Préparation aux oraux : Modalité des épreuves orales

CCINP

Une épreuve : 1h (30 de préparation + 30 min de présentation dont 20 minutes pour le sujet préparé et 10 minutes pour des questions non préparées).

Centrale-Supélec

Deux épreuves :

- *30 min (sans préparation) ;*
- *1h avec python (dont 30 min préparation).*

Mines-Ponts

Une épreuve : 1h15 (dont 15 min préparation du 1^{er} exercice, $2^{ième}$ exercice sans préparation).

Mines-Télécom

Une épreuve : 30 minutes (sans préparation, résolution de deux exercices portant sur des parties différentes de l'ensemble des programmes de première et deuxième années de la filière du candidat).

e3a-Polytech

Dépend des écoles.

Préparation aux oraux : série 0

Exercice n° 1

Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ dans les cas suivants :

a. $u_n = \cos\left(n^2 \pi \ln\left(\dfrac{n-1}{n}\right)\right)$

b. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n n^b}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$

c. $u_n = \arctan(n+\alpha) - \arctan n$ avec $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Pour la dernière, on pourra penser au théorème des accroissements finis.

Exercice n° 2

Montrer que $\displaystyle\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$.

☺ *On pourra montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *et tout* $k \in [\![0, n]\!]$, *on a* :

$$\int_0^1 (x \ln x)^n dx = \frac{(-1)^k}{(n+1)^k} \frac{n!}{(n-k)!} \int_0^1 x^n (\ln x)^{n-k} dx.$$

Exercice n° 3

Calculer $\displaystyle\int_0^1 x^{3n+1} dx$. Nature et somme de la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{3n+2}$.

Exercice n° 4

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^{x^2} - 1}{x}$, définie sur $\mathbb{R}^*$, est prolongeable en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Montrer que ce prolongement est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. La réciproque est-elle de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$?

Exercice n° 5

1) Montrer que $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{x}{n}\right)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

2) Domaine de définition de $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(nx)}{n^2}$. Etudier la continuité, puis le caractère C^1 de f sur ce domaine.

Exercice n° 6

Donner le développement en série entière de $\operatorname{sh} t$. Trouver une solution développable en série entière de (E) : $t\,y'' + 2y' - t\,y = 0$, puis une autre solution.

Exercice n° 7

Soit $f : x \mapsto \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x \, dt$.

1) Montrer pour tout réel *x*, que $t \mapsto \frac{t-1}{\ln t}$ est prolongeable par continuité en 1.
2) Montrer que *f* est définie sur $\left]-1, +\infty\right[$.
3) Soit un réel $a > -1$. Montrer que *f* est dérivable sur $\left[a, +\infty\right[$ et calculer sa dérivée.
4) Montrer que *f* est dérivable sur $\left]-1, +\infty\right[$.
5) Donner une expression de *f*.

Exercice n° 8

Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, en donnant une base de vecteurs propres de *A*.

Que dire de $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 + M = A$?

Donner les éléments propres de *M*.

Déterminer toutes les matrices vérifiant cette relation.

Exercice n° 9

Montrer sans calcul que $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est diagonalisable. Calculer $\det A$ sous forme factorisée. Montrer que $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$ est vecteur propre de *A*.

Montrer, sans calculer le polynôme caractéristique de *A*, que si $a + b + c \neq 0$, les autres valeurs propres de *A* sont ω et $-\omega$, racines carrées réelles ou complexe d'un réel α.

Montrer que ce résultat persiste quand $a + b + c = 0$.

Exercice n° 10

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AA^{\mathsf{T}} = A^{\mathsf{T}}A$ et il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0_n$. Montrer que $AA^{\mathsf{T}} = 0_n$, puis que $A = 0_n$.

Exercice n° 11

Donner le rang de la matrice $M=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, déterminer son noyau et son image. On donnera une base orthogonale du noyau et de l'image. Montrer que ces deux sous-espaces sont orthogonaux.

Diagonaliser *M*. Préciser l'endomorphisme canoniquement associé à *M*.

Montrer que $A=I_4+M$ est inversible et que $\left(A^{-n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice que l'on donnera. Préciser l'endomorphisme canoniquement associé à cette matrice.

Déterminer, dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, la matrice *S* de la symétrie orthogonale *s* par rapport à $\operatorname{Im} M$.

Exercice n° 12

Déterminer $X\in\mathbb{R}^3$ pour lequel $\inf_{X\in\mathbb{R}^3}\|AX-B\|$ est atteint avec $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice n° 13

Soient X_1, X_2 et X_3 trois variables aléatoires mutuellement indépendantes, suivant chacune une loi géométrique de paramètre 1/3. Calculer $P(X_1=X_2=X_3)$.

Exercice n° 14

Deux variables aléatoires indépendantes *X* et *Y* suivent chacune une loi géométrique de paramètres respectifs $p\in\,]0,1[$ et $q\in\,]0,1[$. Donner $P(X>n)$. Déterminer la loi de $Z=\min(X,Y)$ et son espérance.

Exercice n° 15

Deux variables aléatoires indépendantes *X* et *Y* suivent chacune une loi de Poisson de paramètres respectifs λ et μ. Montrer que $X+Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$. Pariez-vous que *X* est pair ?