Préparation aux oraux : série 1

CCINP

Planche n° 1

I) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle positive. On pose $u_n = \dfrac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_n)}$.

Calculer $u_1 + u_2$ puis généraliser.

Vérifier que $\sum u_n$ converge puis calculer sa somme pour $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

II) On note *E* l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

Vérifier que $(f,g) \mapsto \langle f,g\rangle = \int_0^1 t^2 f(t)g(t)\,dt$ est un produit scalaire sur *E*.

Vérifier l'existence et calculer $\int_0^1 x^n \ln x\,dx$, puis donner le projeté orthogonal $x \mapsto x\ln x$ sur le sous-espace des fonctions affines de *E*.

Calculer $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 \left(at+b-t\ln t\right)^2 t^2 dt$.

Planche n° 2

I) Montrer que $f(x,y) = \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$ pour $(x,y)\neq(0,0)$ et $f(0,0)=0$ est continue sur $\mathbb{R}^2$, puis qu'elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

Etudier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en $(0,0)$. Si c'est le cas, *f* est-elle de classe C^1 en $(0,0)$?

II) Déterminer le rang de $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients $a_{1,i} = a_{i,1} = i$, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$ et tous les autres sont nuls (avec $n\geq 3$). En déduire $\ker A$. La matrice *A* est-elle diagonalisable ?

Que peut-on dire de la multiplicité de la valeur propre 0 ?

Montrer que *A* admet trois valeurs propres : 0, λ et $1-\lambda$.

Trouver un polynôme annulateur de *A* de degré 3.

Planche n° 3

I) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x^n + x\sqrt{n} - 1 = 0$ admet une unique solution $u_n \in [0,1]$.

Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ et la nature $\sum u_n$.

Nature de $\sum (-1)^n u_n$. On pourra prouver, en posant $f_n(x) = x^n + x\sqrt{n} - 1$, que :

$$f_{n+1}(u_n) = u_n - 1 - u_n\sqrt{n}\left(u_n - \sqrt{1+\frac{1}{n}}\right).$$

II) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = BA$. On pose $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & A \end{pmatrix}$.

Montrer que, si *U* et *V* sont semblables, alors pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(U)$ et $P(V)$ le sont aussi.

Exprimer $P(M)$ en fonction de $P(A)$, $P'(A)$ et B.

Montrer que si *A* est diagonalisable et $B = 0_n$, alors *M* est diagonalisable.

Étudier la réciproque et conclure.

Planche n° 4

I) Définir le rayon de convergence d'une série entière, puis déterminer le rayon de convergence *R* de la série entière $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ où $u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,dt$.

Montrer qu'il existe trois réels *a*, *b* et *c*, tels que pour tout $x \in \left]-R, R\right[$ et tout $t \in [0,1]$:

$$\frac{1}{(1+t^2)(1-tx)} = \frac{at+b}{1+t^2} + \frac{c}{1-tx}.$$

Calculer $S(x)$ pour $x \in \left]-R, R\right[$. Montrer que $S(-1)$ existe et la calculer.

II) Soient *f* et *g* deux endomorphismes d'un espace *E* de dimension finie, vérifiant :

$$f^2 = g^2 = id_E \quad \text{et} \quad f \circ g + g \circ f = 0.$$

Montrer que *f* et *g* sont des automorphismes, que $Sp(f) = Sp(g) = \{-1;1\}$ et que *f* est diagonalisable.

Montrer que *g* induit un isomorphisme de $\ker(f - id_E)$ dans $\ker(f + id_E)$ et en déduire que *E* est de dimension paire notée 2*n*.

Montrer qu'il existe une base de *E* dans laquelle les matrices de *f* et *g* sont :

$$\begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & -I_n \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}.$$

Centrale-Supélec

Planche n° 1

Soient A et B deux matrices symétriques réelles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient $A^{2019} = B^{2019}$.

a. Justifier que si A est inversible, A^{2019} l'est aussi.
b. Exprimer les valeurs propres de A^{2019} en fonction de celles de A.
c. Montrer que $A = B$.
d. Si $A^2 = B^2$, a-t-on forcément $A = B$?

Planche n° 2 (Il y a avait des questions Python)

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in [0,\pi]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{u_k}{n+1}\right)$.

Montrer que pour tout $x \in [0,\pi]$, $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$ et pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n=m+1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{2m^2}$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n - \frac{\pi^3}{6(n+1)^2} \leq u_{n+1} \leq v_n$.

En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-\frac{\pi^3}{6(n+1)^3} \leq v_{n+1} - v_n \leq 0$, puis qu'il existe un réel V tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq v_n - V \leq \frac{\pi^3}{12n^2}$.

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la même limite que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Planche n° 3

I) On dit que f est une contraction de E, espace euclidien, si pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| \leq \|x\|$.

Montrer que $f \in S(E)$ est une contraction si et seulement si pour tout $\lambda \in Sp(f)$, $|\lambda| \leq 1$.

Montrer que si $f \in S(E)$, alors pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ et tout $x \in E$, $\|P(f)(x)\| \leq \sup_{\lambda\in Sp(f)} |P(\lambda)|\|x\|$.

Soit $f \in GL(E)$, de matrice M dans une base orthonormée de E. Montrer qu'il existe une matrice $S \in S_n(\mathbb{R})$, à valeurs propres strictement positives et telle que ${}^tMM = S^2$.

II) *Cours* : Inégalité de Markov.

Planche n° 4

I) Montrer que $\phi : (P,Q) \mapsto \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Trouver les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que $\frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{1} P(t)\,dt\right)^2 = \int_{-1}^{1} \left(P(t)\right)^2 dt$.

On donne $P_0 = 1$, $P_1 = X$ et $P_2 = X^2 - \frac{1}{3}$. Montrer que $\left(P_0, P_1, P_2\right)$ est une famille orthogonale (pour le produit scalaire défini ci-dessus) et donner $\mathrm{Vect}\left(P_0, P_1, P_2\right)$.

Déterminer le projeté orthogonal de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$.

Calculer $\inf\left\{\int_{-1}^{1} \left(P(t)\right)^2 dt,\ P \in \mathbb{R}_3[X],\ P \text{ unitaire}\right\}$.

II) *Cours* : Formule de Taylor pour les polynômes ; démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité ; théorème spectral.

Planche n° 5

Pour $x \in \left[1, +\infty\right[$, on pose $u_0(x) = x$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}(x) = u_n(x) + \frac{1}{u_n(x)}$.

Montrer que la suite $\left(u_n(x)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie. Admet-elle une limite ? Si oui, laquelle ?

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \left[1, +\infty\right[$, $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{u_n(x)}$.

Montrer que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $\left[1, +\infty\right[$.

Montrer que $f = \sum_{n \geq 0} f_n$ est continue, mais que $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $\left[1, +\infty\right[$.

Planche n° 6

Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $P_n(X) = X^n - X + 1$ admet au plus une racine réelle.

Donner les racines complexes de P_n' et montrer que P_n est à racines (complexes) simples.

Calculer $d = \begin{vmatrix} 1+r_1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+r_2 & 1 \\ 1 & 1 & 1+r_3 \end{vmatrix}$ où r_1, r_2, r_3 sont les racines de P_3.

Mines-Ponts

Planche n° 1

I) Convergence simple puis uniforme sur $[0;1]$ de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ avec $f_n : x \mapsto n^{-\alpha}x(1-x)^{\alpha}$ pour toute $n\in\mathbb{N}^*$ et $\alpha\in\mathbb{R}$.

Convergence simple puis uniforme sur $[0;1]$ de la série de fonctions $\sum f_n$.

II) Soit *E* un espace vectoriel de dimension finie. Pour $f\in\mathcal{L}(E)$, on note, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $K_n = \ker(f^n)$ et $I_n = \operatorname{Im}(f^n)$.

Montrer que $K = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ et $I = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ sont de sous-espaces vectoriels de *E*.

Prouver qu'il existe $N\in[\![0,\dim E]\!]$ tel que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $K_{N+n} = K_N$, puis que $E = I\oplus K$.

Planche n° 2

I) Donner le rang de la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, puis déterminer une base de son image et de son noyau.

II) Montrer que $f : x\mapsto \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = -\int_0^1 e^{-x(1+t^2)}dt$.

On pose $g(x) = f(x^2)$. Montrer que $g'(x) = -2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$, puis que $g(x) + \left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)^2 = \frac{\pi}{4}$.

En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$.

Planche n° 3

I) Montrer que $I(x) = \int_0^1 \frac{t^x \ln t}{t-1}dt$ existe pour tout $x\in D =]-1,+\infty[$.

Montrer que *I* est de classe C^∞ sur *D* et donner ses dérivées successives.

Exprimer *I* sous forme d'une somme.

II) Soit *f* un endomorphisme de *E*, $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n\in\mathbb{N}^*$, qui laisse stable toute droite de *E*. Justifier que pour tout $x\in E$, il existe $\lambda_x\in\mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$, puis montrer que le coefficient λ_x est indépendant du vecteur *x*.

Soit $k\in[\![1,n-1]\!]$ (pour $n\geq 2$). Montrer que si *f* laisse stable tout sous-espace de dimension *k*, alors *f* est une homothétie.

Planche n° 4

I) Limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots\sqrt{2+2x}}}}}$ (où le symbole racine carrée apparait n fois).

II) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Caractériser les endomorphismes de E qui commutent avec tous les isomorphismes de E.

III) Un magasin dispose d'une quantité $N\in\mathbb{N}^*$ d'un produit. Le nombre de clients arrivant dans une journée suit une loi de Poisson de paramètre $t\in\mathbb{R}_+^*$. Un client achète le produit avec une probabilité $p\in\left]0,1\right[$ (ou repart sans rien). Quelle est la probabilité d'avoir rupture de stock dans la journée ?