

Chapitre 12 : Intégration sur un segment

Programme officiel PCSI

a) Fonctions en escalier

Subdivision d'un segment, pas d'une subdivision.

Fonction en escalier.

Intégrale d'une fonction en escalier.

Les fonctions sont définies sur un segment et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

b) Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Intégrale d'une fonction continue sur un segment à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Linéarité, positivité et croissance de l'intégrale.

Inégalité triangulaire intégrale : $\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq \int_{[a,b]} |f|$.

Relation de Chasles.

Si f est continue, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et si $\int_{[a,b]} f = 0$, alors $f = 0$.

Intégrale d'une fonction paire ou impaire sur un segment centré en 0. Intégrale d'une fonction périodique sur un intervalle de période.

Interprétation géométrique de l'intégrale.

Notations $\int_{[a,b]} f$, $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t) dt$.

Extension de la notation $\int_a^b f(t) dt$ au cas où $b \leq a$.

Propriétés correspondantes.

Valeur moyenne d'une fonction continue sur un segment.

c) Sommes de Riemann

Pour f continue sur le segment $[a, b]$,

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt.$$

Interprétation géométrique.

La démonstration pourra être proposée dans le cas où f est lipschitzienne.

d) Lien entre intégrale et primitive

Dérivation de $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ pour f continue.

Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives.

e) Inégalité de Taylor-Lagrange

Inégalité de Taylor-Lagrange.

La formule de Taylor avec reste intégral n'est pas exigible. L'égalité de Taylor-Lagrange est hors programme.

On souligne la différence de nature entre la formule de Taylor-Young (locale) et l'inégalité de Taylor-Lagrange (globale).

f) Brève extension au cas des fonctions à valeurs complexes

Intégrale d'une fonction continue sur un segment à valeurs dans $\mathbb{C}$. Définition au moyen des parties réelle et imaginaire.
Linéarité, majoration du module de l'intégrale.
Inégalité de Taylor-Lagrange.

Plan du résumé

I – Fonctions en escalier

1. Subdivision d'un segment
2. Fonctions en escalier

II – Intégrale d'une fonction continue sur un segment

1. Intégrale d'une fonction en escalier sur un segment
 - a. Définition
 - b. Propriétés
2. Intégrale d'une fonction continue sur un segment
3. Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment
 - a. Propriétés générales
 - b. Valeur moyenne
 - c. Fonction continue d'intégrale nulle
 - d. Inégalité de Cauchy-Schwarz
4. Extension à l'intégrale entre deux points d'un intervalle quelconque
5. Intégrales et primitives
6. Calculs d'intégrales

III – Formules de Taylor

1. Formule de Taylor avec reste intégral
2. Inégalité de Taylor-Lagrange

IV – Sommes de Riemann**V – Extension aux fonctions à valeurs complexes**

Résumé

I – Fonctions en escalier

Dans cette partie, on considère un segment $[a, b]$ avec $a < b$.

1. Subdivision d'un segment

Définitions :

Une subdivision du segment $[a, b]$ est une famille $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ telle que $a_0 = a$, $a_n = b$ et $\forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, $a_k < a_{k+1}$.

Une subdivision $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ de $[a, b]$ est dite régulière si $\forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, $a_{k+1} - a_k = c$ avec c fixé.

Si $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ et $\sigma' = (a'_0, a'_1, \dots, a'_m)$ sont deux subdivisions de $[a, b]$, σ' est dite plus fine que σ si $\{a_0, a_1, \dots, a_n\} \subset \{a'_0, a'_1, \dots, a'_m\}$.

Propriété :

Si σ et σ' sont deux subdivisions de $[a, b]$, alors $\sigma \cup \sigma'$ est une subdivision de $[a, b]$. De plus, cette subdivision est plus fine que σ et σ' .

2. Fonctions en escalier

Définitions :

Une fonction φ définie sur $[a, b]$ est dite en escalier, s'il existe une subdivision $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ de $[a, b]$ telle que $\forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, φ est constante sur $]a_k, a_{k+1}[$. Dans ce cas, la subdivision σ est dite adaptée ou subordonnée à φ .

Notation : On note $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Propriété :

$(\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, stable par produit.

Théorème (hors programme) :

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.

Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe des fonctions φ et ψ , en escalier sur $[a, b]$ telles que $\forall x \in [a, b]$:

$$\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x) \text{ et } |\psi(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon.$$

II – Intégrale d'une fonction continue sur un segment

1. Intégrale d'une fonction en escalier sur un segment

a. Définition :

Propriété et définition :

Soit f une fonction en escalier sur $[a, b]$ et $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f , telle que $\forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, $f(x) = b_k$ sur $]a_k, a_{k+1}[$.

La quantité $I = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) b_k$ est indépendante de la subdivision σ choisie et est appelée intégrale de f sur $[a, b]$, notée $\int_{[a,b]} f$, $\int_a^b f$ ou $\int_a^b f(t) dt$.

b. Propriétés :

Propriété :

Soit f une fonction constante sur $[a, b]$ telle que $\forall x \in [a, b]$, $f(x) = \lambda$. On a $\int_{[a,b]} f = (b-a)\lambda$.

Propriété : Linéarité de l'intégrale.

Soient f et g deux fonctions en escalier sur $[a, b]$. $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\int_{[a,b]} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g.$$

Propriétés : Positivité et croissance de l'intégrale.

Soient f et g deux fonctions en escalier sur $[a, b]$.

- Si f est positive sur $[a, b]$, alors $\int_{[a,b]} f \geq 0$.
- Si $f \leq g$ sur $[a, b]$, alors $\int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} g$.

Propriété : Relation de Chasles.

Soit f une fonction en escalier sur $[a, b]$ et $c \in [a, b]$.

La fonction f est en escalier sur $[a, c]$ et $[c, b]$, et $\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$.

2. Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Soit $f \in C([a, b], \mathbb{R})$. Posons :

- $E^- = \{\varphi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}) \mid \varphi \leq f\}$ et $I^- = \left\{ \int_{[a,b]} \varphi \mid \varphi \in E^- \right\}$.
- $E^+ = \{\varphi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}) \mid \varphi \geq f\}$ et $I^+ = \left\{ \int_{[a,b]} \varphi \mid \varphi \in E^+ \right\}$.

Propriété et définition :

On a $\sup I^- = \inf I^+$ et cette quantité est appelée intégrale de f sur $[a, b]$, notée $\int_{[a,b]} f$.

Interprétation graphique :

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormée.

- Si f est de signe constant sur $[a, b]$, $\int_{[a,b]} f$ représente l'*aire algébrique* (positive quand f est positive, négative quand f est négative) de la surface comprise entre l'axe des x , $\mathcal{C}$ et les droites verticales passant par a et b .
- Si f est de signe quelconque, $\int_{[a,b]} f$ représente l'aire de la surface au comprise entre l'axe des x , la partie de $\mathcal{C}$ au-dessus de (Ox) et les droites verticales passant par a et b , moins l'aire de la surface au comprise entre l'axe des x , la partie de $\mathcal{C}$ au-dessous de (Ox) et les droites verticales passant par a et b .

3. Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue sur un segmenta. Propriétés générales :Propriétés :

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$.

- *Linéarité de l'intégrale* : $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on a $\int_{[a,b]} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g$.
- *Positivité* : Si f est positive sur $[a, b]$, alors $\int_{[a,b]} f \geq 0$.
- *Croissance de l'intégrale* : Si $f \leq g$ sur $[a, b]$, alors $\int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} g$.
- *Inégalité de la valeur absolue ou triangulaire* : $\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq \int_{[a,b]} |f|$.
- *Relation de Chasles* : $\forall c \in [a, b]$, $\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$.

b. Valeur moyenne :Définition :

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. On appelle valeur moyenne de f sur $[a, b]$ le réel :

$$\frac{1}{b-a} \int_{[a,b]} f.$$

Propriété : Inégalités de la moyenne.

Soient f une fonction continue sur $[a, b]$.

- Si m est un minorant et M est un majorant de f sur $[a, b]$, alors $m \leq \frac{1}{b-a} \int_{[a,b]} f \leq M$.
- Si g est une fonction continue sur $[a, b]$, alors $\left| \int_{[a,b]} f g \right| \leq \sup_{[a,b]} |f| \int_{[a,b]} |g|$.

c. Fonction continue d'intégrale nulle :Propriété :

Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b]$. On a :

$$\int_{[a,b]} f = 0 \Leftrightarrow f = 0.$$

d. Inégalité de Cauchy-Schwarz :Propriété :

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$. On a :

$$\left(\int_{[a,b]} f \times g \right)^2 \leq \left(\int_{[a,b]} f^2 \right) \times \left(\int_{[a,b]} g^2 \right).$$

Et il y a égalité si et seulement si f et g sont proportionnelles ($\exists k \in \mathbb{R}$, tel que $f = kg$ ou $g = kf$).

4. **Extension à l'intégrale entre deux points d'un intervalle quelconque**Définitions :

Soit I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$. $\forall (a, b) \in I^2$, on appelle intégrale de f entre a et b , notée $\int_a^b f(t)dt$, la quantité définie par :

$$\int_a^b f(t)dt = \begin{cases} \int_{[a,b]} f & \text{si } a \leq b \\ -\int_{[b,a]} f & \text{si } a \geq b \end{cases}$$

5. **Intégrales et primitives**Théorème :

Soient $f \in C(I, \mathbb{K})$ et $a \in I$.

La fonction f admet des primitives sur I et la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$, définie sur I , est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a .

6. **Calculs d'intégrales**Propriété : *Intégration par parties*

Soient u et v deux fonctions de classe C^1 sur I . Alors, pour tous $a, b \in I$, on a :

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt.$$

Propriété : *Changement de variable*

Soient $f \in C(I, \mathbb{K})$ et φ une fonction de classe C^1 sur $[\alpha, \beta]$ et à valeurs dans I , on a :

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi'(u)f(\varphi(u))du.$$

Propriétés :

Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $f \in C([-a, a], \mathbb{K})$.

• Si f est paire, $\int_{-a}^a f(t)dt = 2 \int_0^a f(t)dt$.

• Si f est impaire, $\int_{-a}^a f(t)dt = 0$.

• Si f est T -périodique sur $\mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\int_x^{x+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$ et $\int_T^{x+T} f(t)dt = \int_0^x f(t)dt$.

III – Formules de Taylor

Dans tout le reste du chapitre, les fonctions considérées sont définies sur un intervalle I quelconque de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Formule de Taylor avec reste intégral (*non exigible, mais tellement importante...*)

Théorème : Formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n .

Soient $n \in \mathbb{N}$, f une fonction de classe C^{n+1} sur I et $a \in I$. On a $\forall x \in I$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

2. Inégalité de Taylor-Lagrange

Théorème : Inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n .

Soient $n \in \mathbb{N}$, f une fonction de classe C^{n+1} sur I . S'il existe un réel $M \geq 0$ tel que $|f^{(n+1)}| \leq M$ sur I , alors pour tous $a, b \in I$:

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

IV – Sommes de Riemann

Définition :

Soient f une fonction définie sur $[a, b]$, $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ une subdivision de $[a, b]$ et $(c_0, \dots, c_{n-1})$ tel que $\forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, $c_k \in [a_k, a_{k+1}]$. On appelle somme de Riemann de f associée à σ et aux c_k la quantité :

$$S(f, \sigma, c_0, \dots, c_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) f(c_k).$$

Propriété et définition :

Si f est une fonction continue sur $[a, b]$, alors pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut approcher ε près l'intégrale $\int_{[a,b]} f$ par une somme de Riemann de f . C'est ce qu'on appelle la méthode des rectangles pour estimer une intégrale.

Propriété :

Si f est une fonction continue sur $[a, b]$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \int_{[a,b]} f.$$

Dans le cas où f est λ -lipschitzienne sur $[a, b]$, on a de plus pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| \int_{[a,b]} f - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \right| \leq \lambda \frac{(b-a)^2}{n}.$$

V – Extension aux fonctions à valeurs complexes

Définition :

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in C(I, \mathbb{C})$. $\forall (a, b) \in I^2$, on appelle intégrale de f entre a et b , la quantité définie par :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \operatorname{Re}(f(t))dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(f(t))dt.$$

Les propriétés associées à l'intégration qui ne mettent pas en jeu des inégalités s'étendent aux fonctions à valeurs complexes.

En particulier, restent valables pour des fonctions continues sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$: la

linéarité de l'intégrale, l'inégalité triangulaire avec des modules : $\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|dt$, la relation de Chasles,

inégalité de la moyenne en modules $\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq (b-a) \sup |f|$, le lien entre intégrales et primitives, les formules d'intégration par parties et de changement de variable (avec des variables réelles), ainsi que l'inégalité de Taylor-Lagrange à tout ordre $n \in \mathbb{N}$, avec des modules.