Préparation aux oraux : série 3
CCINP
Planche n° 9

I) Convergence et calcul éventuel de $I_{k,n} = \int_0^{+\infty} t^k e^{-nt} dt$ pour $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Déterminer le rayon de convergence R de $\sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^{n+1}} x^n$.

Justifier que pour tout $x \in]-R, R[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^{n+1}} x^n = \int_0^{+\infty} \frac{tx}{e^t - tx} dt$.

II) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M^3 - 4M^2 + 4M = 0_n$ et $Tr(M) = 0$.

Montrer que les valeurs propres de M sont racines de $X^3 - 4X^2 + 4X$ et en déduire l'ensemble des matrices qui vérifient ces hypothèses.

Planche n° 10

I) On pose $f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx}$ si $x \geq 0$ et $f_n(x) = \frac{nx^3}{1+nx^2}$ si $x < 0$.

Montrer que (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f à déterminer.

Montrer que (f_n') converge simplement sur $\mathbb{R}$ et ne converge pas uniformément sur $[-1,1]$.

II) Rappeler une CNS pour qu'une matrice soit diagonalisable.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si $A^2 - 5A + 6I_n = 0_n$, alors A est diagonalisable et que ses valeurs propres sont racines de $X^2 - 5X + 6$.

Soit D une matrice diagonalisée de A . Montrer que f , l'application qui, à $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, associe $MD + DM$, est un endomorphisme.

Montrer que f est diagonalisable (on pourra décomposer les matrices en blocs).

Montrer que l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $g : M \mapsto MA + AM$ est diagonalisable.

Planche n° 11

I) Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $u_n(x) = \frac{\ln x}{x^n \ln n}$ et on note $S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} u_n(x)$.

Donner le domaine de convergence simple D de S .

Montrer que S ne converge pas normalement sur D .

Montrer que, pour $x \in D$, $\left| \sum_{k \geq n+1} u_k(x) \right| \leq \frac{1}{\ln(n+1)}$.

Montrer que S est continue sur D . Est-elle intégrable sur D ?

II) On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique $\mathcal{B}_c$.

Montrer que $\ker f^2$ et $\ker(f - 2Id)$ sont en somme directe.

Trouver un vecteur de $\ker f^2$ qui n'est pas dans $\ker f$.

Trouver une base $\mathcal{B}$ dans laquelle f a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Montrer que si $g^2 = f$, $\ker f^2$ est stable par g ; que peut-on en déduire ?

Planche n° 12

I) Soient X et Y , deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ et indépendantes, suivent la même loi.

On suppose $Z = X + Y + 1$ suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

Montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer en fonction de p .

Calculer la fonction génératrice de X , G_X , et en déduire la loi de X .

II) Montrer que $(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt$ munit $E = C([-1, 1], \mathbb{R})$ d'un produit scalaire.

Soient $F = \{f \in E, \forall x \in [0, 1], f(x) = 0\}$ et $G = \{f \in E, \forall x \in [-1, 0], f(x) = 0\}$.

Montrer que F et G sont deux sous-espaces orthogonaux de E . Sont-ils supplémentaires ?

Justifier que $G \subset F^\perp$. On veut montrer que $G = F^\perp$.

Pour $g \in F^\perp$, on pose $f_n(x) = 0$ si $x \in [0, 1]$, $f_n(x) = g(0)$ si $x \in \left[-1, -\frac{1}{n}\right]$ et f_n est affine sur

$\left[-\frac{1}{n}, 0\right]$. Calculer $\langle f_n, g \rangle$ et montrer que $g(0) \int_{-1}^0 g(t) dt = 0$.

On choisit f nulle sur $[0, 1]$ et $f(x) = g(x) - g(0)$ sur $[-1, 0]$. Montrer que $g \in G$ et conclure.

Centrale-Supélec

Planche n° 13

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^\alpha}$.

- 1) On se place dans le cas $\alpha > 1$. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
- 2) Déterminer la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ selon la valeur de α .
- 3) On suppose $\alpha > 1$ et on pose $v_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+k)^\alpha}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la nature de la série de terme général v_n selon la valeur de α .

Planche n° 14

On munit $\mathbb{R}^2$ de son repère orthonormé que l'on note $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On prend alors un module, initialement en O , se déplaçant d'un pas sur l'une des quatre directions (nord, sud, est, ouest) de manière équiprobable.

On note $A_n = (X_n, Y_n)$ la position du module à l'instant n . L'ensemble est muni d'un espace probabilisable. On note aussi Z_n la distance du module au point O à l'instant n .

On ne cherchera pas à déterminer la loi de X_n .

- 1) Donner l'espérance et la variance de X_n .
- 2) Montrer que $E(Z_n) \leq \sqrt{n}$.
- 3) On admet que $\sum_{i=0}^k \binom{k}{i}^2 = \binom{2k}{k}$. Calculer alors $P(Z_n = 0)$.

Planche n° 15

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $f_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C}); X \mapsto AX$.

- 1) Déterminer $rg(f_A)$.
- 2) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que f_A soit diagonalisable.
- 3) Calculer $Tr(f_A)$.
- 4) Calculer χ_{f_A} .

Planche n° 16

Pour $a \in]-1, 1[$, on pose $I(a) = \int_0^{\pi/2} \frac{\ln(1 + a \cos x)}{\cos x} dx$.

- 1) Montrer que la fonction I est de classe C^1 sur $]-1, 1[$ et calculer sa dérivée (on pourra utiliser le changement de variable $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$).
- 2) Montrer que I est développable en série entière.
- 3) En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{k-1} \int_0^{\pi/2} \cos^{k-1} x dx$.

Planche n° 17

- 1) Soit E et F deux $\mathbb{C}$ -espaces-vectoriels de dimension finie. Quelle est la dimension de $\mathcal{L}(E, F)$?
- 2) Soit p formes linéaires $f_1, \dots, f_p$ sur un $\mathbb{C}$ -espace-vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) La famille $(f_1, \dots, f_p)$ est libre.
- (ii) L'application $\varphi: E \rightarrow \mathbb{C}^p; x \mapsto (f_1(x), \dots, f_p(x))$ est surjective.
- (iii) Il existe une famille $(x_1, \dots, x_p)$ d'éléments de E telle que $\det \left[(f_j(x_i))_{1 \leq i, j \leq p} \right] \neq 0$

- 3) On suppose que $(f_1, \dots, f_p)$ est libre. Soit $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{C})$. Montrer que :

$$\bigcap_{i=1}^p \ker f_i \subset \ker f \iff f \in \text{Vect}(f_1, \dots, f_p).$$

Planche n° 18

Soit f définie sur $\mathbb{R}_+^2$ par $f(0, 0) = 0$ et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \{(0, 0)\}$:

$$f(x, y) = \frac{xy}{(x+1)(y+1)(x+y)}.$$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^2$ et étudier ses extrema globaux.

Mines-Ponts

Planche n° 9

I) Deux variables aléatoires indépendantes X et Y suivent une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Donner la loi de $T = \min(X, Y)$, son espérance, sa fonction génératrice.

Montrer que $\frac{1}{T(T+1)}$ admet une espérance et la calculer.

II) Calculer $I_n = \int_0^1 x^n \ln x \, dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis montrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\int_0^1 x^2 |\ln x - ax - b|^2 \, dx = \inf_{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 x^2 |\ln x - \alpha x - \beta|^2 \, dx.$$

Planche n° 10

I) Montrer que $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est diagonalisable si et seulement si pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant, il existe $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $P(M) = A$.

II) Etudier et représenter $f : x \mapsto \int_0^{\pi/4} e^{-x \tan t} \, dt$. La fonction f est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+$? sur $\mathbb{R}_-$?

Etudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Planche n° 11

I) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{1}{n^a} \int_0^n \frac{\arctan t}{t^b} \, dt$.

Si $b > 0$ et $b \neq 1$, à quelles conditions sur a et b , la série $\sum u_n$ converge-t-elle ?

Même question pour $b \leq 0$, puis pour $b = 1$.

II) Soit E un espace vectoriel normé et deux vecteurs non nuls a et b de E .

L'application $f : t \mapsto \|a + tb\|$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Est-elle lipschitzienne ?

Si elles existent, calculer $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t)$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$.

On note $B(0,1)$ la boule ouverte de centre 0 et de rayon 1. Montrer que $I = \{t \in \mathbb{R}, a + tb \in B(0,1)\}$ est soit vide, soit un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

Planche n° 12

I) Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et une famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs de E , vérifiant la relation $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle^2$ pour tout vecteur x de E .

Montrer que $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E .

II) Montrer que $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x+x^2} \, dx$ est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Donner $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ et trouver un équivalent de I_n quand $n \rightarrow +\infty$.