Préparation aux oraux : série 2

CCINP

Planche n° 5

I) Donner les solutions polynomiales de $(x^2-1)y''+2xy'-2y=0$.

On pose $y(x)=xz(x)$. Donner une équation différentielle vérifiée par z.

Déterminer trois réels a, b et c tels que $\dfrac{2-4x^2}{x(x^2-1)}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x-1}+\dfrac{c}{x+1}$, pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;0;1\}$.

En déduire z, puis résoudre l'équation initiale sur $\left]-1,1\right[$.

II) Montrer que $(P,Q)\mapsto\langle P,Q\rangle=\int_0^1 PQ$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.

Calculer $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_0^1(t^2-at-b)^2\,dt$.

Planche n° 6

I) Un endomorphisme f d'un espace E de dimension $n\in\mathbb{N}^*$ admet n valeurs propres distinctes $\lambda_1,\dots,\lambda_n$.

Montrer que l'application qui à $P\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$ associe $\big(P(\lambda_1),\dots,P(\lambda_n)\big)\in\mathbb{R}^n$ est un isomorphisme.

Soit $g\in\mathcal{L}(E)$ tel que $fg=gf$. Montrer que tout vecteur propre de f est vecteur propre de g et en déduire que f et g admettent une base commune de vecteurs propres.

II) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes deux une loi de Poisson de paramètres respectifs λ et μ.

Montrer que $Z=X+Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$.

Calculer $P\big(X=k\mid Z=n\big)$ pour tous $k,n\in\mathbb{N}$ et reconnaître cette loi de probabilité.

Planche n° 7

I) Montrer que, si u est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel possédant un polynôme annulateur dont 0 est racine simple, on a $\ker u = \ker u^2$.

Montrer que si u est nilpotent, alors $u = 0$.

II) Soient $a_0 = a_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = a_{n+1} + (n+1)a_n$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < \dfrac{a_n}{n!} \leq 1$.

Déterminer une équation différentielle vérifiée par $f : x \mapsto \sum_{n\geq 0} \dfrac{a_n}{n!} x^n$.

Résoudre cette équation et expliciter a_{2p} et a_{2p+1} pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Planche n° 8

I) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n : x \mapsto (-1)^n \dfrac{e^{-nx}}{n}$. Convergence simple sur $\mathbb{R}_+$ de la série $\sum u_n$.

La fonction somme *f* est-elle continue sur son ensemble de dentition ?

Montrer que la fonction *f* est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, puis la déterminer.

II) Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

Diagonaliser $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Prouver que si A est diagonalisable, alors B l'est aussi et déterminer ses valeurs propres en fonction de celles de A.

Centrale-Supélec

Planche n° 7 (ENSAM)

1) Montrer que $\varphi : (P,Q) \mapsto (P \mid Q) = P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P''(0)Q''(0)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
2) Montrer que la famille $(1, X, X^2)$ est orthogonale.
3) Orthonormaliser la famille $(1, X, X^2)$.
4) Soit f l'application définie par $f(P) = P(1-X)$ pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Montrer que f est un automorphisme et expliciter f^{-1}. L'application f est-elle une isométrie ?

Planche n° 8 (*Il y a avait des questions Python*)

Justifier que la donnée de $z_1 = 1$ et la relation $z_{n+1} = z_n + i\dfrac{z_n}{|z_n|}$ définissent bien une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de nombre complexes. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n le point d'affixe z_n du plan complexe.

Soit g de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, telle que $g(1) = 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} g'(t) = 0$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$:

$$g(t+1) - g(t) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$

Écrire g' sous forme de la somme d'une série de fonctions (on pourra utiliser $g'(t+1) - g'(t)$).

En déduire que $g(t) = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{p+1}}\right) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{p+t}}\right)\right)$.

Soit Γ l'arc paramétré par $\begin{cases} x(t) = \sqrt{t}\cos\big(g(t)\big) \\ y(t) = \sqrt{t}\sin\big(g(t)\big) \end{cases}$ pour $t \in \mathbb{R}_+^*$.

Si on trace sur un même graphique l'arc Γ et les points A_n pour $n \in [\![1,5]\!]$, on conjecture que les points A_n appartiennent tous à Γ (c'était à faire avec Python). Démontrer cette conjecture.

Planche n° 9

On assimile le plan $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$ (qui est donc vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel).

Montrer que $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{R}$-linéaire si et seulement s'il existe $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que $f(z) = az + b\overline{z}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Les constantes a et b sont-elles uniques ?

Donner une CNS sur a et b pour que f soit un automorphisme de $\mathbb{C}$.

Soit $\theta \in \left]0, \pi\right[$. Déterminer l'écriture complexe de r_θ, la réflexion par rapport à la droite engendré par le vecteur $\vec{v}$ d'affixe $e^{i\theta}$.

Planche n° 10 (*Il y a avait des questions Python*)

Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on note $S(P) = \sum_{k \geq 0} \frac{P(k)}{k!}$.

Montrer que $S(P)$ est bien définie et que S est une forme linéaire sur $\mathbb{R}[X]$.

On pose $H_0(X) = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_{n+1}(X) = (X - n)H_n(X)$.

Montrer que $(H_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Calculer $S(H_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis $S(P)$ pour P quelconque.

Planche n° 11

Domaine de définition de $F : x \mapsto \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt$.

Montrer que F est C^∞ sur ce domaine.

Montrer que F est développable en série entière et donner le rayon de convergence.

Planche n° 12

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $E_A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AMA = 0_n\}$.

1) On suppose que A est diagonalisable.
   a. Montrer que E_A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que sa dimension est égale à celle de E_D où D est une matrice diagonale à préciser.
   b. Déterminer $\dim E_A$ en fonction du rang de A.
2) Montrer que la relation précédente est perdure sans l'hypothèse de diagonalisabilité.

Mines-Ponts

Planche n° 5

I) Montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $F_k : x\mapsto \int_0^{+\infty} e^{-kt}\sin(xe^t)\,dt$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Prouver que pour $k\geq 2$, F_k est solution de $x\,y'-k\,y=-\sin x$.

II) On note z_1, z_2, z_3 les racines de de $X^3+aX^2+bX+c\in\mathbb{C}[X]$.

Trouver une CNS sur *a*, *b* et *c* pour que $0, z_1, z_2, z_3$ soient les affixes des sommets d'un carré dans le plan complexe.

Planche n° 6

I) On cherche une fonction *y* de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $(E) : -2y''+x\,y'+y=0$ avec $y(0)=\sqrt{\pi}$ et $y'(0)=0$. Y a-t-il existence et/ou unicité d'une solution au problème posé ? En donner une expression explicite.

On rappelle la valeur de l'intégrale de Gauss : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}$.

Montrer que $f : x\mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx-t^2}dt$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et trouver une équation différentielle vérifiée par *f*. Conclure.

II) Une urne contient une proportion $p\in\,]0,1[$ de boules blanches. On procède à des tirages d'une boule avec remise et on note X_n la variable aléatoire donnant le nombre de tirages successifs nécessaires pour obtenir *n* boules blanches.

Déterminer la loi de X_1 et sa fonction génératrice.

Déterminer G_{X_n}, puis la loi et l'espérance de X_n.

Calculer la loi de X_n d'une autre manière.

Planche n° 7

I) Soient *f* et *g* deux fonctions croissantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et *X* une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2. Montrer que $\operatorname{cov}\big(f(X), g(X)\big)\geq 0$. On pourra introduire une variable aléatoire Y, indépendante de *X*, suivant la même loi, et montrer que $\big(f(X)-f(Y)\big)\big(g(X)-g(Y)\big)\geq 0$.

On donne deux suites croissantes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geq \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right).$$

II) Développer $f(x)=\dfrac{x\operatorname{sh}\alpha}{x^2-2x\operatorname{ch}\alpha+1}$ en série entière avec $\alpha\in\mathbb{R}$.

Planche n° 8

I) Existence et calcul de $T(x)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{ixt}-1}{t}e^{-t}dt$ avec $x\in\mathbb{R}$.

II) On note $S_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont toutes les valeurs propres sont positives.

1) Soit $S\in S_n(\mathbb{R})$. Montrer que : $S\in S_n^+(\mathbb{R}) \quad\Leftrightarrow\quad \forall\, X\in\mathbb{R}^n,\ {}^tXSX\geq 0$.
2) Prouver que pour tout $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $S=A\,{}^tA\in S_n^+(\mathbb{R})$.
3) Montrer réciproquement que pour tout $S\in S_n^+(\mathbb{R})$, il existe $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S=A\,{}^tA$.