

## Chapitre 13 : Séries numériques

### Programme officiel PCSI

#### a) Convergence et divergence

Sommes partielles d'une série numérique.  
Convergence, divergence, somme.

Linéarité de la somme.

Le terme général d'une série convergente tend vers 0.

Reste d'une série convergente.

Lien suite-série.

Séries géométriques : condition nécessaire et suffisante de convergence, somme.

Relation  $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$  pour  $z \in \mathbb{C}$ .

La série est notée  $\sum u_n$ .

En cas de convergence, sa somme est notée  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ .

Divergence grossière.

La suite  $(u_n)$  et la série télescopique  $\sum (u_{n+1} - u_n)$  sont de même nature.

#### b) Séries à termes positifs ou nuls

Convention de calcul et relation d'ordre dans  $[0, +\infty]$ .

Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.

Si  $0 \leq u_n \leq v_n$  pour tout  $n$ , la convergence de  $\sum v_n$  implique celle de  $\sum u_n$ .

Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont positives et si  $u_n \sim v_n$ , les séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont de même nature.

Si  $f$  est monotone, encadrement des sommes partielles de  $\sum f(n)$  à l'aide de la méthode des rectangles.

Séries de Riemann.

On note  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$  si la série  $\sum u_n$  d'éléments de  $\mathbb{R}^+$  diverge.

Application à l'étude de sommes partielles.

#### c) Séries absolument convergentes à termes réels ou complexes, suites sommables

Convergence absolue de la série numérique  $\sum u_n$ , encore appelée sommabilité de la suite  $(u_n)$ .

Une série numérique absolument convergente est convergente.

Si  $(u_n)$  est une suite complexe, si  $(v_n)$  est une suite d'éléments de  $\mathbb{R}^+$ , si  $u_n = O(v_n)$  et si  $\sum v_n$  converge, alors  $\sum u_n$  est absolument convergente donc convergente.

Notation  $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| < +\infty$ .

Le critère de Cauchy et la notion de semi-convergence sont hors programme.

Somme d'une suite sommable.

---

*Plan du résumé*

---

**I – Généralités**

1. Vocabulaire
2. Propriétés

**II – Séries à termes positifs**

1. Comparaison
2. Comparaison série-intégrale

**III - Séries de référence**

1. Séries géométriques
2. Séries exponentielles
3. Séries de Riemann

**IV - Séries absolument convergentes**

1. Définition
2. Propriétés

## *Résumé*

Dans tout le chapitre  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### I – Généralités

#### 1. Vocabulaire

##### Définitions :

Soit  $(u_n)_{n \geq n_0}$  une suite réelle ou complexe. La série associée à u (à termes réels ou complexes), notée  $\sum u_n$ , est la suite de terme général  $S_n = \sum_{k=n_0}^n u_k$ . On dit que la série associée à u est la série de terme général  $u_n$ . Dans ce cas,  $S_n$  est appelé somme partielle d'indice ou d'ordre n de la série associée à u.

On dit que la série est convergente ou converge si la suite  $(S_n)_{n \geq n_0}$  des sommes partielles converge.

Dans le cas contraire, on dit que la série est divergente ou diverge.

En cas de convergence, la limite S de  $(S_n)_{n \geq n_0}$  est appelée somme de la série et est notée  $S = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ .

Toujours dans ce cas,  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = S - S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n - \sum_{k=n_0}^n u_k$  est appelé reste d'ordre n de la série.

#### 2. Propriétés

##### Propriété :

Soit  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries convergentes. Pour tous  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ , la série de terme général  $\lambda u_n + \mu v_n$  converge et sa somme vaut  $\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$  (la somme est linéaire).

##### Propriété et définition :

Le terme général d'une série convergente tend vers 0.

Quand le terme général d'une série ne tend pas vers 0, on dit que la série diverge grossièrement.

##### Propriété :

Une suite  $(u_n)$  converge si et seulement si la série  $\sum (u_{n+1} - u_n)$  converge.

##### Propriété :

Soit une série  $\sum u_n$  à termes complexes.

$$\sum u_n \text{ converge} \Leftrightarrow \sum \operatorname{Re}(u_n) \text{ et } \sum \operatorname{Im}(u_n) \text{ convergent} \Leftrightarrow \sum \bar{u}_n \text{ converge.}$$

## II – Séries à termes positifs

### 1. Comparaison

#### Propriété :

Une série  $\sum u_n$  à termes réels et positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée. Dans le cas contraire, la série diverge vers  $+\infty$  et, dans ce cas, on note  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$ .

#### Propriété :

Soient  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries réelles telles que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq u_n \leq v_n$  (apcr suffit).

Si  $\sum v_n$  converge, alors  $\sum u_n$  converge et  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ .

Si  $\sum u_n$  diverge, alors  $\sum v_n$  diverge.

#### Propriété :

Soient  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries réelles.

Si  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont positives et si  $u_n \sim v_n$ , alors  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont de même nature (convergentes toutes les deux ou divergentes toutes les deux).

### 2. Comparaison série-intégrale

#### Propriété :

Soit  $\sum u_n$  une série telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = f(n)$  où  $f$  est une fonction continue et décroissante sur  $\mathbb{R}_+$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\int_0^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{k=0}^n u_k \leq u_0 + \int_0^n f(t) dt.$$

La série  $\sum u_n$  converge si et seulement si  $\left( \int_0^n f(t) dt \right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.

S'adapte pour  $f$  croissante.

## III - Séries de référence

### 1. Séries géométriques

#### Propriété et définition :

Pour tout  $q \in \mathbb{C}$ , la série géométrique  $\sum q^n$ , de raison  $q$ , converge si et seulement si  $|q| < 1$  et dans ce cas, on a  $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ .

### 2. Séries exponentielles

#### Propriété et définition :

Pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ , la série exponentielle  $\sum \frac{\lambda^n}{n!}$  converge et  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = e^\lambda$ .

### 3. Séries de Riemann

#### Propriété et définition :

Pour  $\alpha$  un réel fixé, la série  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  est appelée série de Riemann.

Elle converge si et seulement si  $\alpha > 1$ .

## IV - Séries absolument convergentes

### 1. Définitions

#### Définitions :

Soit  $\sum u_n$  une série à termes réels ou complexe.

On dit que la série est absolument convergente si  $\sum |u_n|$  est convergente. On dit aussi que la suite  $(u_n)$  est sommable. On note  $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| < +\infty$ .

*Hors programme mais bon...* : Si  $\sum u_n$  converge et pas  $\sum |u_n|$ , on dit que la série est semi-convergente.

### 2. Propriétés

#### Théorème :

Toute série réelle ou complexe absolument convergente est convergente.

#### Propriété :

Soit  $\sum u_n$  une série absolument convergente. On a alors  $\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ .

#### Propriété :

Soient  $(u_n)$  est une suite complexe et  $(v_n)$  est une suite réelle et positives.

Si  $u_n = O(v_n)$  et  $\sum v_n$  converge, alors  $\sum u_n$  est convergente.