Préparation aux oraux : série 4

CCINP

Planche n° 13

I) On pose $f_n(x) = xe^{-\sqrt{n|x|}}$. Trouver les réels x tels que la suite $\left(f_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Calculer $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \left|f_n(x)\right|$; qu'en déduit-on ?

Déterminer le domaine de convergence D de $\sum f_n$.

La convergence est-elle absolue sur D ? normale ?

Que dire de la convergence de la série sur $\mathbb{R} \setminus \left]-a, a\right[$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$?

II) Définir une norme. Les applications $N_0 : f \mapsto \int_0^1 \left|f(t)\right| dt$, $N_1 : f \mapsto \left|\int_0^1 f(t)\, dt\right| + \int_0^1 \left|f'(t)\right| dt$ et $N_2 : f \mapsto \left|\int_0^1 f(t)\, dt\right| + \left|\int_0^1 f'(t)\, dt\right| + \left|\int_0^1 f''(t)\, dt\right|$ définissent-elles des normes sur $E = C^2\left(\left[0,1\right], \mathbb{R}\right)$?

Montrer que pour toute f de E, il existe $c \in \left[0,1\right]$ tel que $f(c) = \int_0^1 f(t)\, dt$.

Montrer que pour toute f de E, $N_0(f) \leq N_1(f)$; peut-il y avoir égalité ?

Montrer qu'il n'existe aucun réel a tel que pour toute $f \in E$, $N_1(f) \leq a N_0(f)$.

Planche n° 14

I) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{e^{-u_n}}{n+1}$.

Quelle est la limite de la suite de terme général $n u_n$?

Donner la nature de $\sum u_n$ et $\sum (-1)^n u_n$.

II) Donner le rang de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients $a_{i,j}$ vérifiant $a_{i,1} = 1$ pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, $a_{i,n} = 1$ pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$ et $a_{i,j} = 0$ sinon.

Donner le rang de A^2 .

Montrer que le noyau et l'image de A sont supplémentaires.

Pourquoi peut-on réduire A sous la forme $\begin{pmatrix} 0_{n-2} & 0_{n-2,2} \\ 0_{2,n-2} & B \end{pmatrix}$ avec $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

Calculer $Tr(B)$ et $Tr(B^2)$.

Vérifier que B est inversible, puis donner le spectre de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Planche n° 15

I) Soit f un automorphisme d'un espace euclidien tel que pour tous $x, y \in E$:

$$\langle x, y\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle f(x), f(y)\rangle = 0 .$$

Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E, que dire de $\left(f(e_1), \dots, f(e_n)\right)$?

Calculer $\left\langle f(e_i)+f(e_j), f(e_i)-f(e_j)\right\rangle$ et en déduire qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $\|f(e_i)\| = \alpha$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

Exprimer f comme composée de deux applications remarquables.

II) Un élément chimique émet des électrons pendant une durée T. On note N la variable aléatoire qui dénombre les électrons émis et on suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

Un électron a une probabilité $p \in \left]0,1\right[$ d'être efficace, indépendamment des autres.

On note X la variable aléatoire qui dénombre les électrons efficaces et Y celle qui dénombre ceux qui ne le sont pas.

Pour tous $j, k \in \mathbb{N}$, exprimer $P_{(N=j)}\left(X = k\right)$, puis la loi conjointe de X et N.

En déduire la loi marginale de X, puis donner $E(X)$ et $V(X)$ sans calcul.

Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

En posant $N = X + Y$, calculer $Cov(X, N)$ et en commenter le signe.

Planche n° 16

I) On note E l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Pour $f_0 \in E$, on pose $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1} : x \mapsto \int_0^x f_n(t)\,dt$.

Donner le rayon de convergence de $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ et la valeur de la somme.

Montrer que f_1 est C^1 sur $\mathbb{R}$, puis que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est C^n sur $\mathbb{R}$.

On admet la propriété (*) : $\forall\, a \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists\, K \in \mathbb{R}_+^*$, tel que $\forall\, x \in [-a, a]$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \le K \dfrac{|x|^n}{n!}$.

Montrer que $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Montrer que $f' - f = f_0$, puis que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^x \int_0^x f_0(t) e^{-t}\,dt$ et prouver (*).

II) Simplifier $S_k = 1 + j^k + j^{2k}$ pour $k \in \mathbb{N}$ et $j = e^{i2\pi/3}$.

Une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre 1 et Y est le reste de la division euclidienne de X par 3. Que vaut $P\left(Y = 0\right)$?

Centrale-Supélec

Planche n° 19

Soit $\theta \in \left]0,\pi\right[$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(t) = t^{n-1}\sin(n\theta)$

1) Montrer que $\sum u_n$ converge simplement sur $\left]0,1\right[$. Calculer sa somme *S*.
2) Montrer que *S* est intégrable entre 0 et 1 et calculer cette intégrale.
3) On pose $V_n = \dfrac{\sin(n\theta)}{n}$. Etablir la convergence de la série de terme général V_n et calculer sa somme.

Planche n° 20

Soit $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles et $S_n^{++}(\mathbb{R})$ celui des matrices symétriques réelles à valeurs propres strictement positives.

1) Enoncer en entier le théorème spectral.
2) Pour $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.
3) Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$, montrer que ${}^t MM \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
   Montrer alors qu'il existe une matrice $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $M = OS$.

Planche n° 21

Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $J(\alpha,\beta) = \int_0^1 \dfrac{t^{\alpha-1}}{1+t^\beta}\,dt$.

1) Etablir la convergence de $J(\alpha,\beta)$.
2) Calculer $J\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$. Ecrire $J(n,1)$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) sous forme de somme.
3) Ecrire $J(\alpha,\beta)$ sous forme de série numérique.
4) Calculer : $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} J(\alpha,\beta)$, $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} J(\alpha,\beta)$, $\lim\limits_{\beta \to 0^+} J(\alpha,\beta)$, $\lim\limits_{\beta \to +\infty} J(\alpha,\beta)$.

Planche n° 22

On étudie l'arc paramétré $L : \begin{cases} x(t) = \sqrt{\cos^2 t + 4\cos t + 3} \\ y(t) = \sin t \end{cases}$.

1) Donner l'ensemble de définition de *L*. Etudier ses symétries.
2) Etudier les variations et les éventuels points singuliers de *L*.
3) Donner l'expression des tangentes au point d'origine de *L*.
4) A l'aide de Python (*ou pas !*), calculer la longueur de *L*.

Planche n° 23

1) On note $\mathbb{C}[z]$ l'ensemble des fonctions polynômiales de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

   Montrer que $\varphi : \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[z]$; $P \mapsto (z \mapsto P(z))$ est un isomorphisme.

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) \in \mathbb{R}$.

2) Montrer que les coefficients de P sont réels.
3) Montrer que P peut-être positif sur $\mathbb{R}$ avec des coefficients non tous positifs.
4) Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Q(x) \geq 0$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$R(x) = Q(x) + Q'(x) + \ldots + Q^{(n)}(x) \geq 0.$$

Planche n° 24

I) Soit $a \in \left]0, \pi\right[$. Existence de $\displaystyle\int_0^a \frac{\sin(nt)}{\sin t} dt$ avec $n \in \mathbb{N}$.

On pose $f(x) = \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

Montrer que *f* est de classe C^∞ sur $\left[0, \pi\right[$. On pourra remarquer que $f(x) = -\dfrac{\dfrac{\sin x - x}{x^2}}{\dfrac{\sin x}{x}}$.

Soit $f \in C^1([0, a])$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^a f(t) \sin(nt) dt = 0$ et en déduire la valeur de :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\int_0^a \frac{\sin(nt)}{\sin t} dt - \int_0^a \frac{\sin(nt)}{t} dt \right).$$

On donne $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nt)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^a \frac{\sin(nt)}{\sin t} dt$ pour $a = \dfrac{\pi}{2}$, $a < \dfrac{\pi}{2}$, $a > \dfrac{\pi}{2}$ (avec toujours $a \in \left]0, \pi\right[$).

II) *Cours* : Formule de Taylor avec reste intégral.

Mines-Ponts

Planche n° 13

I) Montrer que $f : x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, puis qu'elle y est dérivable et donner f'.

Trouver des équivalents de *f* en 0 et $+\infty$.

Montrer que *f* est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$.

II) Soit *f* l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

Trouver les endomorphismes *g* de $\mathbb{R}^3$ tels que $g^3 + 2g = f$.

Planche n° 14

I) Soient *E* un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\operatorname{Im} u = \ker u$.

Soit *v* un autre endomorphisme de *E* tel que pour tout $(x, y) \in E^2$, $\big(u(x) \mid y\big) = \big(x \mid v(y)\big)$.

Montrer que $E = \operatorname{Im} u \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Im} v$ et en déduire que $u + v$ est inversible.

II) Pour $x \in \mathbb{R}$, justifier l'existence de $F(x) = \int_0^{+\infty} \operatorname{sh}(xt)\, e^{-t^2} dt$.

Montrer que *F* est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et donner son développement.

Planche n° 15

I) Résoudre $\begin{cases} x' = x + 2y + te^t \\ y' = 8x + y + e^{-t} \end{cases}$.

II) Soit $p \in \left]0,1\right[$, $a \in \mathbb{R}_+^*$ et *X* et *Y* deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, de loi conjointe :

$$P(X = k, Y = n) = \begin{cases} \binom{n}{k} a^n p(1-p)^n & \text{si } k \le n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer *a*, puis la loi marginale de *Y*.

Montrer que pour tout $x \in \left]-1,1\right[$, $\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$. En déduire la loi marginale de *X*.

Les variables *X* et *Y* sont-elles indépendantes ?

Planche n° 16

I) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres de A et $m_1, \dots, m_r$ leurs ordres de multiplicité respectifs.

Montrer qu'il existe un polynôme annulateur de *A*, de degré *r*, et que tout polynôme annulateur de *A* est de degré supérieur ou égal à *r*.

On pose $\mathbb{K}[A] = \{P(A), P \in \mathbb{K}[X]\}$. Montrer que $\dim \mathbb{K}[A] = r$.

On pose $C(A) = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AB = BA\}$. Montrer que $\dim C(A) = \sum_{k=1}^{r} m_k^2$.

Montrer que :

$$\dim C(A) = r \quad \Leftrightarrow \quad \dim \mathbb{K}[A] = n \quad \Leftrightarrow \quad n = r \quad \Leftrightarrow \quad C(A) = \mathbb{K}[A].$$

II) Etudier la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \sqrt{\dfrac{x_n + 1}{2}}$.

Donner la nature de la série $\sum u_n$ avec $u_n = 1 - x_n$.