

Préparation aux oraux : série 0 – Corrigés

Exercice n° 1

a. On a $\ln(1-h) = -h - \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{3} + O(h^4)$, donc :

$$\begin{aligned} u_n &= \cos\left(n^2\pi \ln\left(\frac{n-1}{n}\right)\right) = \cos\left(n^2\pi \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) = \cos\left(n^2\pi \left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right) \\ &= \cos\left(-n\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= (-1)^n \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{\pi}{3n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \frac{\pi(-1)^{n+1}}{3n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

La série $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge d'après le CSSA et la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, donc :

La série $\sum u_n$ converge.

b. Si $a = b$, la suite n'est pas définie.

Si $b > a$, on a :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n n^b} = \frac{1}{n^b + (-1)^n n^a} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^b}$$

Donc, $\sum u_n$ converge si et seulement si $b > 1$.

Si $b < a$, on a :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n n^b} = \frac{(-1)^n}{n^a} \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{n^{a-b}}} = \frac{(-1)^n}{n^a} \left(1 - \frac{(-1)^n}{n^{a-b}} + o\left(\frac{1}{n^{a-b}}\right)\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{n^a} - \frac{1}{n^{2a-b}} + o\left(\frac{1}{n^{2a-b}}\right) \end{aligned}$$

- Si $a \leq 0$, $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n^a}$ et $\left(\frac{(-1)^n}{n^a}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ diverge, donc $\sum u_n$ diverge grossièrement.

- Si $a > 0$, $\sum \frac{(-1)^n}{n^a}$ converge d'après le CSSA, donc $\sum u_n$ et $\sum \left(u_n - \frac{(-1)^n}{n^a}\right)$ sont de même nature. Or, $u_n - \frac{(-1)^n}{n^a} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{n^{2a-b}}$, donc $\sum u_n$ et $\sum \frac{1}{n^{2a-b}}$ sont de même nature.

Ainsi, $\sum u_n$ converge si et seulement si la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{2a-b}}$ converge, donc si et seulement si $2a-b > 1$.

Finalement :

$\sum u_n$ converge si et seulement si :

- $b > a$ et $b > 1$;
- ou
- $b < a$, $a > 0$ et $2a-b > 1$.

- c. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction arctangente est dérivable sur $[n, n+\alpha]$, donc d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_n \in]n, n+\alpha[$ tel que :

$$\frac{\arctan(n+\alpha) - \arctan n}{n+\alpha - n} = \frac{\arctan(n+\alpha) - \arctan n}{\alpha} = \arctan' c_n = \frac{1}{1+c_n^2}.$$

Soit $u_n = \frac{\alpha}{1+c_n^2}$ et comme $0 \leq n < c_n < n+\alpha$, on a pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 < u_n = \frac{\alpha}{1+c_n^2} < \frac{\alpha}{1+n^2} < \frac{\alpha}{n^2}$$

Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, par comparaison :

La série $\sum u_n$ converge.

Exercice n° 2

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$x^x = e^{x \ln x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x \ln x)^n}{n!}.$$

Posons pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \frac{(x \ln x)^n}{n!}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, la fonction $x \mapsto x^n (\ln x)^{n-k}$ est continue sur $]0, 1]$ et prolongeable par continuité en 0 (avec $\lim_{x \rightarrow 0} x^n (\ln x)^{n-k} = 0$ par croissances comparées), donc est bien définie.

Ceci implique entre autres que f_n est continue sur $]0,1]$, $\int_0^1 f_n(x) dx$ converge et comme f_n est de signe constant sur $]0,1]$ (dépendant de la parité de n), f_n est intégrable sur $]0,1]$ avec :

$$\int_0^1 |f_n(x)| dx = \frac{1}{n!} \left| \int_0^1 x^n (\ln x)^n dx \right|.$$

Prouvons maintenant par récurrence finie sur k que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a :

$$\int_0^1 (x \ln x)^n dx = \frac{(-1)^k}{(n+1)^k} \frac{n!}{(n-k)!} \int_0^1 x^n (\ln x)^{n-k} dx.$$

- Pour $k=0$, on a bien $\frac{(-1)^0}{(n+1)^0} \frac{n!}{(n-0)!} \int_0^1 x^n (\ln x)^{n-0} dx = \int_0^1 (x \ln x)^n dx$: la relation est vraie.
- Supposons la relation vraie à un rang $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

Par intégration par parties, on a pour tout $\varepsilon \in]0,1]$ (et avec $(\ln 1)^{n-k} = 0$ car $n-k > 0$) :

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^1 x^n (\ln x)^{n-k} dx &= \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} (\ln x)^{n-k} \right]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \frac{1}{n+1} x^{n+1} (n-k) \frac{1}{x} (\ln x)^{n-k-1} dx \\ &= -\frac{1}{n+1} \varepsilon^{n+1} (\ln \varepsilon)^{n-k} - \frac{n-k}{n+1} \int_\varepsilon^1 x^n (\ln x)^{n-(k+1)} dx \end{aligned}$$

Comme $\int_0^1 x^n (\ln x)^{n-k} dx$ converge et $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon^{n+1} (\ln \varepsilon)^{n-k} = 0$, on peut écrire :

$$\int_0^1 x^n (\ln x)^{n-k} dx = -\frac{n-k}{n+1} \int_0^1 x^n (\ln x)^{n-(k+1)} dx.$$

Alors, par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x \ln x)^n dx &= \frac{(-1)^k}{(n+1)^k} \frac{n!}{(n-k)!} \int_0^1 x^n (\ln x)^{n-k} dx \\ &= \frac{(-1)^k}{(n+1)^k} \frac{n!}{(n-k)!} \left(-\frac{n-k}{n+1} \int_0^1 x^n (\ln x)^{n-(k+1)} dx \right) \\ &= \frac{(-1)^{k+1}}{(n+1)^{k+1}} \frac{n!}{(n-(k+1))!} \int_0^1 x^n (\ln x)^{n-(k+1)} dx \end{aligned}$$

Et ainsi, la propriété est vraie au rang $k+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire donc vraie pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. En particulier

pour $k=n$, on obtient $\int_0^1 (x \ln x)^n dx = \frac{(-1)^n}{(n+1)^n} n! \int_0^1 x^n dx = \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}} n!$ et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^1 |f_n(x)| dx = \frac{1}{n!} \left| \int_0^1 x^n (\ln x)^n dx \right| = \frac{1}{n!} \left| \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}} n! \right| = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}.$$

Remarquons que $\int_0^1 |f_0(x)| dx = \int_0^1 dx = 1 = \frac{1}{1^1}$, donc la relation ci-dessus reste vraie pour $n=0$.

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \frac{1}{(n+1)^{n+1}} \leq \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, donc par comparaison, $\sum \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$, soit $\sum \int_0^1 |f_n(x)| dx$, converge.

Ainsi :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue, donc continue par morceaux, et intégrable sur $]0,1]$.
- La série $\sum f_n$ converge simplement vers $x \mapsto x^x$, qui continue par morceaux sur $]0,1]$.
- La série $\sum \int_0^1 |f_n(x)| dx$ converge.

Alors, $x \mapsto x^x$ est intégrable sur $]0,1]$ et :

$$\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

En ré-indiquant, on obtient :

$$\boxed{\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}}$$

Exercice n° 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\int_0^1 x^{3n+1} dx = \frac{1}{3n+2}}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{(-1)^n}{3n+2} = \int_0^1 (-1)^n x^{3n+1} dx$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1[$:

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k x^{3k+1} = x \sum_{k=0}^n (-x^3)^k = x \frac{1 - (-x^3)^{n+1}}{1 + x^3} = \frac{x}{1 + x^3} + (-1)^n \frac{x^{3n+4}}{1 + x^3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{1 + x^3}.$$

Et :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{3k+2} &= \sum_{k=0}^n \int_0^1 (-1)^k x^{3k+1} dx = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k x^{3k+1} \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x}{1+x^3} + (-1)^n \frac{x^{3n+4}}{1+x^3} \right) dx = \int_0^1 \frac{x}{1+x^3} dx + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{3n+4}}{1+x^3} dx \end{aligned}$$

De plus :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{3n+4}}{1+x^3} dx \leq \int_0^1 x^{3n+4} dx = \frac{1}{3n+5}.$$

Et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3n+5} = 0$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x^{3n+4}}{1+x^3} dx = 0$ d'après le théorème des gendarmes.

Ainsi, $\sum \frac{(-1)^n}{3n+2}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+2} = \int_0^1 \frac{x}{1+x^3} dx$.

Enfin :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x}{1+x^3} dx &= \int_0^1 \frac{1}{3} \left(\frac{x+1}{1-x+x^2} - \frac{1}{1+x} \right) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^1 \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} dx}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right)^2 + 1} + \frac{1}{6} \int_0^1 \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx - \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{dx}{1+x} \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right) + \frac{1}{6} \ln(x^2-x+1) - \frac{1}{3} \ln(1+x) \right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{3} \ln 2 \end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\sum \frac{(-1)^n}{3n+2} \text{ converge et } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+2} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{3} \ln 2.}$$

Remarquons qu'en posant $f_n(x) = (-1)^n x^{3n+1}$, $\sum f_n$ CVS vers $x \mapsto \frac{x}{1+x^3}$ sur $[0,1[$ et :

- $\sup_{x \in [0,1[} \left| \sum_{k=0}^n f_k(x) - \frac{x}{1+x^3} \right| = \sup_{x \in [0,1[} \left| \frac{x^{3n+4}}{1+x^3} \right| \geq \frac{1^{3n+4}}{1+1^3} = \frac{1}{2}$, donc $\sum f_n$ ne converge pas uniformément vers $x \mapsto \frac{x}{1+x^3}$ sur $[0,1[$ et on ne peut pas utiliser le premier théorème d'intégration terme à terme.
- $\sum_{n=0}^1 |f_n|$ ne converge pas, donc on ne peut pas utiliser le second théorème d'intégration terme à terme.

Exercice n° 4

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f(x) = \frac{e^{x^2} - 1}{x} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(n+1)!}.$$

Ainsi, en posant $f(0) = 0$, on prolonge f en une fonction développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

Comme les fonctions développables en série entière sont de classe C^∞ sur leur intervalle ouvert de convergence :

La fonction f est prolongeable en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(n+1)!}$ et $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n+1)x^{2n}}{(n+1)!}$, donc $f'(x) \geq f'(0) = 1 > 0$.

La fonction est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Par croissances comparées, $\lim_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$.

Finalement, est continue sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante de $-\infty$ à $+\infty$, donc d'après le théorème de la bijection continue :

La fonction f prolongée par continuité en 0 réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Comme f' ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$, f et f^{-1} ont la même régularité, donc :

La fonction f^{-1} est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice n° 5

1) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{x}{n}\right)$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ avec pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_n^{(k)}(x) = \frac{1}{n^{k+2}} \sin\left(\frac{x}{n} + k \frac{\pi}{2}\right).$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \mathbb{N}$, $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n^{(k)}(x)| = \max_{x \in \mathbb{R}} |f_n^{(k)}(x)| = \frac{1}{n^{k+2}}$. Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{k+2}}$ converge (car $k+2 > 1$), la série $\sum f_n^{(k)}$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}$.

Ceci permet de conclure que :

$$f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{x}{n}\right) \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}.$$

2) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{\arctan(nx)}{n^2}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = \frac{\pi}{2n^2}$. Comme la série $\sum \frac{\pi}{2n^2}$ converge, $\sum f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}$. Ainsi :

La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) = \frac{1}{n} \frac{1}{1+(nx)^2}$.

Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $x \in]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$, on a $|f_n'(x)| \leq \frac{1}{n} \frac{1}{1+(na)^2} \leq \frac{1}{a^2 n^3}$ et

$\sum \frac{1}{a^2 n^3}$ converge, donc $\sum f_n'$ converge normalement, donc uniformément sur les intervalles $[a, +\infty[$ et $] -\infty, -a]$. Ainsi, f est de classe C^1 sur $] -\infty, -a] \cup [a, +\infty[$. Ceci étant vrai pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, f est de classe C^1 sur $\bigcup_{a \in \mathbb{R}_+^*} (]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[) = \mathbb{R}^*$.

Reste à étudier la dérivabilité en 0.

On a $f(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(0)}{n^2} = 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(nx)}{n^2 x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} g(nx)$$

avec $g(t) = \frac{\arctan t}{t}$.

On a $\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = 1$, donc il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $t \in [-\alpha, \alpha]$, $g(t) \geq \frac{1}{2}$.

De plus, comme $\arctan t$ et t sont de même signe, g est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$.

Comme la série harmonique diverge, pour tout réel $A > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \geq A$ et pour tout réel x tel que $Nx \in [-\alpha, \alpha]$, on a pour tout $nx \in [-\alpha, \alpha]$ pour tout

$n \in \llbracket 1, N \rrbracket$, donc pour tout $x \in \left[-\frac{\alpha}{N}, \frac{\alpha}{N}\right] \setminus \{0\}$:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \geq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} g(nx) \geq \sum_{n=1}^N \frac{1}{2n} \geq A.$$

Ceci prouve que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$ et donc que f n'est pas dérivable en 0.

Finalement :

La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$, mais pas dérivable en 0.

Exercice n° 6

Pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\operatorname{sh} t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}}$$

Soit $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ une éventuelle solution de (E) développable en série entière sur $] -R, R[$.

Pour tout $t \in] -R, R[$, $f'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1}$ et $f''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}$. On a :

$$\begin{aligned} t f''(t) + 2 f'(t) - t f(t) &= 0 \Leftrightarrow t \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n t^{n-2} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} - t \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1) a_n t^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2n a_n t^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^{n+1} = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1) a_n t^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^{n+1} = 0 \\ &\Leftrightarrow 2a_1 + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+3) a_{n+2} t^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^{n+1} = 0 \\ &\Leftrightarrow 2a_1 + \sum_{n=0}^{+\infty} [(n+2)(n+3) a_{n+2} - a_n] t^{n+1} = 0 \end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière, on obtient $a_1 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+2} = \frac{1}{(n+2)(n+3)} a_n.$$

Prouvons par récurrence sur k que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_{2k} = \frac{a_0}{(2k+1)!}$ et $a_{2k+1} = 0$.

- Pour $k = 0$, on a bien $\frac{a_0}{(2 \times 0 + 1)!} = a_0$ et $a_1 = 0$. La propriété est vraie.

- Supposons la propriété vraie à un rang $k \in \mathbb{N}$.

Avec la relation établie plus haut et l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} a_{2k+2} &= \frac{1}{(2k+2)(2k+3)} a_{2k} = \frac{1}{(2k+2)(2k+3)} \frac{a_0}{(2k+1)!} = \frac{a_0}{(2k+3)!} \\ a_{2k+3} &= \frac{1}{(2k+3)(2k+4)} a_{2k+1} = 0 \end{aligned}$$

La propriété est donc vraie au rang $k+1$.

La propriété est initialisée et héréditaire donc vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$ et ainsi, pour tout $t \in] -R, R[$:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_0}{(2n+1)!} t^{2n} = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Si $t \neq 0$, on a peut écrire $f(t) = a_0 \frac{\text{sh } t}{t}$ et comme le rayon de convergence de $\sum \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$ est infini, on peut prendre $R = +\infty$.

Finalement :

Une solution de (E) développable en série entière sur $\mathbb{R}$ est $f : t \mapsto \begin{cases} \frac{\text{sh } t}{t} & \text{sur } \mathbb{R}^* \\ 1 & \text{en } 0 \end{cases}$.
--

Soit g une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Posons $h(t) = tg(t)$ pour tout $t \in I$.

Comme g est deux fois dérivable sur I (par définition), h l'est aussi en tant que produit de telles fonctions et pour tout $t \in I$, $h''(t) = tg''(t) + 2g'(t)$.

Alors, g une solution de (E) sur I si et seulement si $tg''(t) + 2g'(t) - tg(t) = h''(t) - h(t) = 0$, donc si et seulement si h est solution de $y'' - y = 0$ sur I , soit $h = \lambda \text{sh} + \mu \text{ch}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Quand $0 \notin I$, on obtient alors pour tout $t \in I$:

$$g(t) = \frac{h(t)}{t} = \lambda \frac{\text{sh } t}{t} + \mu \frac{\text{ch } t}{t} = \lambda f(t) + \mu \frac{\text{ch } t}{t}.$$

Ainsi :

Toute solution de (E) sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ ne contenant pas 0 est de la forme $t \mapsto \lambda f(t) + \mu \frac{\text{ch } t}{t}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Remarquons que les seules solutions de (E) prolongeables par continuité sont les fonctions proportionnelles à f .

Exercice n° 7

1) On a $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{\ln t}{t-1} = \ln'(1) = 1$, donc $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t-1}{\ln t} = \frac{1}{1} = 1$ et ainsi :

La fonction $t \mapsto \frac{t-1}{\ln t}$ est prolongeable par continuité en 1.

2) Soit $x \in]-1, +\infty[$.

- La fonction $t \mapsto \frac{t-1}{\ln t} t^x$ est continue sur $]0, 1[$ en tant que produit de telles fonctions.
- $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t-1}{\ln t} = 0$, donc $\frac{t-1}{\ln t} t^x = o(t^x)$ et l'intégrale de Riemann $\int_0^x t^x dt$ converge car $x > -1$;
ainsi, $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x dt$ converge.

- $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t-1}{\ln t} t^x = 1$ (question 1), donc $\int \frac{t-1}{\ln t} t^x dt$ converge.

Finalement, $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x dt$ existe et converge pour tout $x \in]-1, +\infty[$, donc :

La fonction f est définie sur $]-1, +\infty[$.

3) Posons $h(x, t) = \frac{t-1}{\ln t} t^x = \frac{t-1}{\ln t} e^{x \ln t}$ pour $(x, t) \in]-1, +\infty[\times]0, 1[$.

- Pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $t \mapsto h(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0, 1[$ (question précédente).
- Pour tout $t \in]0, 1[$, $x \mapsto h(x, t)$ est de classe C^1 sur $]-1, +\infty[$.
- Pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $t \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = (t-1)t^x$ est continue par morceaux sur $]0, 1[$.
- Pour tout réel $a > -1$, pour tout $(x, t) \in [a, +\infty[\times]0, 1[$, on a :

$$\left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| = (1-t)t^x \leq (1-t)t^a$$

et la fonction $t \mapsto (1-t)t^a = t^a - t^{a+1}$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0, 1[$, donc sur $]0, 1[$ (car $a > -1$ et $a+1 > 0 > -1$).

Ainsi, $t \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x, t)$ est intégrable sur $]0, 1[$ et :

f est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$, avec $f' : x \mapsto \int_0^1 (t-1)t^x dt$.

On a de plus pour tout $x \in]-1, +\infty[$:

$$\int_0^1 (t-1)t^x dt = \int_0^1 (t^{x+1} - t^x) dt = \left[\frac{t^{x+2}}{x+2} - \frac{t^{x+1}}{x+1} \right]_0^1 = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}.$$

Donc :

$$f' : x \mapsto \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}$$

4) Comme la fonction f est dérivable sur $[a, +\infty[$ pour tout réel $a > -1$, elle est dérivable sur $\bigcup_{a > -1} [a, +\infty[=]-1, +\infty[$. Ainsi :

f est dérivable sur $]-1, +\infty[$, avec $f' : x \mapsto \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}$.

5) On a pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}$, donc :

$$f(x) = \ln(x+2) - \ln(x+1) + c = \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right) + c$$

avec $c \in \mathbb{R}$.

Remarquons qu'alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right) + c = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x+1}\right) + c = c.$$

Soit $t \in]0, 1[$. La fonction $\ln$ est dérivable sur $[t, 1]$, donc d'après le théorème des accroissements finis, il existe $a \in]t, 1[$ tel que $\frac{\ln t}{t-1} = \ln' a = \frac{1}{a}$. Alors :

$$\frac{t-1}{\ln t} = a \in]t, 1[\subset]0, 1[.$$

Ceci prouve que pour tout $t \in]0, 1[$ et tout $x \in]-1, +\infty[$, $0 \leq \frac{t-1}{\ln t} t^x \leq t^x$ et donc :

$$0 \leq f(x) \leq \int_0^1 t^x dt = \frac{1}{x+1}.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0$, le théorème des gendarmes permet de conclure que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = c = 0$ et finalement, pour tout $x \in]-1, +\infty[$:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)$$

Exercice n° 8

La matrice A est symétrique réelle, donc diagonalisable d'après le théorème spectral.

Remarquons que $rg(A) = 1$, donc 0 est valeur propre de A . On a $A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et, avec le théorème du rang, on a $\dim \ker A = 2 - rg(A) = 1$, donc :

$$\ker A = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

On a aussi $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc 2 est valeur propre de A , $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé et ainsi, $\dim \ker(A - 2I_2) \geq 1$. Or, la somme des dimensions de sous-espaces propres ne peut dépasser 2, donc $\dim \ker(A - 2I_2) + \dim \ker A \leq 2$, ce qui donne $\dim \ker(A - 2I_2) \leq 1$ et ainsi, $\ker(A - 2I_2)$ est de dimension 1, ce qui donne :

$$\ker(A - 2I_2) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Finalement, on a :

$$A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} ; \text{ une base de vecteurs propres est } \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

« Que dire de $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 + M = A$? » : question bien vague...

Remarquons déjà que comme A est un polynôme en M , les matrices A et M commutent. Alors, les sous-espaces propres de A sont stables par M . Ainsi, pour $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $MX \in \text{Vect}(X)$, donc $M \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Ainsi, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs propres de M et comme ils forment une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$:

$$M \text{ est diagonalisable dans la base } \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Ceci se traduit par $M = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P^{-1}$ et :

$$\begin{aligned} M^2 + M = A &\Leftrightarrow P \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \mu^2 \end{pmatrix} P^{-1} + P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda^2 + \lambda & 0 \\ 0 & \mu^2 + \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda^2 + \lambda = 0 \\ \mu^2 + \mu - 2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \text{ ou } 0 \\ \mu = -2 \text{ ou } 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Finalement :

Les valeurs propres possibles de M sont :

- -1 et 0 , associées au vecteur propre $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$;
- -2 et 1 , associées au vecteur propre $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Et les matrices M vérifiant la relation $M^2 + M = A$ sont :

$$M_1 = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1}, M_2 = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}, M_3 = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1} \text{ et } M_4 = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Soit :

$$M_1 = -I_2 - \frac{1}{2}A, M_2 = -I_2 + A, M_3 = -A \text{ et } M_4 = \frac{1}{2}A.$$

Exercice n° 9

La matrice A est symétrique réelle, donc d'après le théorème spectral :

A est diagonalisable.

On a :

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \stackrel{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3}{=} \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & c & a \\ a+b+c & a & b \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & c & a \\ 1 & a & b \end{vmatrix} \stackrel{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{=} (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & c-b & a-c \\ 0 & a-b & b-c \end{vmatrix}.$$

En développant par rapport à la première colonne :

$$\begin{aligned} \det A &= (a+b+c) \begin{vmatrix} c-b & a-c \\ a-b & b-c \end{vmatrix} = (a+b+c) [(c-b)(b-c) - (a-c)(a-b)] \\ &= -(a+b+c) [a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca)] \\ &= -(a+b+c) \left[\left(a - \frac{b+c}{2} \right)^2 + \frac{3(b-c)^2}{4} \right] \end{aligned}$$

On a toujours $\left(a - \frac{b+c}{2} \right)^2 + \frac{3(b-c)^2}{4} \geq 0$ avec égalité si et seulement si $b=c$ et $a = \frac{b+c}{2} = b$.

Ainsi, on ne peut pas factoriser davantage et donc, sous forme factorisée :

$$\det A = -(a+b+c) [a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca)]$$

On a :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c \\ b+c+a \\ c+a+b \end{pmatrix} = (a+b+c) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc :

$$(1 \ 1 \ 1)^T \text{ est vecteur propre de } A \text{ associé à la valeur propre } a+b+c.$$

Comme la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, elle possède trois valeurs propres réelles (distinctes ou pas), dont $a+b+c$, comme on vient de le voir. Notons ω et ω' , les deux autres valeurs propres de A . On a alors :

$$\begin{cases} \text{Tr}(A) = a+b+c = a+b+c + \omega + \omega' \\ \det A = (a+b+c)\omega\omega' = -(a+b+c)\alpha \end{cases}$$

avec $\alpha = a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca) = \left(a - \frac{b+c}{2} \right)^2 + \frac{3(b-c)^2}{4} \geq 0$ (comme on l'a vu plus haut).

On a donc :

$$\begin{cases} \omega' = -\omega \\ (a+b+c)(\omega^2 - \alpha) = 0 \end{cases}$$

Si $a+b+c \neq 0$, alors $\omega^2 = \alpha$, donc on peut prendre $\omega = \sqrt{\alpha}$ et $\omega' = -\sqrt{\alpha} = -\omega$. Ainsi :

Si $a+b+c \neq 0$, les valeurs propres de A sont $a+b+c$, ω et $-\omega$ avec $\omega^2 = a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca)$.

Si $a+b+c=0$, $\omega' = -\omega$ persiste et, on peut toujours voir ω et $-\omega$ comme les racines carrées du réel ω^2 . Avec les mêmes manipulations que pour le calcul du déterminant, on obtient :

$$\chi_A = (X - (a+b+c))(X^2 - \alpha) = X(X^2 - \alpha) = X(X^2 - \omega^2)$$

Donc, on a encore $\omega^2 = \alpha$ et ainsi :

Le résultat persiste quand $a+b+c=0$.

Exercice n° 10

Comme $AA^T = A^T A$, on a $(AA^T)^k = (A^T)^k A^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et en particulier $(AA^T)^p = 0_n$. Ainsi, le polynôme X^p , qui n'a que 0 pour racine réelle ou complexe, annule AA^T , et donc la seule valeur propre réelle ou complexe de AA^T est 0.

Or, $(AA^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T$, donc AA^T est symétrique et réelle (car A est réelle). D'après le théorème spectral, AA^T est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Or, la seule matrice diagonalisable n'admettant que 0 pour valeur propre est la matrice nulle, donc :

$$AA^T = 0_n$$

Comme $AA^T = A^T A$, on a aussi $A^T A = 0_n$, donc pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ étant muni de sa norme euclidienne canonique), on a :

$$\|AX\|^2 = (AX)^T(AX) = (X^T A^T)(AX) = X^T(A^T A)X = 0.$$

Par séparation de la norme, on obtient $AX = 0$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, donc :

$$A = 0_n$$

Exercice n° 11

Si on note C_1, C_2, C_3, C_4 les colonnes de M , on a $C_3 = -C_1$, $C_4 = -C_2$ et C_1 et C_2 ne sont pas proportionnelles, donc :

$$\boxed{\text{rg}(M) = 2}$$

On a immédiatement $\text{Im } M = \text{Vect}(C_1, C_2) = \text{Vect}(2C_1, 2C_2) = \text{Vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right]$.

Or, $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux (pour le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$), donc :

$$\boxed{(e_1, e_2) \text{ avec } e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ est une base orthogonale de } \text{Im } M .}$$

Avec le théorème du rang, on a $\dim \ker M = 4 - \text{rg}(M) = 2$.

Or, $M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et les vecteurs $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux, donc :

$$\boxed{(e_3, e_4) \text{ avec } e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ est une base orthogonale de } \ker M .}$$

Pour tout $(i, j) \in \{1, 2\} \times \{3, 4\}$, $(e_i | e_j) = 0$, donc :

$$\boxed{\text{Im } M \text{ et } \ker M \text{ sont orthogonaux.}}$$

On a $M^2 = M$, donc M est une matrice de projection orthogonale (car $\text{Im } M \perp \ker M$). On a alors $\text{Im } M = \ker(M - I_4)$, donc :

$$\boxed{M = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} .}$$

On vient de voir que :

$$\boxed{M \text{ est une matrice de la projection orthogonale sur } \text{Im } M = \text{Vect}(e_1, e_2) .}$$

On a $-1 \notin \text{Sp}(M) = \{0, 1\}$, donc :

$$\det A = \det(I_4 + M) = (-1)^4 \det(-I_4 - M) = \chi_M(-1) \neq 0.$$

Ainsi :

$$A = I_4 + M \text{ est inversible.}$$

On a $M = PDP^{-1}$ avec $D = \text{diag}(1, 1, 0, 0)$, donc :

$$A = I_4 + M = I_4 + PDP^{-1} = P(I_4 + D)P^{-1}$$

avec $I_4 + D = \text{diag}(2, 2, 1, 1)$. On a alors :

$$A^{-1} = P(I_4 + D)^{-1}P^{-1} = P\left(\text{diag}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1\right)\right)P^{-1}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} A^{-n} &= (A^{-1})^n = \left((I_4 + M)^{-1}\right)^n = P\left((I_4 + D)^{-1}\right)^n P^{-1} \\ &= P\left(\text{diag}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1\right)\right)^n P^{-1} = P\left(\text{diag}\left(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n}, 1, 1\right)\right)P^{-1} \end{aligned}$$

Or, $\text{diag}\left(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n}, 1, 1\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \text{diag}(0, 0, 1, 1)$ et l'application $X \mapsto PXP^{-1}$ est linéaire, donc continue sur $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ (qui est de dimension finie). Ainsi :

$$A^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P(\text{diag}(0, 0, 1, 1))P^{-1}.$$

Or, $\text{diag}(0, 0, 1, 1) = I_4 - \text{diag}(1, 1, 0, 0) = I_4 - D$, donc :

$$P(\text{diag}(0, 0, 1, 1))P^{-1} = P(I_4 - D)P^{-1} = I_4 - M.$$

Ainsi :

$$(A^{-n})_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } I_4 - M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice M étant la matrice de p , la projection orthogonale sur $\text{Im } M$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, on a $s = 2p - id$. Alors, $S = 2M - I_4$, soit :

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice n° 12

Ici, $\mathbb{R}^3$, identifié à $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, est muni de sa structure euclidienne canonique.

Remarquons déjà que quand X décrit $\mathbb{R}^3$, $Y = AX$ décrit $\text{Im } A$, donc :

$$\inf_{X \in \mathbb{R}^3} \|AX - B\| = \inf_{Y \in \text{Im } A} \|Y - B\|.$$

Comme on est en dimension finie :

$$\inf_{X \in \mathbb{R}^3} \|AX - B\| = \|p(B) - B\|$$

où p est la projection orthogonale sur $\text{Im } A$.

Cependant, ceci n'est pas très utile ici, car A est inversible, donc $\text{Im } A = \mathbb{R}^3$! En effet :

$$\det A = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{C_1 \leftarrow C_1 + 2C_2 \\ C_3 \leftarrow C_3 + C_2}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0.$$

Ainsi :

$$\inf_{X \in \mathbb{R}^3} \|AX - B\| = \inf_{Y \in \mathbb{R}^3} \|Y - B\| = 0.$$

Cette borne inférieure est un minimum, qui est atteint en $Y = AX = B$. Et avec $X = (x, y, z)$:

$$AX = B \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y - z = 1 \\ x - y + 2z = 1 \\ -x + 2y + z = 1 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} y = 2x + z + 1 \\ -x + z = 2 \\ 3x + 3z = -1 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} y = 2x + z + 1 \\ -x + z = 2 \\ 6z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{2} \\ x = -\frac{7}{6} \\ z = \frac{5}{6} \end{cases}$$

Ainsi :

$$\boxed{\inf_{X \in \mathbb{R}^3} \|AX - B\| = 0 \text{ est atteint en } X = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} .}$$

Exercice n° 13

Comme X_1 , X_2 et X_3 suivent toutes les trois une loi géométrique, on a :

$$X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = X_3(\Omega) = \mathbb{N}^*.$$

L'évènement $(X_1 = X_2 = X_3)$ peut s'écrire $(X_1 = X_2 = X_3) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (X_1 = X_2 = X_3 = n)$. Cette union étant disjointe, on a par σ -additivité :

$$P(X_1 = X_2 = X_3) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X_1 = X_2 = X_3 = n).$$

Les trois variables étant indépendantes :

$$P(X_1 = X_2 = X_3) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X_1 = n) P(X_2 = n) P(X_3 = n).$$

Les trois variables suivant la même loi géométrique de paramètre $1/3$:

$$\begin{aligned} P(X_1 = X_2 = X_3) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(X_1 = n)^3 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{n-1} \right]^3 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\left(\frac{2}{3}\right)^3\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{27} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{8}{27}\right)^{n-1} = \frac{1}{27} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{8}{27}\right)^n = \frac{1}{27} \frac{1}{1 - \frac{8}{27}} \end{aligned}$$

Soit :

$$P(X_1 = X_2 = X_3) = \frac{1}{19}$$

Exercice n° 14

On a (c'est une question de cours) pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P(X > n) = (1 - p)^n$$

Comme $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$, on a $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$(Z = n) = (\min(X, Y) = n) = (X = n, Y > n) \cup (X > n, Y = n) \cup (X = n, Y = n).$$

Cette union étant disjointe, on a par σ -additivité, puis indépendance de X et Y :

$$\begin{aligned} P(Z = n) &= P(X = n, Y > n) + P(X > n, Y = n) + P(X = n, Y = n) \\ &= P(X = n) P(Y > n) + P(X > n) P(Y = n) + P(X = n) P(Y = n) \\ &= p(1 - p)^{n-1} (1 - q)^n + (1 - p)^n q(1 - q)^{n-1} + p(1 - p)^{n-1} q(1 - q)^{n-1} \\ &= [p(1 - q) + (1 - p)q + pq](1 - p)^{n-1} (1 - q)^{n-1} \\ &= (p + q - pq)[(1 - p)(1 - q)]^{n-1} \\ &= (p + q - pq)[1 - (p + q - pq)]^{n-1} \end{aligned}$$

Donc :

$$Z \text{ suit une loi géométrique de paramètre } p + q - pq.$$

Remarquons que $p + q - pq = 1 - (1 - p)(1 - q)$ et $p, q \in]0, 1[$, donc $(1 - p)(1 - q) \in]0, 1[$ et ainsi, $p + q - pq \in]0, 1[$. On a alors :

$$E(Z) = \frac{1}{p + q - pq}$$

Exercice n° 15

Les séries génératrices des variables X et Y sont respectivement $G_X : t \mapsto e^{\lambda(t-1)}$ et $G_Y : t \mapsto e^{\mu(t-1)}$, définies sur $\mathbb{R}$. Comme X et Y sont indépendantes, $G_{X+Y} = G_X G_Y$, donc pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t) = e^{\lambda(t-1)}e^{\mu(t-1)} = e^{(\lambda+\mu)(t-1)}.$$

Comme $t \mapsto e^{(\lambda+\mu)(t-1)}$ est la série génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$ et la loi d'une variable aléatoire est parfaitement définie par sa série génératrice :

$X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

L'évènement « X est pair » peut s'écrire $(X \in 2\mathbb{N}) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (X = 2n)$. Cette union étant disjointe, on a par σ -additivité :

$$P(X \in 2\mathbb{N}) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = 2n) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{2n}}{(2n)!} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2n}}{(2n)!} = e^{-\lambda} \operatorname{ch} \lambda = e^{-\lambda} \frac{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}{2} = \frac{1 + e^{-2\lambda}}{2}.$$

Comme $e^{-2\lambda} > 0$, on a $P(X \in 2\mathbb{N}) > \frac{1}{2}$, donc :

Il est plus probable que X soit pair plutôt qu'impair.