Préparation aux oraux : série 5

CCINP

Planche n° 17

I) Rappeler le critère des séries alternées avec majoration et le signe du reste.

Montrer que $f : x \mapsto \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+x}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \frac{1}{x} - \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+x+1}$, puis que $2f(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+x)(n+1+x)}$.

Déterminer un équivalent de *f* en + ∞. Montrer que $f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$.

II) Une urne contient *A* boules blanches et *B* noires. On note X_1 et X_2 les rangs d'apparition de la première et de la deuxième boule blanche lors d'un triage successif et sans remise de toutes les boules de l'urne. Déterminer les lois de X_1 et X_2.

Planche n° 18

I) Trouver trois réels α, β, γ tels que $\frac{1}{t(t^2-1)} = \frac{\alpha}{t} + \frac{\beta}{t+1} + \frac{\gamma}{t-1}$.

Résoudre (E) : $t(t^2-1)y' + 2y = t^2$. On cherchera les solutions maximales.

II) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible et vérifiant $M^2 + {}^tM = I_n$.

Trouver un polynôme annulateur de *M* de degré 4.

Montrer que $M - I_n$ est inversible.

Caractériser toutes les matrices *M* inversible et vérifiant $M^2 + {}^tM = I_n$.

Planche n° 19

I) Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j} = \frac{i}{j}$.

1. Calculer A^2.
2. La matrice *A* est-elle inversible ?
3. Montrer que *A* est diagonalisable.
4. Déterminer les sous-espaces propres de *A*.
5. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que *A* et *M* commutent. Montrer que le noyau et l'image de *A* sont stables pas *M*.

II) Existence de $J = \int_0^{+\infty} \frac{x}{\operatorname{sh} x} dx$. Prouver l'égalité $J = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^2}$.

Planche n° 20

I) Sur $D=(\mathbb{R}_+^*)^2$, on pose $f(x,y)=xy+\dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{y}$.

Montrer que *f* admet un unique point critique (a,b) sur *D*.

Montrer qu'il existe une fonction $(h,k)\mapsto e(h,k)$ positive au voisinage de $(0,0)$, telle que :

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=e(h,k)+\underset{0}{o}(h^2)+\underset{0}{o}(k^2).$$

f admet-elle des extrema sur *D* ?

II) Soit $M=\begin{pmatrix}0_n & A\\ B & 0_n\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. Calculer M^2.

Justifier que si $P(M)=0_{2n}$ avec $P\in\mathbb{R}[X]$, les valeurs propres de *M* sont racines de *P*.

On choisit $A=B^{-1}$ (avec *B* inversible). Justifier que *M* est diagonalisable et préciser les dimensions des sous-espaces propres.

On choisit $A=-B=I_n$. Justifier que *M* est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et préciser les dimensions des sous-espaces propres.

Centrale-Supélec

Planche n° 25

On considère f définie par $f : x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\, dt$.

1) Montrer que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
2) Montrer que $f(x) \sim -\ln x$ quand x tend vers 0^+.
3) Montrer que f est dominée par $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ quand $x \to +\infty$.
4) Montrer que f est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Planche n° 26

On place deux boules vertes et une boule noire dans une urne.

On effectue des tirages successifs et indéfiniment. A l'issue de chaque tirage, on remet la boule tirée dans l'urne ainsi qu'une boule de même couleur.

Soit X la variable aléatoire réelle qui correspond au rang du premier tirage de la boule verte et Y celle qui correspond au rang du premier tirage de la boule noire.

Soit U_k la variable aléatoire qui vaut 1 si on tire une boule verte au $k^{\text{ième}}$ tirage et 0 sinon.

Soit Z_n la variable aléatoire réelle qui compte le nombre de boules vertes tirées au cours des n premiers tirages.

1) Donner les lois de X et de Y.
2) a. Exprimer Z_n en fonction des U_k.
   b. Calculer $P\left(U_{n+1} = 1 \mid Z_n = k\right)$.
   c. Montrer par récurrence que U_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $2/3$.
   ☺ *On pourra établir la loi de Z_n en même temps.*
3) *Question non retranscrite.*

Planche n° 27

Soit U une matrice symétrique réelle de taille n. L'objectif est de trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une matrice V, antisymétrique réelle de taille n, telle que la matrice $U+V$ soit orthogonale.

1) On suppose que V convient.
   a. Montrer que $UV = VU$ et $I_n = U^2 - V^2$.
   b. Soit $\lambda \in Sp(U)$. Montrer que $\lambda \in [-1,1]$ et que si $\lambda \in]-1,1[$, alors $\ker\left(U - \lambda I_n\right)$ est de dimension paire.
2) Conclure.

Planche n° 28

1) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f, g \in C^0(I,\mathbb{R})$, $t_0 \in I$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que l'équation :

$$(E): \quad y' + f(t)y = g(t)$$

admet une unique solution φ telle que $\varphi(t_0) = x_0$. On l'exprimera à l'aide d'intégrales.

2) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et h une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que l'équation :

$$(E'): \quad y' - a\,y = h(t)$$

admet une unique solution bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Planche n° 29

Soient $\gamma \in [-1,1]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On note S_α l'ensemble des fonctions f de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telles que $f(0) = \alpha$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = f(\gamma x).$$

1) Déterminer S_α pour $\gamma = 1$ et pour $\gamma = -1$.
2) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{\gamma^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!} x^n$.
3) Montrer que la somme de la série précédente appartient à S_1. En déduire une fonction de S_α.
4) Soit $E = C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On définit T sur E par :

$$\forall\, f \in E,\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ T(f)(x) = \alpha + \int_0^x f(\gamma t)\,dt.$$

   a. Montrer que f est un point fixe de T si et seulement si $f \in S_\alpha$.
   b. Soit $a \in \,]0,1[$. Pour tout $(f, g) \in E^2$. Majorer $\|T(f) - T(g)\|_\infty$ à l'aide de $\|f - g\|_\infty$ où $\|\,.\,\|_\infty$ est la norme infinie sur $[-a, a]$.
   c. Montrer que T possède un unique point fixe. Conclure quant à S_α.

Planche n° 30

I) Soit $p \in \mathbb{R}$. Trouver toutes les fonctions trois fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles telles que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f^{(3)}(t) - f(t) = e^{pt}$.

II) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ son polynôme caractéristique.

Montrer que pour tout $\lambda \in Sp(M)$, $|\lambda| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k|$.

Mines-Ponts

Planche n° 17

I) Diagonaliser $A=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, puis trouver les matrices $M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $M^2+M=A$.

II) Calculer $u_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}(-1)^k$.

Planche n° 18

I) Soit $f\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x)\in\mathbb{R}$.

Déterminer les limites en 0 et $+\infty$ de $g: x\mapsto \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\sin(x-t)\,dt$, définie sur $]0,+\infty[$.

II) Soient $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisables. Montrer que :

$$AB=BA \iff \exists\, C\in GL_n(\mathbb{C}),\ \exists\,(P,Q)\in\mathbb{C}[X]^2,\ A=P(C),\ B=Q(C).$$

Planche n° 19

I) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\lim_{n\to+\infty} n\left(u_{n+1}-u_n\right)=1$. La série $\sum u_n$ converge-t-elle ?

II) Donner la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Trouver une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constituée de matrices diagonalisables.

III) Soient deux variables aléatoires indépendantes *X* et *Y* suivant chacune une loi géométrique de paramètres respectifs $p\in]0,1[$ et $q\in]0,1[$.

Quelle est la probabilité que la matrice $A=\begin{pmatrix}X & 1\\ 0 & Y\end{pmatrix}$ soit diagonalisable ?

Planche n° 20

I) Soit *E*, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé. Pour $x\in E$, on pose $f(x)=\frac{1}{1+\|x\|}x$.

Montrer que *f* est bijective de *E* dans la boule ouverte $B(0,1)$, puis qu'elle est lipschitzienne.

II) Montrer que l'application $(P,Q)\mapsto\left(P\mid Q\right)=\int_0^{+\infty}P(t)Q(t)e^{-t}dt$ est définie sur $\mathbb{R}[X]^2$ et munit $\mathbb{R}_n[X]$ (avec $n\in\mathbb{N}$) d'un produit scalaire.

Soit $\left(Q_0,Q_1,\dots,Q_n\right)$ une base orthonormalisée à partir de la base canonique par le procédé de Gram-Schmidt. Calculer $Q_k(0)^2$ pour tout $k\in[\![0,n]\!]$ (*on pourra justifier que* $Q_k'\perp Q_k$).

On pose $F=\left\{P\in\mathbb{R}_n[X],\ P(0)=0\right\}$. Trouver une base de $F^\perp$ et en déduire $d(1,F)$.