Chapitre 11 : Analyse asymptotique

Programme officiel PCSI

a) Relations de comparaison : cas des fonctions

Relations de domination, de négligeabilité, d'équivalence en un point a de $\mathbb{R}$ ou $a = \pm\infty$.
Lien entre ces relations.

Notations

$$f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x)),\ f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x)),\ f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x).$$

La relation $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ est définie à partir du quotient $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ sous l'hypothèse que la fonction g ne s'annule pas localement.
Pour la relation $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, on donne les deux formes $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1$ et $f(x) \underset{x\to a}{=} g(x) + o(g(x))$, en insistant sur l'intérêt de la seconde dans les calculs.
Pour mener une étude locale de f au voisinage de $a \neq 0$, on étudie $f(a+h)$ pour $h \to 0$.
Traduction à l'aide du symbole o des croissances comparées de $\ln^\beta(x)$, x^α, $e^{\gamma x}$ en $+\infty$, de $\ln^\beta(x)$, x^α en 0.

Règles usuelles de manipulation des équivalents et des symboles o et O.
Obtention d'un équivalent par encadrement : si les fonctions réelles f, g, h vérifient $f \leqslant g \leqslant h$ et si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$, alors $g(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$.
Propriétés conservées par équivalence : signe, limite.

b) Développements limités

Développement limité à l'ordre n d'une fonction en un point. Unicité des coefficients, troncature.

Le développement limité à l'ordre n de f en a peut se ramener à celui de $h \mapsto f(a+h)$ en 0.
Signe de f au voisinage de a.

Développement limité en 0 d'une fonction paire, impaire.
Caractérisation de la dérivabilité par l'existence d'un développement limité à l'ordre 1.
Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit, quotient.

On privilégie la factorisation par le terme prépondérant pour prévoir l'ordre d'un développement.
Les étudiants doivent savoir déterminer sur des exemples simples le développement limité d'une composée, mais aucun résultat général n'est exigible.

Primitivation d'un développement limité.
Formule de Taylor-Young : pour f de classe $\mathscr{C}^n$, développement limité à l'ordre n en 0 de $h \mapsto f(a+h)$.
Développement limité à tout ordre en 0 de exp, sin, cos, sh, ch, $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$, Arctan.
Développement limité à l'ordre 3 en 0 de tan.
Application des développements limités à l'étude locale d'une fonction.
Condition nécessaire, condition suffisante à l'ordre 2 pour un extremum local en un point intérieur.

Calculs d'équivalents et de limites, position relative d'une courbe et de sa tangente, détermination d'asymptotes.

c) Relations de comparaison : cas des suites

Adaptation rapide aux suites des définitions et résultats relatifs aux fonctions.	Notations $u_n = O(v_n)$, $u_n = o(v_n)$, $u_n \sim v_n$.

d) Problèmes d'analyse asymptotique

Exemples de développements asymptotiques, dans les cadres discret et continu : fonctions réciproques, équations à paramètre, suites récurrentes, suites d'intégrales.	La notion d'échelle de comparaison est hors programme.

Plan du résumé

Résumé

I – Comparaison de suites de nombres réels

1. Domination, négligeabilité

Définitions :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites.

- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une suite bornée $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n = \alpha_n v_n$ apcr. On note $u_n = O(v_n)$ ou $u = O(v)$.
- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une suite de limite nulle $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n = \alpha_n v_n$ apcr. On note $u_n = o(v_n)$ ou $u = o(v)$.

Propriétés :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites avec $v_n \neq 0$ apcr $N\in\mathbb{N}$.

- $u = O(v) \iff \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\geq N}$ est bornée.
- $u = o(v) \iff \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\geq N}$ converge vers 0.

Propriété :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. Si $u = o(v)$ alors $u = O(v)$. La réciproque est fausse.

Propriétés :

- Les relations O et o sont transitives :

$$u = O(v) \text{ et } v = O(w) \ (\textit{resp. } u = o(v) \text{ et } v = o(w)) \Rightarrow u = O(w) \ (\textit{resp. } u = o(w)).$$

- Si $u = O(v)$ (*resp.* $u = o(v)$) alors $\forall\, \lambda\in\mathbb{R}^*$, $u = O(\lambda v)$ (*resp.* $u = o(\lambda v)$).
- Si $u = O(w)$ et $v = O(w)$ (*resp.* $u = o(w)$ et $v = o(w)$) alors $\forall\,(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, $\lambda u + \mu v = O(w)$ (*resp.* $\lambda u + \mu v = o(w)$).
- $u = O(v)$ alors pour toute suite w, $uw = O(vw)$. De même avec o.
- $u = O(v)$ et $u' = O(v')$ alors $uu' = O(vv')$. De même avec o.
- Si $u = O(v)$ (*resp.* $u = o(v)$) et u et v ne s'annule pas apcr, $\dfrac{1}{v} = O\left(\dfrac{1}{u}\right)$ (*resp.* $\dfrac{1}{v} = o\left(\dfrac{1}{u}\right)$).

2. Equivalences

Définitions :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 1 telle que apcr, $u_n = \varepsilon_n v_n$. On note $u_n \sim v_n$ ou $u \sim v$.

Propriétés :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. Alors :

- $u \sim v \iff u = v + o(v)$.
- Si $v_n \neq 0$ apcr $N \in \mathbb{N}$, $u \sim v \iff \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\geq N}$ converge vers 1.

Propriétés :

La relation ~ est une relation d'équivalence (réflexive, symétrique et transitive).

Propriété :

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites équivalentes, alors si $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a $u_{\varphi(n)} \sim v_{\varphi(n)}$.

Propriétés :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites équivalentes. Alors :

- u_n et v_n sont de même signe apcr (et en particulier, apcr, u et v s'annulent, ou pas, en même temps).
- Si v admet pour limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, u aussi.
- Si v diverge, u aussi.
- Si $v = O(w)$ (*resp.* $v = o(w)$), alors $u = O(w)$ (*resp.* $u = o(w)$).
- Si $w = O(u)$ (*resp.* $w = o(u)$), alors $w = O(v)$ (*resp.* $w = o(v)$).

Propriétés :

- Si $u \sim v$ alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda u \sim \lambda v$.
- Si $u \sim v$ et $u' \sim v'$ alors $uu' \sim vv'$.
- Si $u \sim v$ et $u' \sim v'$ avec $v_n \neq 0$ apcr alors $u_n \neq 0$ apcr et $\dfrac{u'}{u} \sim \dfrac{v'}{v}$.

Propriété (*généralisation du théorème des gendarmes*) :

Si $u \sim w$ et $u_n \leq v_n \leq w_n$ apcr, alors $v \sim u \sim w$.

3. Comparaison des suites de référence

Propriétés :

Soient trois réels non nuls α, β et $a > 0$.

- Si $0 < a < 1$, alors $a^n = o(n^\alpha)$ et si $a > 1$, alors $n^\alpha = o(a^n)$.
- Si $\alpha < 0$, alors $n^\alpha = o\left((\ln n)^\beta\right)$ et si $\alpha > 0$, alors $(\ln n)^\beta = o(n^\alpha)$.
- $a^n = o(n!)$.

Corollaires :

Soient trois réels non nuls α, β et $a > 0$.

- Si $0 < a < 1$, alors $a^n = o\left((\ln n)^\beta\right)$ et si $a > 1$, alors $(\ln n)^\beta = o(a^n)$.
- $n^\alpha = o(n!)$ et $(\ln n)^\beta = o(n!)$.

II – Comparaison de fonctions numériques

Dans tout ce qui suit, on considère un intervalle I, $a \in \bar{I}$ (a appartient à I ou est une extrémité éventuellement infinie de I) et f et g deux fonctions définies sur I telles que g ne s'annule pas sur I privé de a (le cas échéant).

1. Domination, négligeabilité

Définitions :

- On dit que f est dominée par g au voisinage de a s'il existe une fonction u définie sur I et bornée au voisinage de a telle que $f = ug$ au voisinage de a. On note $f \underset{a}{=} O(g)$ ou $f(x) \underset{a}{=} O\left(g(x)\right)$.
- On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a s'il existe une fonction ε définie sur I et de limite nulle en a telle que $f = \varepsilon g$ au voisinage de a. On note $f \underset{a}{=} o(g)$ ou $f(x) \underset{a}{=} o\left(g(x)\right)$.

Propriétés :

- $f \underset{a}{=} O(g) \iff \dfrac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a.
- $f \underset{a}{=} o(g) \iff \lim\limits_{a} \dfrac{f}{g} = 0$.

Propriété :

$f \underset{a}{=} o(g) \Rightarrow f \underset{a}{=} O(g)$. La réciproque est fausse.

Propriétés :

- Les relations $\underset{a}{O}$ et $\underset{a}{o}$ sont transitives.
- Si $f \underset{a}{=} O(g)$ (*resp.* $f \underset{a}{=} o(g)$) alors $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*$, $f \underset{a}{=} O(\lambda g)$ (*resp.* $f \underset{a}{=} o(\lambda g)$).
- Si $f \underset{a}{=} O(g)$ et $h \underset{a}{=} O(g)$ (*resp.* $f \underset{a}{=} o(g)$ et $h \underset{a}{=} o(g)$) alors $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda f + \mu h \underset{a}{=} O(g)$ (*resp.* $\lambda f + \mu h \underset{a}{=} o(g)$).
- $f \underset{a}{=} O(g)$ alors pour toute fonction h ne s'annulant pas au voisinage de a, $fh \underset{a}{=} O(gh)$. Idem avec o.
- $f_1 \underset{a}{=} O(g_1)$ et $f_2 \underset{a}{=} O(g_2)$ où g_1 et g_2 ne s'annulent pas au voisinage de a $f_1 f_2 \underset{a}{=} O(g_1 g_2)$. Idem avec o.
- Si $f \underset{a}{=} O(g)$ (*resp.* $f \underset{a}{=} o(g)$) et f ne s'annule pas au voisinage de a, $\dfrac{1}{g} \underset{a}{=} O\left(\dfrac{1}{f}\right)$ (*resp.* $\dfrac{1}{g} \underset{a}{=} o\left(\dfrac{1}{f}\right)$).

2. Equivalence

Définition :

On dit que f est équivalente à g au voisinage de a s'il existe une fonction ε de limite 1 en a telle que, $f=\varepsilon g$ au voisinage de a. On note $f(x)\underset{a}{\sim}g(x)$ ou $f\underset{a}{\sim}g$.

Propriété :

$$f\underset{a}{\sim}g \iff f=g+\underset{a}{o}(g) \iff \lim_{a}\frac{f}{g}=1.$$

Propriétés :

La relation $\underset{a}{\sim}$ est une relation d'équivalence (réflexive, symétrique et transitive).

Propriétés :

Si $f\underset{a}{\sim}g$ et h est une fonction ne s'annulant pas au voisinage de a alors :

- f et g sont de même signe au voisinage de a.
- Si g admet pour limite $\ell\in\overline{\mathbb{R}}$ en a, f aussi.
- $g=\underset{a}{O}(h)$ (*resp.* $g=\underset{a}{o}(h)$), alors $f=\underset{a}{O}(h)$ (*resp.* $f=\underset{a}{o}(h)$).
- Si $h=\underset{a}{O}(g)$ (*resp.* $h=\underset{a}{o}(g)$), alors $h=\underset{a}{O}(f)$ (*resp.* $h=\underset{a}{o}(f)$).

Propriétés :

- Si $f\underset{a}{\sim}g$ alors $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda f\underset{a}{\sim}\lambda g$.
- Si $f_1\underset{a}{\sim}g_1$ et $f_2\underset{a}{\sim}g_2$, les fonctions ne s'annulant pas au voisinage de a, alors $f_1f_2\underset{a}{\sim}g_1g_2$ et $\dfrac{f_2}{f_1}\underset{a}{\sim}\dfrac{g_2}{g_1}$.

Propriété (*généralisation du théorème des gendarmes*) :

Si $f\underset{a}{\sim}h$ et $f(x)\leq g(x)\leq h(x)$ au voisinage de a, alors $g\underset{a}{\sim}f\underset{a}{\sim}h$.

3. Comparaison des fonctions usuelles

Propriétés :

Soient trois réels non nuls α, β et $a>0$.

- Si $0<a<1$, alors $a^x=\underset{+\infty}{o}(x^\alpha)$ et si $a>1$, alors $x^\alpha=\underset{+\infty}{o}(a^x)$.
- Si $\alpha<0$, alors $x^\alpha=\underset{+\infty}{o}\left((\ln x)^\beta\right)$ et si $\alpha>0$, alors $(\ln x)^\beta=\underset{+\infty}{o}(x^\alpha)$.
- Si $0<a<1$, alors $a^x=\underset{+\infty}{o}\left((\ln x)^\beta\right)$ et si $a>1$, alors $(\ln x)^\beta=\underset{+\infty}{o}(a^x)$.
- Si $\alpha<\beta$, $x^\alpha=\underset{+\infty}{o}(x^\beta)$.

Propriétés :

Soient deux réels non nuls α et β.

- Si $\alpha<\beta$, $|x|^{\beta}=\underset{0}{o}(|x|^{\alpha})$.
- Si $\alpha>0$ alors $x^{\alpha}=\underset{0^+}{o}\left(|\ln x|^{\beta}\right)$ et si $\alpha<0$, alors $|\ln x|^{\beta}=\underset{0^+}{o}(x^{\alpha})$.

III – Développements limités

1. Définition

Définitions :

Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel a. On dit que f admet un développement limité (DL) d'ordre n au voisinage de a (en a), s'il existe des réels $a_0, a_1, \dots, a_n$ tels que :

$$f(x)=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\dots+a_n(x-a)^n+\underset{a}{o}\left((x-a)^n\right).$$

L'expression $a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\dots+a_n(x-a)^n$ est la partie polynomiale du développement limité.

Propriété :

Si une fonction admet un DL d'ordre n au voisinage de a, alors ce DL est unique.

Propriété :

La partie polynomiale du développement limité en 0 (s'il existe) d'une fonction paire est paire.

La partie polynomiale du développement limité en 0 (s'il existe) d'une fonction impaire est impaire.

2. Intégration terme à terme d'un développement limité

Propriété :

Soient f une fonction dérivable sur I et $a\in I$. Si f' admet un DL d'ordre n au voisinage de a, alors f admet un DL d'ordre $n+1$ au voisinage de a, obtenu en intégrant terme à terme le DL de f'.

3. Formule de Taylor-Young et dérivation terme à terme d'un développement limité

Théorème : *Formule de Taylor-Young à l'ordre n.*

Soient $n\in\mathbb{N}$, f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et $a\in I$. On a :

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\frac{f''(a)}{2!}h^2+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n+\underset{0}{o}(h^n)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k+\underset{0}{o}(h^n).$$

Corollaires :

- Toute fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I admet un DL d'ordre n au voisinage de tout $a\in I$.
- Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, alors f' est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur I et admet un DL d'ordre $n-1$ au voisinage de tout $a\in I$, obtenu en dérivant terme à terme le DL d'ordre n de f en a.

4. Opérations algébriques sur les développements limités

a. Combinaison linéaire :

Propriété :

> Si f et g sont deux fonctions admettant un DL d'ordre $n \in \mathbb{N}$ en $a \in I$, alors $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}$, $\lambda f + \mu g$ admet un DL d'ordre n en a qui est la combinaison linéaire de ceux de f et g.

b. Produit :

Propriété :

> Si f et g sont deux fonctions admettant un DL d'ordre $n \in \mathbb{N}$ en a, alors $f \times g$ admet un DL d'ordre n en a obtenu en multipliant les DL de f et g et en ne gardant que les termes de degré inférieur où égal à n.

c. Quotient :

On a vu qu'en 0, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$.

Soit une fonction g admettant un DL d'ordre n en a : $g(a+h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \cdots + a_n h^n + o(h^n)$ avec $a_0 \neq 0$.

On a alors :

$$\frac{1}{g(a+h)} = \frac{1}{a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \cdots + a_n h^n + o(h^n)} = \frac{1}{a_0} \frac{1}{1 + \frac{a_1}{a_0} h + \frac{a_2}{a_0} h^2 + \cdots + \frac{a_n}{a_0} h^n + o(h^n)}.$$

Or, si on pose $x = \dfrac{a_1}{a_0} h + \dfrac{a_2}{a_0} h^2 + \cdots + \dfrac{a_n}{a_0} h^n + o(h^n)$ dans le DL de $\dfrac{1}{1+x}$ en 0, on a :

$$\frac{1}{g(a+h)} = \frac{1}{a_0}\left[1 - \left(\frac{a_1}{a_0} h + \cdots + \frac{a_n}{a_0} h^n\right) + \left(\frac{a_1}{a_0} h + \cdots + \frac{a_n}{a_0} h^n\right)^2 - \ldots + (-1)^n \left(\frac{a_1}{a_0} h + \cdots + \frac{a_n}{a_0} h^n\right)^n\right] + o(h^n)$$

car, quels que soient p et q non nul, on a $h^p\left(o(h^n)\right)^q = h^{p+nq}\left(\varepsilon(h)\right)^q = o(h^n)$.

Alors, si en développant chaque puissance, on ne garde que les puissances de h inférieures ou égales à n, on obtient un DL d'ordre n de $\dfrac{1}{g}$ en 0.

Propriété :

> Si f et g sont deux fonctions admettant un DL d'ordre $n \in \mathbb{N}$ en a tel que le terme constant du DL de g ne soit pas nul, alors $\dfrac{f}{g} = f \times \dfrac{1}{g}$ admet un DL d'ordre n en a.

d. Composée :

Dans le même ordre d'idée que dans la partie précédente, si f et g sont deux fonctions admettent un DL d'ordre n au voisinage de a et f(a) respectivement, $g \circ f$ admet un DL d'ordre n au voisinage de a.

Plus précisément, si $f(a+h) = f(a) + a_1 h + \cdots + a_n h^n + o(h^n)$ et $g(f(a)+u) = b_0 + b_1 u + \cdots + b_n u^n + o(u^n)$, on a, en posant $u = a_1 h + \cdots + a_n h^n + o(h^n)$:

$$g \circ f(a+h) = b_0 + b_1\left(a_1 h + \cdots + a_n h^n\right) + \cdots + b_n\left(a_1 h + \cdots + a_n h^n\right)^n + o(h^n).$$

Là encore, en ne gardant que les puissances de h inférieures ou égales à n, dans les développements, on obtient un DL d'ordre n (voire plus dans certains cas) de $g \circ f$ en a.

5. Développement limité des fonctions usuelles

Tous les développements limités suivants sont au voisinage de 0.

Développements de base (obtenus par la formule de Taylor-Young) :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \qquad \textbf{(1)}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) \qquad \textbf{(2)}$$

Développements obtenus à partir de **(1)** :

$$e^{\lambda x} = 1 + \lambda x + \frac{\lambda^2 x^2}{2!} + \frac{\lambda^3 x^3}{3!} + \cdots + \frac{\lambda^n x^n}{n!} + o(x^n) \qquad (x \leftrightarrow \lambda x \text{ avec } \lambda \in \mathbb{C})$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \qquad \text{(formule de ch)}$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \qquad \text{(formule de sh)}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \qquad \text{(formule d'Euler)}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \qquad \text{(formule d'Euler)}$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6) \qquad \text{(quotient)}$$

Développements obtenus à partir de **(2)** :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) \qquad (\alpha = -1)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n) \qquad (\alpha = -1 \text{ et } x \leftrightarrow -x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n) \qquad \left(\text{intégration de } \frac{1}{1+x}\right)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n) \qquad \left(\text{intégration de } \frac{1}{1-x}\right)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1\times 3\times\ldots\times(2n-3)}{2\times 4\times\ldots\times(2n)}x^n + o(x^n) \qquad (\alpha = ½)$$

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} - \cdots - \frac{1\times 3\times\ldots\times(2n-3)}{2\times 4\times\ldots\times(2n)}x^n + o(x^n) \qquad (\alpha = ½ \text{ et } x \leftrightarrow -x)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \cdots + (-1)^n\frac{1\times 3\times 5\times\ldots\times(2n-1)}{2\times 4\times 6\times\ldots\times(2n)}x^n + o(x^n) \qquad (\alpha = -½)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}=1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\frac{5}{16}x^3+\cdots+\frac{1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\ldots\times(2n)}x^n+o(x^n) \qquad (\alpha=-½ \text{ et } x\leftrightarrow -x)$$

$$\arctan x = x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\cdots+\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}+o(x^{2n+2}) \qquad (\text{intégration de } \frac{1}{1+x^2})$$

$$\arcsin x = x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+\cdots+\frac{1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\ldots\times(2n)}\frac{x^{2n}}{2n+1}+o(x^{2n+2}) \qquad (\text{intégration de } \frac{1}{\sqrt{1-x^2}})$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2}-x-\frac{1}{6}x^3-\frac{3}{40}x^5-\cdots-\frac{1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\ldots\times(2n)}\frac{x^{2n}}{2n+1}+o(x^{2n+2}) \qquad (\arccos x=\frac{\pi}{2}-\arcsin x)$$

IV – Applications

1. Calculs de limites et équivalents

Quand on a le DL d'une fonction au voisinage de a, le premier terme non nul permet d'obtenir $\lim_a f$ (qui est nulle si la puissance de ce terme est non nulle) et est aussi un équivalent simple de f(x) en a.

En effet, si $f(a+h)=a_ph^p+\ldots+a_nh^n+o(h^n)$ (avec $a_p\neq 0$), on a vu que $f(a+h)=a_ph^p+o(h^p)$ donc :

$$f(a+h)\underset{0}{\sim}a_ph^p \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a}f(x)=\lim_{h\to 0}f(a+h)=\lim_{h\to 0}a_ph^p.$$

Remarquons que l'on a aussi $f(a+h)\underset{0}{\sim}a_ph^p+\ldots+a_nh^n$ car $a_ph^p+\ldots+a_nh^n\underset{0}{\sim}a_ph^p$.

2. Comparaison locale de deux fonctions

Si f et g sont deux fonctions définies au voisinage de a et $f(a+h)-g(a+h)=\alpha h^p+\underset{0}{o}(h^p)$, alors $f-g$ et $h\mapsto \alpha h^p$ sont du même signe au voisinage de a. Ceci permet de comparer f et g localement et de donner la position relative des courbes de f et g.

En particulier, le signe du 1er terme du développement limité de f en a donne le signe de f au voisinage de a.

En particulier, si $f(x)-(\alpha x+\beta)=\lambda(x-a)^p+\underset{a}{o}\big((x-a)^p\big)$, alors le signe de $\lambda(x-a)^p$ permet de donner, localement, la position relative de la courbe de f et de sa tangente point d'abscisse a d'équation $y=\alpha x+\beta$.

3. Développements asymptotiques

a. <u>Cas des fonctions</u> :

Si la limite de f en a (éventuellement infini) est infinie, on ne peut pas faire de développement limité, mais éventuellement quelque chose de similaire que l'on appelle développement asymptotique, qui se présente sous la forme d'une somme dont les termes sont en générales simples (mais pas forcément polynomiaux en la variable) et telle que chaque terme est négligeable devant le précédent.

Dans le même ordre d'idée que dans la partie précédente, le signe du premier terme du développement asymptotique en $+\infty$ ou $-\infty$ de $f(x)-(\alpha x+\beta)$ permet de donner, localement, la position relative de la courbe de f et de son asymptote en $+\infty$ ou $-\infty$ d'équation $y=\alpha x+\beta$.

b. <u>Cas des suites</u> :

La notion de développement limité pour une suite n'a aucun sens, mais on peut souvent faire un développement asymptotique d'une suite.

Propriété :

Soit f une fonction admettant un DL d'ordre n en a : $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + ... + a_n(x-a)^n + \underset{a}{o}\left((x-a)^n\right)$.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergeant vers a, alors :

$$f(u_n) = a_0 + a_1(u_n - a) + ... + a_n(u_n - a)^n + o\left((u_n - a)^n\right).$$

Applications : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de limite nulle, alors :

- avec $f(x) = \ln(1+x)$, on obtient $\ln(1+u_n) = u_n + o(u_n)$ (et $\ln(1+u_n) \sim u_n$) ;
- avec $f(x) = e^x$, on obtient $e^{u_n} = 1 + u_n + o(u_n)$ (et $e^{u_n} \sim 1 + u_n$) ;
- avec $f(x) = (1+x)^\alpha$, on obtient $(1+u_n)^\alpha = 1 + \alpha u_n + o(u_n)$ (et $(1+u_n)^\alpha \sim 1 + \alpha u_n$) ;
- avec $f(x) = \sin x$, on obtient $\sin u_n = u_n + o(u_n)$ (et $\sin u_n \sim u_n$) ;
- …