p\left(\frac{1-p}{2}\right)^k\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{1-p}{2}\right)^{n-k} .$$

Comme $p \in \left]0,1\right[$, on a $\frac{1-p}{2} \in \left]0,\frac{1}{2}\right[$, donc on peut utiliser la formule précédente :

$$P(X=k) = p\left(\frac{1-p}{2}\right)^k \frac{1}{\left(1-\frac{1-p}{2}\right)^{k+1}}.$$

Soit :

$$\boxed{P(X=k) = \frac{2p}{1+p}\left(\frac{1-p}{1+p}\right)^k}$$

Pour tous $k,n \in \mathbb{N}$, $P(X=k) \neq 0$ et $P(Y=n) \neq 0$, donc $P(X=k)P(Y=n) \neq 0$.

Or, pour $k > n$, on a $P(X=k, Y=n) = 0$, donc $P(X=k)P(Y=n) \neq P(X=k, Y=n)$ et ainsi :

$$\boxed{\text{Les variables } X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

Planche n° 16

Exercice I

D'après le cours, $L=(X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\dots(X-\lambda_r)$ est annulateur de *A*.

En effet, si, pour tout $k\in[\![1,r]\!]$, on note $E_k=\ker(A-\lambda_k I_n)$ le sous-espace propre associé à λ_k, le fait que *A* soit diagonalisable se traduit par $\dim E_k=m_k$ pour tout $k\in[\![1,r]\!]$, et :

$$\mathbb{K}^n=E_1\oplus\dots\oplus E_r\,.$$

Or, pour tout $k\in[\![1,r]\!]$ et tout $Z\in E_k$, on a $(A-\lambda_k I_n)Z=0$, donc :

$$L(A)Z=(A-\lambda_1 I_n)\dots(A-\lambda_k I_n)\dots(A-\lambda_r I_n)Z=(A-\lambda_1 I_n)\dots(A-\lambda_r I_n)\big((A-\lambda_k I_n)Z\big)=0\,.$$

Donc :

$$\boxed{\text{Le polynôme } L=(X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\dots(X-\lambda_r) \text{ annule } A \text{ et est de degré } r.}$$

Soit $P\in\mathbb{K}[X]$ tel que $P(A)=0_n$.

Pour tout $k\in[\![1,r]\!]$, il existe un vecteur $Z_k\in\mathbb{K}^n$, $Z_k\neq 0$ et $AZ_k=\lambda_k Z_k$. Alors :

$$P(A)Z_k=P(\lambda_k)Z_k\,.$$

Donc, $P(\lambda_k)Z_k=0$, soit $P(\lambda_k)=0$ car $Z_k\neq 0$.

Ainsi, les $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ sont *r* racines distinctes de *P* et donc $\deg P\geq r$. Ceci prouve que :

$$\boxed{\text{Tout polynôme annulateur de } A \text{ est de degré supérieur ou égal à } r.}$$

On pose $\mathbb{K}[A]=\{P(A),\,P\in\mathbb{K}[X]\}$. Notons $\mathbb{K}_{r-1}[A]=\{P(A),\,P\in\mathbb{K}_{r-1}[X]\}$.

Pour tout $P\in\mathbb{K}[X]$, posons $P=QL+R$ avec $\deg R<r$, soit $R\in\mathbb{K}_{r-1}[X]$, la division euclidienne de *P* pat *L*. On a alors $P(A)=Q(A)L(A)+R(A)=R(A)$ car $L(A)=0_n$, donc $P(A)\in\mathbb{K}_{r-1}[A]$.

Ceci prouve que $\mathbb{K}[A]\subset\mathbb{K}_{r-1}[A]$ et comme $\mathbb{K}_{r-1}[X]\subset\mathbb{K}[X]$, on a immédiatement $\mathbb{K}_{r-1}[A]\subset\mathbb{K}[A]$.

Ainsi :

$$\mathbb{K}[A]=\mathbb{K}_{r-1}[A]\,.$$

Or, $\mathbb{K}_{r-1}[A]=\{P(A),\,P\in\mathbb{K}_{r-1}[X]\}=\mathrm{Vect}\left(I_n,A,\dots,A^{r-1}\right)$. Supposons que la famille $\left(I_n,A,\dots,A^{r-1}\right)$ est liée. Alors, il existe $(a_0,a_1,\dots,a_{r-1})\in\mathbb{K}^{r-1}$ tel que $(a_0,a_1,\dots,a_{r-1})\neq(0,0,\dots,0)$ et $\sum\limits_{k=0}^{r-1}a_kA^k=0_n$.

Ceci veut dire que le polynôme $\sum\limits_{k=0}^{r-1}a_kX^k$ est un polynôme non nul, de degré strictement inférieur à *r* et annulateur de *A*. Ceci contredit ce qui a été prouvé plus haut, donc la famille $\left(I_n,A,\dots,A^{r-1}\right)$ est libre et comme elle génère $\mathbb{K}_{r-1}[A]$, c'en est une base.

Ainsi, $\dim \mathbb{K}_{r-1}[A] = r$ et donc :

$$\boxed{\dim \mathbb{K}[A] = r}$$

On pose $C(A) = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ AB = BA\}$.

Pour toute matrice B de $C(A)$, notons f et g les endomorphismes de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associés à A et B respectivement. Comme A et B commutent, les sous-espaces propres de A sont stables par B.

Alors, dans une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^n$, adaptée à la décomposition $\mathbb{K}^n = E_1 \oplus \ldots \oplus E_r$, on a :

$$M_{\mathcal{B}}(f) = diag\left(\lambda_1 I_{m_1}, \ldots, \lambda_r I_{m_r}\right) = P^{-1}AP \text{ et } M_{\mathcal{B}}(g) = diag\left(B_1, \ldots, B_r\right) = P^{-1}BP$$

avec $B_k \in \mathcal{M}_{m_k}(\mathbb{K})$ pour tout $k \in [\![1, r]\!]$ et où P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ à la base $\mathcal{B}$.

Réciproquement, pour tout matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la forme $C = diag\left(B_1, \ldots, B_r\right)$ comme ci-dessus, on a $CM_{\mathcal{B}}(f) = diag\left(\lambda_1 B_1, \ldots, \lambda_r B_r\right) = M_{\mathcal{B}}(f)C$ et donc, avec $B = PCP^{-1}$:

$$CP^{-1}AP = P^{-1}APC \quad \Leftrightarrow \quad PCP^{-1}A = APCP^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad BA = AB.$$

Ceci prouve que l'application définie sur $\mathcal{M}_{m_1}(\mathbb{K}) \times \ldots \times \mathcal{M}_{m_r}(\mathbb{K})$ et qui à $\left(B_1, \ldots, B_r\right)$ associe la matrice $P\left[diag\left(B_1, \ldots, B_r\right)\right]P^{-1}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ réalise une bijection de $\mathcal{M}_{m_1}(\mathbb{K}) \times \ldots \times \mathcal{M}_{m_r}(\mathbb{K})$ dans $C(A)$. Comme cette application est linéaire, c'est un isomorphisme et donc :

$$\dim C(A) = \dim\left(\mathcal{M}_{m_1}(\mathbb{K}) \times \ldots \times \mathcal{M}_{m_r}(\mathbb{K})\right) = \sum_{k=1}^{r} \dim \mathcal{M}_{m_k}(\mathbb{K}).$$

Soit :

$$\boxed{\dim C(A) = \sum_{k=1}^{r} m_k^2}$$

On a alors :

$$\dim C(A) = r \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{r} m_k^2 = r.$$

Or, les m_k^2 sont r entiers naturels non nuls, donc $\sum_{k=1}^{r} m_k^2 = r$ si et seulement si $m_k^2 = 1$ pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, soit $m_k = 1$ pour tout $k \in [\![1, r]\!]$. Ainsi :

$$\dim C(A) = r \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, k \in [\![1, r]\!],\ m_k = 1.$$

Et avec le même raisonnement que ci-dessus mais sans les carrés (les m_k sont des entiers naturels non nuls), on obtient :

$$\dim C(A) = r \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, k \in [\![1, r]\!],\ m_k = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{r} m_k = r.$$

Mais, on a $\mathbb{K}^n = E_1 \oplus ... \oplus E_r$ avec $\dim E_k = m_k$ pour tout $k \in [\![1, r]\!]$. Donc :

$$n = \sum_{k=1}^{r} \dim E_k = \sum_{k=1}^{r} m_k \ .$$

Et ainsi :

$$\dim C(A) = r \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{r} m_k = r \quad \Leftrightarrow \quad n = r \ .$$

Comme $\dim \mathbb{K}[A] = r$, ceci donne immédiatement :

$$\dim C(A) = r \quad \Leftrightarrow \quad n = r \quad \Leftrightarrow \quad \dim \mathbb{K}[A] = n \ .$$

Remarquons enfin que pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(A)$ commute avec A, donc $P(A) \in C(A)$ et ainsi, on a toujours :

$$\mathbb{K}[A] \subset C(A) \ .$$

Et donc :

$$C(A) = \mathbb{K}[A] \quad \Leftrightarrow \quad \dim C(A) = \dim \mathbb{K}[A] \quad \Leftrightarrow \quad \dim C(A) = r \ .$$

Finalement, on a bien :

$$\boxed{\dim C(A) = r \quad \Leftrightarrow \quad n = r \quad \Leftrightarrow \quad \dim \mathbb{K}[A] = n \quad \Leftrightarrow \quad C(A) = \mathbb{K}[A]}$$

<u>Exercice II</u>

La fonction $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x+1}{2}}$ est définie, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Alors :

$$f\left([0,1[\right) = [f(0), f(1)[= \left[\sqrt{\frac{1}{2}}, 1\right[\subset [0,1[\ .$$

Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq x_n < x_{n+1} < 1 \ .$$

On a $x_0 = 0$ et $x_1 = f(x_0) = f(0) = \sqrt{\dfrac{1}{2}}$, donc $0 \leq x_0 < x_1 < 1$ est vrai.

Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait $0 \leq x_n < x_{n+1} < 1$. Alors, par stricte croissance de f sur $\mathbb{R}_+$:

$$f(0) \leq f(x_n) < f(x_{n+1}) < f(1) \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq \sqrt{\frac{1}{2}} \leq x_{n+1} < x_{n+2} < 1 \ .$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

Ainsi, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ceci prouve que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq x_n < 1$, donc la suite est bornée. Elle converge donc vers une limite $\ell \in [0,1]$.

De plus, comme *f* est continue sur $\mathbb{R}_+$, on a :

$$f(\ell)=\ell \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{\frac{\ell+1}{2}}=\ell \quad\Leftrightarrow\quad \ell+1=2\ell^2 \quad\Leftrightarrow\quad 2\ell^2-\ell-1=(2\ell+1)(\ell-1)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \ell=1$$

car $\ell\in[0,1]$, donc $\ell\neq-\frac{1}{2}$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{La suite } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement croissante, converge vers 1 et } 0\leq x_n<1 \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}.}$$

De plus, *f* est dérivable sur $[0,1]$, comme composée de fonctions dérivables, et pour tout $x\in[0,1]$:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{x+1}}.$$

Donc :

$$\sup_{x\in[0,1]}|f'(x)|=\max_{x\in[0,1]}f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

L'inégalité des accroissements finis permet alors d'écrire pour tout $n\in\mathbb{N}$ (avec $x_n<1$) :

$$\left|\frac{1-f(x_n)}{1-x_n}\right|\leq\frac{1}{2\sqrt{2}} \quad\Leftrightarrow\quad \left|\frac{1-x_{n+1}}{1-x_n}\right|=\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\leq\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Alors, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right|\leq\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\sqrt{2}} \quad\Leftrightarrow\quad \left|\frac{u_n}{u_0}\right|\leq\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n.$$

L'inégalité reste vraie pour $n=0$.

Avec $u_0=1-x_0=1$ et $u_n=1-x_n>0$, on obtient pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$0<u_n\leq\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n.$$

La série géométrique $\sum\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n$ converge, car $0<\frac{1}{2\sqrt{2}}<1$, donc par comparaison :

$$\boxed{\text{La série } \sum u_n \text{ converge.}}$$

Série 5

Planche n° 17

Exercice I

Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A = (X-5)(X-3)^2 - 6 = X^2 - 8X + 9 = (X-4)^2 - 7$; il admet deux racines réelles distinctes : $4-\sqrt{7}$ et $4+\sqrt{7}$. La matrice A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$. On a :

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (4-\sqrt{7})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} 5x+3y = (4-\sqrt{7})x \\ 2x+3y = (4-\sqrt{7})y \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad 2x = (1-\sqrt{7})y$$

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (4+\sqrt{7})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} 5x+3y = (4+\sqrt{7})x \\ 2x+3y = (4+\sqrt{7})y \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad 2x = (1+\sqrt{7})y\,.$$

Donc, avec $P = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{7} & 1+\sqrt{7} \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, donc $P^{-1} = \dfrac{1}{4\sqrt{7}}\begin{pmatrix} -2 & 1+\sqrt{7} \\ 2 & -1+\sqrt{7} \end{pmatrix}$, et $D = \begin{pmatrix} 4-\sqrt{7} & 0 \\ 0 & 4+\sqrt{7} \end{pmatrix}$, on a :

$$A = PDP^{-1}.$$

Alors, pour $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$M^2 + M = A \quad\Leftrightarrow\quad M^2 + M = PDP^{-1} \quad\Leftrightarrow\quad P^{-1}M^2P + P^{-1}MP = D \quad\Leftrightarrow\quad N^2 + N = D$$

avec $N = P^{-1}MP$.

Remarquons que si $N^2 + N = D$, alors D est un polynôme en *N*, donc *D* et *N* commutent. Comme *D* est diagonale, à coefficients diagonaux distincts, ceci revient à *N* diagonale.

Alors, pour $a, b \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = D = \begin{pmatrix} 4-\sqrt{7} & 0 \\ 0 & 4+\sqrt{7} \end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} a^2 + a = 4-\sqrt{7} \\ b^2 + b = 4+\sqrt{7} \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} \left(a+\dfrac{1}{2}\right)^2 = 4-\sqrt{7}+\dfrac{1}{4} \\ \left(b+\dfrac{1}{2}\right)^2 = 4+\sqrt{7}+\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} a = \dfrac{-1 \pm \sqrt{17-6\sqrt{7}}}{2} \\ b = \dfrac{-1 \pm \sqrt{17+6\sqrt{7}}}{2} \end{cases}$$

Comme $N = P^{-1}MP$, on a $M = PNP^{-1} = \dfrac{1}{4\sqrt{7}}\begin{pmatrix} 1-\sqrt{7} & 1+\sqrt{7} \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1+\sqrt{7} \\ 2 & -1+\sqrt{7} \end{pmatrix}$

Ainsi, les solutions de $M^2 + M = A$ sont :

$$\boxed{M = \frac{1}{4\sqrt{7}}\begin{pmatrix} 1-\sqrt{7} & 1+\sqrt{7} \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1+\sqrt{7} \\ 2 & -1+\sqrt{7} \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{cases} a = \dfrac{-1 \pm \sqrt{17-6\sqrt{7}}}{2} \\ b = \dfrac{-1 \pm \sqrt{17+6\sqrt{7}}}{2} \end{cases}}$$

Exercice II

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n = \binom{2n}{n}(-1)^n$ et $w_n = \binom{2n}{n}$. On a alors :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}(-1)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}(-1)^k \binom{2(n-k)}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} v_k w_{n-k} .$$

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est le produit de Cauchy des suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Or, pour tout $x \in \left]-1,1\right[$:

$$\begin{aligned}
(1+x)^{-1/2} &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)\frac{x^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2}\frac{3}{2}\ldots\frac{2n-1}{2}\frac{x^n}{n!} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{3\times 5\times\ldots\times(2n-1)}{2^n n!} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^n n! \times 2\times 4\times\ldots\times(2n)} x^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{4^n n! n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n}(-1)^n \left(\frac{x}{4}\right)^n
\end{aligned}$$

Donc, pour tout $x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$, on a $4x \in \left]-1,1\right[$ et $-4x \in \left]-1,1\right[$, d'où :

$$\begin{aligned}
(1+4x)^{-1/2} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n}(-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n \\
(1-4x)^{-1/2} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n
\end{aligned}$$

Alors, en faisant le produit de Cauchy des deux séries entières (qui convergent absolument sur leur intervalle ouvert de convergence), on obtient :

$$(1+4x)^{-1/2}(1-4x)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n .$$

Soit :

$$(1-16x^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n .$$

Et comme quand $x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$, $16x^2 \in \left[0, \frac{1}{4}\right[$, on peut écrire :

$$(1-16x^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} (-1)^n \left(\frac{-16x^2}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} 2^{2n} x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \ .$$

Par unicité du développement en série entière, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{u_{2n} = \binom{2n}{n} 2^{2n} \ \text{ et } \ u_{2n+1} = 0}$$

Planche n° 18

Exercice I

Pour tout $x \in \left]0, +\infty\right[$, la fonction $t \mapsto f(t)\sin(x-t)$ est continue sur $[0, x]$ en tant que produit de telles fonctions, donc l'intégrale $\int_0^x f(t)\sin(x-t)\,dt$ est définie et ainsi, la fonction g est bien définie sur $\left]0, +\infty\right[$. De plus, pour tout $x \in \left]0, +\infty\right[$:

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\sin(x-t)\,dt = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\left[\sin x \cos t - \cos x \sin t\right] dt \\ &= \frac{\sin x}{x}\int_0^x f(t)\cos t\,dt - \frac{\cos x}{x}\int_0^x f(t)\sin t\,dt \end{aligned}$$

Les fonctions $x \mapsto \int_0^x f(t)\cos t\,dt$ et $x \mapsto \int_0^x f(t)\sin t\,dt$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, comme primitives de fonctions continues sur $\mathbb{R}$. Elles s'annulent toutes deux en 0, donc :

$$\lim_{x\to 0}\int_0^x f(t)\cos t\,dt = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\sin t\,dt = f(0)\sin 0 = 0 \,.$$

Comme $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$, on obtient $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1\times 0 - 1\times 0$, soit :

$$\boxed{\lim_{x\to 0} g(x) = 0}$$

Posons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

Comme $\frac{1}{x}\int_0^x \sin(x-t)\,dt = \frac{1-\cos x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, on a, si la limite existe,

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}\int_0^x \left[f(t)-\ell\right]\sin(x-t)\,dt + \frac{\ell}{x}\int_0^x \sin(x-t)\,dt\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x \left[f(t)-\ell\right]\sin(x-t)\,dt \,.$$

Quitte à remplacer f par $f-\ell$, on peut alors supposer que $\ell = 0$.

Soit un réel $\varepsilon > 0$.

Il existe un réel $A>0$ tel que pour tout $x\in[A,+\infty[$, $|f(x)|\leq\varepsilon$ et pour tout $t\in[A,x]$:

$$|f(x)\sin(x-t)|\leq|f(x)|\leq\varepsilon.$$

Donc, pour tout $x\in[A,+\infty[$:

$$\left|\frac{1}{x}\int_A^x f(x)\sin(x-t)\,dt\right|\leq\frac{1}{x}\int_A^x|f(x)\sin(x-t)|\,dt\leq\frac{1}{x}\int_A^x\varepsilon\,dt\leq\varepsilon\left(1-\frac{A}{x}\right)\leq\varepsilon.$$

Alors, pour tout $x\in[A,+\infty[$:

$$|g(x)|\leq\frac{1}{x}\int_0^A|f(x)|\,dt+\left|\frac{1}{x}\int_A^x f(x)\sin(x-t)\,dt\right|\leq\frac{K}{x}+\varepsilon.$$

Et si $x\geq\dfrac{K}{\varepsilon}$, on a $\dfrac{K}{x}\leq\varepsilon$, donc pour tout $x\in[B,+\infty[$ avec $B=\max\left(A,\dfrac{K}{\varepsilon}\right)>0$, on a $|g(x)|\leq2\varepsilon$.

Ainsi, pour tout réel $\varepsilon>0$, il existe un réel $B>0$ tel que pour tout $x\in[B,+\infty[$, $|g(x)|\leq2\varepsilon$, ce qui prouve que :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}g(x)=0}$$

<u>Exercice II</u>

On a $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, diagonalisables. On veut :

$$AB=BA\quad\Leftrightarrow\quad\exists\,C\in GL_n(\mathbb{C}),\ \exists\,(P,Q)\in\mathbb{C}[X]^2,\ A=P(C),\ B=Q(C).$$

($\Rightarrow$) On suppose que $AB=BA$.

Notons *u* et *v* les endomorphismes de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associés à *A* et *B*, et $E_1,\dots,E_r$ les sous-espaces propres de *A*. Comme *A* est diagonalisable, on a $\mathbb{C}^n=E_1\oplus\dots\oplus E_r$.

Soit $k\in[\![1,r]\!]$.

Comme *A* et *B* commutent, E_k est stable par *v*, et l'endomorphisme induit par *v* sur E_k est diagonalisable (car *B*, donc *v*, l'est). On peut donc trouver une base $\mathcal{B}_k$ de E_k dans laquelle la matrice l'endomorphisme induit par *v* sur E_k est diagonale et dans cette base, la matrice l'endomorphisme induit par *u* sur E_k est scalaire (car E_k est un sous-espace propre de *u*).

Alors, $\mathcal{B}=\mathcal{B}_1\cup\dots\cup\mathcal{B}_r$ est une base de $\mathbb{C}^n$ (car $\mathbb{C}^n=E_1\oplus\dots\oplus E_r$) dans laquelle les matrices de *u* et *v* sont diagonales. Autrement dit, *A* et *B* sont simultanément diagonalisables.

Ainsi, il existe $R\in GL_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$R^{-1}AR=D_A=diag\,(a_1,\dots,a_n)\ \text{ et }\ R^{-1}BR=D_B=diag\,(b_1,\dots,b_n).$$

Il existe un polynôme $P\in\mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $L(k)=a_k$ (polynômes de Lagrange). En notant $D=diag\,(1,\dots,n)$, on a alors :

$$R^{-1}AR=D_A=diag\,(a_1,\dots,a_n)=diag\,(P(1),\dots,P(n))=P(D).$$

Donc :

$$A = R\big(P(D)\big)R^{-1} = P(RDR^{-1}) = P(C).$$

avec $C = RDR^{-1}$.

De la même façon, il existe un polynôme $Q \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $Q(k) = b_k$ et on obtient comme ci-dessus $B = Q(C)$.

Enfin, comme $D = diag(1, \dots, n)$ est inversible (matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont non nuls), $C = RDR^{-1}$ l'est aussi et ainsi :

$$\underline{\text{Il existe } C \in GL_n(\mathbb{C}) \text{ et } (P,Q) \in \mathbb{C}[X]^2 \text{ tels que } A = P(C) \text{ et } B = Q(C).}$$

($\Leftarrow$) Pour toute matrice C de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et tous polynômes P et Q de $\mathbb{C}[X]$, $P(C)$ et $Q(C)$ commutent, donc s'il existe $C \in GL_n(\mathbb{C})$ et $(P,Q) \in \mathbb{C}[X]^2$ tels que $A = P(C)$ et $B = Q(C)$, alors A et B commutent, soit :

$$\underline{AB = BA}.$$

Finalement, on a bien :

$$\boxed{AB = BA \iff \exists\, C \in GL_n(\mathbb{C}),\ \exists\, (P,Q) \in \mathbb{C}[X]^2,\ A = P(C),\ B = Q(C)}$$

Planche n° 19

<u>Exercice I</u>

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} n\left(u_{n+1} - u_n\right) = 1$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout entier $n \geq N$, $n\left(u_{n+1} - u_n\right) \geq \dfrac{1}{2}$, soit :

$$u_{n+1} - u_n \geq \frac{1}{2n}.$$

Alors, pour tout entier $n \geq N+1$:

$$\sum_{k=N}^{n-1}\left(u_{k+1} - u_k\right) \geq \sum_{k=N}^{n-1} \frac{1}{2k} \iff u_n - u_N \geq \frac{1}{2}\sum_{k=N}^{n-1}\frac{1}{k} \iff u_n \geq u_N + \frac{1}{2}\sum_{k=N}^{n-1}\frac{1}{k}.$$

Or, la série harmonique $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge et $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} = +\infty$, donc par comparaison :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La série } \sum u_n \text{ diverge grossièrement.}}$$

Exercice II

La base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la famille $\left(E_{i,j}\right)_{i,j\in[\![1,n]\!]}$ avec $E_{i,j}=\left(\delta_{i,k}\delta_{\ell,j}\right)_{k,\ell\in[\![1,n]\!]}$ pour tout $i,j\in[\![1,n]\!]$ (où $\delta_{a,b}$ est le symbole de Kronecker).

Posons pour tout $i,j\in[\![1,n]\!]$:

$$F_{i,j}=\begin{cases}E_{i,i} & \text{quand } i=j\\ E_{i,i}+E_{i,j} & \text{quand } i\neq j\end{cases}=E_{i,i}+(1-\delta_{i,j})E_{i,j}.$$

Pour tout $i,j\in[\![1,n]\!]$:

- Si $i=j$, $F_{i,i}=E_{i,i}$ est diagonale.
- Si $i\neq j$, $F_{i,j}$ est une matrice triangulaire n'ayant que deux colonnes non nulles et égales, donc $rg\,(F_{i,j})=1$ et, d'après le théorème du rang, $\dim\ker F_{i,j}=n-1$. Il y un seul 1 sur la diagonale, donc $\dim\ker\left(F_{i,j}-I_n\right)=1$. Ainsi :

  $$\dim\ker F_{i,j}+\dim\ker\left(F_{i,j}-I_n\right)=n=\dim\mathbb{R}^n.$$

  Donc, $F_{i,j}$ est diagonalisable.

  On aurait aussi pu remarquer que $F_{i,j}^2=F_{i,j}$, donc que $F_{i,j}$ est une matrice de projecteur donc diagonalisable, ou encore, $X^2-X=X(X-1)$ est scindé à racines simples et annule $F_{i,j}$, donc $F_{i,j}$ est diagonalisable.

Par ailleurs :

$$\begin{aligned}\operatorname{Vect}\left(\left(F_{i,j}\right)_{i,j\in[\![1,n]\!]}\right)&=\operatorname{Vect}\left(\left(E_{i,i}\right)_{i\in[\![1,n]\!]},\left(E_{i,i}+E_{i,j}\right)_{i,j\in[\![1,n]\!],\,i\neq j}\right)\\&=\operatorname{Vect}\left(\left(E_{i,i}\right)_{i\in[\![1,n]\!]},\left(E_{i,j}\right)_{i,j\in[\![1,n]\!],\,i\neq j}\right)=\operatorname{Vect}\left(\left(E_{i,j}\right)_{i,j\in[\![1,n]\!]}\right)=\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\end{aligned}$$

Ceci prouve que la famille $\left(F_{i,j}\right)_{i,j\in[\![1,n]\!]}$ est génératrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc c'est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, car elle contient $n^2=\dim\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrices.

Nous avons vu que toutes les $F_{i,j}$ sont diagonalisables, donc :

$$\boxed{\left(E_{i,i}+(1-\delta_{i,j})E_{i,j}\right)_{i,j\in[\![1,n]\!]}\text{ est une base de }\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\text{ constituée de matrices diagonalisables.}}$$

Exercice III

Commençons par remarquer qu'une matrice 2×2 de la forme $\begin{pmatrix}a&1\\0&b\end{pmatrix}$ est diagonalisable si et seulement $a\neq b$. En effet, la matrice étant triangulaire, ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux. Alors, si $a\neq b$, la matrice 2×2 admet 2 valeurs propres distinctes, donc est diagonalisable et si $a=b$, alors la matrice admet une seule valeur propre et si elle était diagonalisable, elle serait semblable, donc égale, à aI_2, ce qui n'est pas, donc la matrice n'est pas diagonalisable.

Ainsi, pour tout $\omega \in \Omega$, $A(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & 1 \\ 0 & Y(\omega) \end{pmatrix}$ est diagonalisable si et seulement $X(\omega) \neq Y(\omega)$ et la probabilité que la matrice *A* soit diagonalisable est :

$$P(X \neq Y) = 1 - P(X = Y) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = Y = n) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n, Y = n).$$

Comme les variables *X* et *Y* sont indépendantes :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n, Y = n) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n) P(Y = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} p(1-p)^{n-1} q(1-q)^{n-1} \\ &= pq \sum_{n=1}^{+\infty} \left[(1-p)(1-q)\right]^{n-1} = pq \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(1-p)(1-q)\right]^{n} \\ &= \frac{pq}{1-(1-p)(1-q)} = \frac{pq}{q+p-pq}\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La probabilité que la matrice } A = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \text{ soit diagonalisable } 1 - \frac{pq}{q+p-pq}.}$$

Planche n° 20

Exercice I

Pour tout $x \in E$, $1 + \|x\| \neq 0$, donc $f(x)$ est défini. De plus :

$$\|f(x)\| = \left\| \frac{1}{1+\|x\|} x \right\| = \frac{\|x\|}{1+\|x\|} < 1.$$

Donc, $f(x) \in B(0,1)$ et ainsi, *f* est bien définie sur *E* et à images dans $B(0,1)$.

Soit $y \in B(0,1)$. On a :

$$f(x) = y \iff \frac{1}{1+\|x\|} x = y \iff \begin{cases} \dfrac{\|x\|}{1+\|x\|} = \|y\| < 1 \\ x = (1+\|x\|)\, y \end{cases} \iff \begin{cases} \|x\| = \dfrac{\|y\|}{1-\|y\|} \\ x = (1+\|x\|)\, y \end{cases} \iff x = \frac{1}{1-\|y\|} y$$

Ceci prouve que :

$$\boxed{f \text{ est bijective de } E \text{ dans } B(0,1).}$$

Remarquons que la réciproque de *f* est $y \mapsto \dfrac{1}{1-\|y\|} y$, définie sur $B(0,1)$.

Pour tous $x, x' \in E$, on a :

$$f(x)-f(x')=\frac{1}{1+\|x\|}x-\frac{1}{1+\|x'\|}x'=\frac{1}{(1+\|x\|)(1+\|x'\|)}\left[(1+\|x'\|)x-(1+\|x\|)x'\right]$$
$$=\frac{1}{(1+\|x\|)(1+\|x'\|)}\left[x-x'+\|x'\|x-\|x\|x'\right]$$
$$=\frac{1}{(1+\|x\|)(1+\|x'\|)}\left[x-x'+\|x'\|x-\|x'\|x'+\|x'\|x'-\|x\|x'\right]$$
$$=\frac{1}{(1+\|x\|)(1+\|x'\|)}\left[(1+\|x'\|)(x-x')+(\|x'\|-\|x\|)x'\right]$$
$$=\frac{1}{1+\|x\|}(x-x')+\frac{1}{(1+\|x\|)(1+\|x'\|)}(\|x'\|-\|x\|)x'$$

Alors :

$$\|f(x)-f(x')\|\leq\frac{1}{1+\|x\|}\|x-x'\|+\frac{\|x'\|}{(1+\|x\|)(1+\|x'\|)}\big|\|x'\|-\|x\|\big|$$

Or, $\dfrac{\|x'\|}{(1+\|x\|)(1+\|x'\|)}\leq\dfrac{1}{1+\|x\|}\leq 1$ et $\big|\|x'\|-\|x\|\big|\leq\|x-x'\|$, donc pour tous $x,x'\in E$:

$$\|f(x)-f(x')\|\leq 2\|x-x'\|.$$

Ainsi :

$$\boxed{f\text{ est 2- lipschitzienne.}}$$

<u>Exercice II</u>

Pour $(P,Q)\in\mathbb{R}[X]^2$, $t\mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est continue sur $[0,+\infty[$.

De plus, $P(t)Q(t)e^{-t}\underset{t\to+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées et $\displaystyle\int^{+\infty}\frac{dt}{t^2}$ converge, donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}P(t)Q(t)e^{-t}dt$ converge et $(P,Q)\mapsto(P\,|\,Q)$ est bien définie sur $\mathbb{R}[X]^2$.

- $(\cdot\,|\,\cdot)$ est clairement symétrique et bilinéaire du fait de la linéarité de l'intégrale.
- De plus, pour tout $P\in\mathbb{R}[X]$, on a $(P\,|\,P)=\displaystyle\int_0^{+\infty}P(t)^2e^{-t}dt$.

  Or, $P(t)^2e^{-t}\geq 0$ pour tout $t\in[0,+\infty[$, donc par positivité de l'intégrale, on a $(P\,|\,P)\geq 0$ et $(\cdot\,|\,\cdot)$ est positive.
- Et, pour tout $P\in\mathbb{R}[X]$:

$$(P\,|\,P)=\int_0^{+\infty}P(t)^2e^{-t}dt=0 \iff P(t)^2e^{-t}=0 \text{ pour tout } t\in[0,+\infty[$$
$$\iff P(t)^2=0 \text{ pour tout } t\in[0,+\infty[$$
$$\iff P(t)=0 \text{ pour tout } t\in[0,+\infty[$$

  car $t\mapsto P(t)^2e^{-t}$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$ et $e^{-t}\neq 0$ pour tout $t\in[0,+\infty[$.

Or, si P est nul sur $[0,+\infty[$, il admet une infinité de racines, donc il est nul.

Ainsi, $(\cdot|\cdot)$ est définie.

Finalement :

$$\boxed{(\cdot|\cdot) \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}[X], \text{ donc sur } \mathbb{R}_n[X].}$$

Pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, $\mathrm{Vect}\left(1, X, \dots, X^k\right)=\mathrm{Vect}\left(Q_0, Q_1, \dots, Q_k\right)$ et $\deg Q_k = k$.

On a $(1|1)=\int_0^{+\infty} e^{-t}dt=1$, donc on peut prendre $Q_0=1$.

Pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, on a $\deg Q_k' = k-1$, donc $Q_k'\in \mathrm{Vect}\left(1, X, \dots, X^{k-1}\right)=\mathrm{Vect}\left(Q_0, Q_1, \dots, Q_{k-1}\right)$ et ainsi, $Q_k' \perp Q_k$ (car $Q_j\perp Q_k$ pour tout $j\neq k$).

De plus, les fonctions Q_k^2 et $t\mapsto e^{-t}$ étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, une intégration par parties donne pour tout $x\in\mathbb{R}_+$:

$$\int_0^x 2Q_k'(t)Q_k(t)e^{-t}dt=\left[Q_k(t)^2e^{-t}\right]_0^x+\int_0^x Q_k(t)^2e^{-t}dt=Q_k(x)^2e^{-x}-Q_k(0)^2+\int_0^x Q_k(t)^2e^{-t}dt.$$

Comme $\lim_{x\to+\infty} Q_k(x)^2e^{-x}=0$ par croissances comparées, on peut passer à la limite que $x\to+\infty$, ce qui donne :

$$2\int_0^{+\infty} Q_k'(t)Q_k(t)e^{-t}dt=-Q_k(0)^2+\int_0^{+\infty} Q_k(t)^2e^{-t}dt.$$

Soit :

$$2\left(Q_k'|Q_k\right)=-Q_k(0)^2+\|Q_k\|^2.$$

Et comme $Q_k'\perp Q_k$ et $\|Q_k\|=1$, on obtient :

$$-Q_k(0)^2+1=0.$$

Donc, $Q_k(0)^2=1$ pour tout $k\in[\![1,n]\!]$ et cette relation reste vraie pour Q_0.

Ainsi, pour tout $k\in[\![0,n]\!]$:

$$\boxed{Q_k(0)^2=1}$$

On pose $F=\left\{P\in\mathbb{R}_n[X],\, P(0)=0\right\}$. On a :

$$P=a_nX^n+\dots+a_1X+a_0\in F \quad\Leftrightarrow\quad P(0)=a_0=0 \quad\Leftrightarrow\quad P=a_nX^n+\dots+a_1X\in\mathrm{Vect}\left(X^n,\dots,X\right)$$

Donc, $F=\mathrm{Vect}\left(X^n,\dots,X\right)$ et donc $\dim F=n$. Alors :

$$\dim F^\perp=\dim\mathbb{R}_n[X]-\dim F=n+1-n=1.$$

Soit A un polynôme non nul de $F^{\perp}$.

Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on a $Q_k - Q_k(0) \in F$, donc :

$$\left(A \mid Q_k - Q_k(0)\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(A \mid Q_k\right) = \left(A \mid Q_k(0)\right) = Q_k(0)\left(A \mid 1\right).$$

Comme la base $\left(Q_0, Q_1, \dots, Q_n\right)$ est orthonormée, on a $A = \sum_{k=0}^{n} \left(A \mid Q_k\right) Q_k$, et donc :

$$A = \sum_{k=0}^{n} Q_k(0)\left(A \mid 1\right) Q_k = \left(A \mid 1\right) \sum_{k=0}^{n} Q_k(0) Q_k .$$

Et donc en choisissant A tel que $\left(A \mid 1\right) = 1$ (c'est possible car $A \in F^{\perp}$ et $1 \notin F$), on obtient :

$$A = \sum_{k=0}^{n} Q_k(0) Q_k .$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{Une base de } F^{\perp} \text{ est } (A) \text{ avec } A = \sum_{k=0}^{n} Q_k(0) Q_k .}$$

En notant p_F la projection orthogonale sur F, on a :

$$d(1, F) = \left\| 1 - p_F(1) \right\| .$$

Or, $1 = \lambda A + p_F(1)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, donc $d(1,F) = \|\lambda A\| = |\lambda| . \|A\|$ et :

$$\left(A \mid 1\right) = \left(A \mid \lambda A + p_F(1)\right) = \lambda \left(A \mid A\right) = \lambda \|A\|^2 .$$

Donc :

$$d(1,F) = \frac{\left|\left(A \mid 1\right)\right|}{\|A\|^2} \|A\| = \frac{\left|\left(A \mid 1\right)\right|}{\|A\|} = \frac{\left|\left(A \mid 1\right)\right|}{\|A\|} .$$

Et on a $\left(A \mid 1\right) = 1$ et $\|A\| = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} Q_k(0)^2} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} 1} = \sqrt{n+1}$, donc :

$$\boxed{d(1,F) = \frac{1}{\sqrt{n+1}}}$$