Chapitre 15 : Algèbre linéaire

Programme officiel PCSI

A - Espaces vectoriels

a) Espaces vectoriels

Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Espace vectoriel des fonctions d'un ensemble dans un espace vectoriel. Combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs.	Espaces $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Espace $\mathbb{K}^\Omega$, cas particulier $\mathbb{K}^\mathbb{N}$.

b) Sous-espaces vectoriels

Sous-espace vectoriel : définition, caractérisation.	Sous-espace nul. Droite vectorielle. Plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Sous-espace $\mathbb{K}_n[X]$ de $\mathbb{K}[X]$.
Intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels. Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs.	Notation $\text{Vect}(x_i)_{i\in I}$. Tout sous-espace vectoriel contenant les x_i contient $\text{Vect}(x_i)_{i\in I}$.

c) Familles finies de vecteurs

Famille génératrice.	
Famille libre, liée.	Ajout d'un vecteur à une famille libre. Liberté d'une famille de polynômes à degrés distincts.
Base, coordonnées.	Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}_n[X]$. Bases de polynômes à degrés échelonnés dans $\mathbb{K}_n[X]$.

d) Somme de deux sous-espaces

Somme de deux sous-espaces.	
Somme directe de deux sous-espaces. Caractérisation par l'intersection.	La somme $F+G$ est directe si la décomposition de tout vecteur de $F+G$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G est unique.
Sous-espaces supplémentaires.	On incite les étudiants à se représenter des espaces supplémentaires par une figure en dimension 2 et 3.

B - Espaces de dimension finie

a) Existence de bases

Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie.	
Si $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ engendre E et si $(x_i)_{i\in I}$ est libre pour une certaine partie I de $\{1,\dots,n\}$, alors il existe une partie J de $\{1,\dots,n\}$ contenant I pour laquelle $(x_j)_{j\in J}$ est une base de E.	Existence de bases en dimension finie. Théorèmes de la base extraite (de toute famille génératrice on peut extraire une base), de la base incomplète (toute famille libre peut être complétée en une base).

b) Dimension d'un espace de dimension finie

Dans un espace engendré par n vecteurs, toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.	
Dimension d'un espace de dimension finie.	Dimension de $\mathbb{K}^n$, de $\mathbb{K}_n[X]$, de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Dimension de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1, de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants, de l'espace des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.
Dans un espace de dimension n, caractérisation des bases comme familles libres ou génératrices de n vecteurs.	
Rang d'une famille finie de vecteurs.	Notation $\mathrm{rg}(x_1,\dots,x_n)$.

c) Sous-espaces et dimension

Dimension d'un sous-espace d'un espace de dimension finie, cas d'égalité.	
Dimension d'une somme de deux sous-espaces : formule de Grassmann.	
Tout sous-espace d'un espace de dimension finie possède un supplémentaire. Caractérisation dimensionnelle des couples de sous-espaces supplémentaires.	
Base adaptée à un sous-espace, à une décomposition en somme directe de deux sous-espaces.	

C - Applications linéaires

a) Généralités

Application linéaire.	
Opérations sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composition. Isomorphisme, réciproque.	Espace vectoriel $\mathscr{L}(E,F)$ des applications linéaires de E dans F. Bilinéarité de la composition.
Image directe et image réciproque d'un sous-espace par une application linéaire.	
Image d'une application linéaire.	Notation $\mathrm{Im}\, u$.
Noyau d'une application linéaire.	Notation $\mathrm{Ker}\, u$. Caractérisation de l'injectivité.
Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille finie génératrice de E et si $u \in \mathscr{L}(E,F)$, alors $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Vect}\,(u(x_i))_{i\in I}$.	
Application linéaire de rang fini.	Notation $\mathrm{rg}(u)$.
Le rang de $v\circ u$ est majoré par $\min(\mathrm{rg}(u),\mathrm{rg}(v))$. Invariance du rang par composition par un isomorphisme.	

b) Endomorphismes

Identité, homothéties.	Notations id_E, id.
Opérations sur les endomorphismes : combinaison linéaire, composition.	Notation u^k pour $u \in \mathscr{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}$.
Projection ou projecteur, symétrie : définition géométrique, caractérisation par $p^2 = p$, par $s^2 = \mathrm{id}$.	On incite les étudiants à se représenter géométriquement ces notions par des figures en dimension 2 et 3.
Automorphismes. Groupe linéaire.	Notation $\mathrm{GL}(E)$. On vérifie les propriétés lui conférant une structure de groupe, mais la définition axiomatique des groupes est hors programme. Notation u^k pour $u \in \mathrm{GL}(E)$ et $k \in \mathbb{Z}$.

c) Détermination d'une application linéaire lorsque E est de dimension finie

Si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E de dimension finie et $(f_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de F, alors il existe une unique application $u \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que, pour tout $i \in I$, $u(e_i) = f_i$.	Caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité de u.
Espaces vectoriels isomorphes, caractérisation par la dimension.	
Pour une application linéaire entre deux espaces de même dimension finie, équivalence entre injectivité, surjectivité et bijectivité.	
Un endomorphisme d'un espace de dimension finie inversible à gauche ou à droite est inversible.	
Dimension de $\mathscr{L}(E,F)$ si E et F sont de dimension finie.	La démonstration peut être traitée plus tard, à l'aide de la dimension de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Si E_1 et E_2 sont des sous-espaces de E tels que $E = E_1 \oplus E_2$, si $u_1 \in \mathscr{L}(E_1,F)$, $u_2 \in \mathscr{L}(E_2,F)$, il existe une unique application $u \in \mathscr{L}(E,F)$ coïncidant avec u_1 sur E_1 et avec u_2 sur E_2.	

d) Théorème du rang

Forme géométrique du théorème du rang : si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et si S est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E, alors u induit un isomorphisme de S sur $\operatorname{Im} u$.	
Théorème du rang : si E est de dimension finie n et $u \in \mathscr{L}(E,F)$, alors $n = \dim \operatorname{Ker} u + \operatorname{rg}(u)$.	

e) Équations linéaires

Notion d'équation linéaire, i.e. de la forme $u(x) = a$ où $u \in \mathscr{L}(E,F)$, $a \in F$. L'ensemble des solutions est soit l'ensemble vide, soit de la forme $x_0 + \operatorname{Ker} u$.	Retour sur les systèmes linéaires, les équations différentielles linéaires d'ordres 1 et 2, les suites arithmético-géométriques.

f) Formes linéaires et hyperplans en dimension finie

Forme linéaire.	
Hyperplan.	Un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle. Équations d'un hyperplan dans une base en dimension finie.
Si H est un hyperplan de E et D une droite non contenue dans H, alors $E = H \oplus D$.	

Plan du résumé

Résumé

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I – Espaces vectoriels

1. Généralités

a. Définitions :

Définitions :

Soit E un ensemble muni d'une loi interne + et d'une loi externe sur $\mathbb{K}$, $\times$.

On dit que $(E,+,\times)$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel si :

- $(E,+)$ est un groupe commutatif (+ est interne, associative, commutative, possède un neutre noté 0_E (ou 0 quand ce n'est pas ambigu) et chaque élément x de E admet un symétrique pour + noté $-x$).
- $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \times x \in E$.
- $\forall x \in E$, $1 \times x = x$.
- $\forall x \in E$ et $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda \times (\mu \times x) = (\lambda\mu) \times x$ et $(\lambda+\mu) \times x = \lambda \times x + \mu \times x$
- $\forall (x,x') \in E^2$ et $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \times (x+x') = \lambda \times x + \lambda \times x'$.

Un élément d'un espace vectoriel est appelé vecteur et un élément de $\mathbb{K}$ est appelé scalaire.

Si $(x_1,x_2,...,x_p) \in E^p$, une combinaison linéaire des x_i est une expression de la forme $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_p x_p$ avec $(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_p) \in \mathbb{K}^p$.

Dans toute la suite, sauf cas contraire, on se place dans E*, un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel.*

Propriétés :

- $\forall x \in E$, $0x = 0_E$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda 0_E = 0_E$.
- $\lambda x = 0_E \Leftrightarrow x = 0_E$ ou $\lambda = 0$.
- $\forall x \in E$, $(-1)x = -x$ (le symétrique de x pour +).

b. Espaces produit, espaces d'applications :

Propriétés et définition :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

- $E \times F$, muni de l'addition et de la multiplication externe naturelles est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel appelé espace produit.
- Si X est un ensemble non vide, l'ensemble $\mathcal{F}(X,E)$ des applications de X dans E, muni de l'addition et de la multiplication externe naturelles est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

2. Sous-espaces vectoriels

a. Définition et caractérisation :

Définition :

Un sous-espace vectoriel de E est une partie non vide de E qui, muni des restrictions des lois de E, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Propriété :

Une partie non vide F de E est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si pour tous $x, x' \in F$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a $\lambda x + \mu x' \in F$ (F est stable par combinaisons linéaires).

b. Intersection de sous-espaces vectoriels :

Propriété :

Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

c. Sous-espace vectoriel engendré par une partie :

Définition :

Soit A une partie de E. On appelle sous-espace engendré par A, noté $\mathrm{Vect}(A)$, le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A.

Propriété :

Si A est une partie finie de E, alors $\mathrm{Vect}(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de A.

Propriété :

Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors pour tout $(x_1, x_2, ..., x_p) \in F^p$, $\mathrm{Vect}(x_1, x_2, ..., x_p) \subset F$.

Propriétés :

Soit $(x_1, x_2, ..., x_p)$ une famille de E alors :

- $\forall (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p) \in (\mathbb{K}^*)^p$, $\mathrm{Vect}(x_1, x_2, ..., x_p) = \mathrm{Vect}(\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, ..., \lambda_p x_p)$.
- $\forall (\lambda_2, ..., \lambda_p) \in \mathbb{K}^{p-1}$, $\mathrm{Vect}(x_1, x_2, ..., x_p) = \mathrm{Vect}(x_1, x_2 + \lambda_2 x_1, ..., x_p + \lambda_p x_1)$.
- $\forall (\alpha_2, ..., \alpha_p) \in \mathbb{K}^{p-1}$, $\mathrm{Vect}(x_1, x_2, ..., x_p) = \mathrm{Vect}(x_1 + \sum_{i=2}^{p} \alpha_i x_i, x_2, ..., x_p)$.

d. Somme de sous-espaces vectoriels :

Propriété et définition :

Soient F et G deux s.e.v. de E, l'ensemble $\{x \in E \setminus x = x_F + x_G, (x_F, x_G) \in F\times G\}$ est un sous-espace vectoriel de E appelé somme de F et G, noté $F + G$.

De plus, si $F \cap G = \{0\}$, on dit que la somme est directe et on note $F \oplus G$.

Propriété :

Soient F et G deux sous-espaces de E. On a $\mathrm{Vect}(F \cup G) = F + G$.

Propriété :

Soient F et G deux sous-espaces de E.

$F \cap G = \{0\}$ si et seulement si $\forall\, x \in F + G$, $\exists!(x_F, x_G) \in F \times G$ tel que $x = x_F + x_G$.

e. Sous-espaces supplémentaires :

Définition :

Soient F et G deux s.e.v. de E. On dit que F et G sont supplémentaires si $F \oplus G = E$.

Définition :

Soit F un s.e.v. de E. On dit que F est un hyperplan s'il admet une droite vectorielle pour supplémentaire.

Propriété :

Soit H un hyperplan de E. Toute droite de E non contenue dans H est un supplémentaire de H dans E.

3. Famille libre, famille liée

Définitions :

Soit $(x_1, x_2, ..., x_p)$ une famille finie de vecteurs de E.

On dit que la famille est libre si pour des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$:

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = 0_E \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0.$$

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille quelconque de vecteurs de E. On dit que la famille est libre si toute sous-famille finie de $(x_i)_{i \in I}$ est libre.

Dans le cas contraire, on dit que la famille (finie ou non) est liée.

Si deux vecteurs forment une famille liée, on dit qu'ils sont colinéaires.

Si trois vecteurs forment une famille liée, on dit qu'ils sont coplanaires.

Propriétés :

- Toute famille extraite d'une famille libre est libre.
- Si *F* est une famille liée, alors toute famille contenant *F* est liée.

Propriété :

Soit $(x_1, x_2, ..., x_n)$ une famille libre de n vecteurs de E, avec $n \geq 2$. Pour tout entier k compris entre 1 et $n-1$, $\mathrm{Vect}(x_1, ..., x_k)$ et $\mathrm{Vect}(x_{k+1}, ..., x_n)$ sont en somme directe.

4. Famille génératrice

Définition :

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E.

On dit que cette famille est génératrice de E si $E = \mathrm{Vect}\left(\{x_i, i\in I\}\right)$.

Propriété :

Soit $(x_1, x_2, ..., x_p)$ une famille génératrice de E alors :

- $\forall (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p) \in (\mathbb{K}^*)^p$, $(\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, ..., \lambda_p x_p)$ est génératrice.
- $\forall (\lambda_2, ..., \lambda_p) \in \mathbb{K}^{p-1}$, $(x_1, x_2 + \lambda_2 x_1, ..., x_p + \lambda_p x_1)$ est génératrice.
- $\forall (\alpha_2, ..., \alpha_p) \in \mathbb{K}^{p-1}$, $(x_1 + \sum_{i=2}^{p} \alpha_i x_i, x, ..., x_p)$ est génératrice.

Propriété :

Si *F* est une famille génératrice de E, alors toute famille contenant *F* est génératrice.

II – Applications linéaires

1. Définitions

Dans ce qui suit, on considère E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels.*

Définitions :

Une application $f : E \to F$ est une application linéaire, si $\forall (x, x') \in E^2$ et $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$:

$$f(\lambda x + \mu x') = \lambda f(x) + \mu f(x').$$

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$.

Si, de plus, f est bijective, f est un isomorphisme.

Si $E = F$, f est un endomorphisme. L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathcal{L}(E)$.

Si $E = F$ et f est bijective, f est un automorphisme. L'ensemble des automorphismes de E est noté GL(E).

Si $F = \mathbb{K}$, f est une forme linéaire.

Deux espaces vectoriels sont isomorphes s'il existe un isomorphisme de l'un vers l'autre.

Remarques :

- Quand cela a du sens, la loi $\circ$ est notée multiplicativement : $f \circ g = fg$.
- Si $f \in \mathcal{L}(E)$, $f \circ f \circ ... \circ f = f^k$ (où f apparait k fois), voir $f^{-1} \circ f^{-1} \circ ... \circ f^{-1} = f^{-k}$ quand $f \in GL(E)$.

Propriétés :

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- $f(0_E) = 0_F$.
- L'image d'une combinaison linéaire par une application linéaire est la combinaison linéaire des images avec les mêmes coefficients, autrement dit, pour tout $(x_1, x_2, ..., x_p) \in E^p$ et tout $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$:

$$f(\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_p x_p) = \lambda_1 f(x_1) + ... + \lambda_p f(x_p).$$

2. Applications linéaires et opérations

Propriété :

$\mathcal{L}(E,F)$ muni de l'addition et de la multiplication externe naturelles, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Propriétés :

- La composée de deux applications linéaires est linéaire.
- La réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme.
- La loi $\circ$ est distributive à droite et à gauche par rapport à +.

Définition et propriété :

L'ensemble $GL(E)$ est appelé groupe linéaire de E. Muni de la loi $\circ$, $GL(E)$ est un groupe : il est stable par composition et passage à la réciproque, $id_E \in GL(E)$.

3. Applications linéaires et sous-espaces vectoriels

Propriétés :

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

- Si G est un sous-espace de E, alors $f(G)$ est un sous-espace de F.
- Si H est un sous-espace de F, alors $f^{-1}(H)$ est un sous-espace de E.

Définition (*rappel*) :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit qu'un sous-espace F de E est stable par f si $f(F) \subset F$.

Propriétés :

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

- Si E_1 et E_2 sont deux sev de E, alors $f(E_1+E_2) = f(E_1)+f(E_2)$.
- Si $E = E_1 \oplus E_2$, f est entièrement déterminée par ses restrictions à E_1 et E_2.

4. Image et noyau

a. Définition :

Définitions :

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

- Le noyau de f, noté $\ker f$, est l'ensemble des antécédents de 0_F par f, soit :

$$\ker f = f^{-1}\left(\{0_F\}\right) = \left\{x \in E \setminus f(x) = 0_F\right\}.$$

- L'image de f, notée $\operatorname{Im} f$, est $f(E)$, soit :

$$\operatorname{Im} f = f(E) = \left\{y \in F \setminus \exists\, x \in E \text{ tel que } y = f(x)\right\}.$$

Propriétés :

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

- $\ker f$ est un sous-espace vectoriel de E.
- $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F.

b. Propriétés :

Propriété :

$\forall f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\forall \lambda \in \mathbb{K}^*$, $\ker \lambda f = \ker f$ et $\operatorname{Im} \lambda f = \operatorname{Im} f$.

Propriété :

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

- f est injective $\Leftrightarrow$ $\ker f = \{0_E\}$.
- f est surjective $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Im} f = F$.

Propriété :

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$.

- u est injective $\Leftrightarrow$ l'image d'une famille libre de E est une famille libre de F.
- u est surjective $\Leftrightarrow$ l'image d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de F.

c. Equations linéaires :

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$.

Une équation linéaire est une équation de la forme $u(x) = 0$ d'inconnue x (vecteur). L'ensemble des solutions est bien entendu $\ker u$.

Si maintenant b est un vecteur fixé de F, l'équation $u(x) = b$ admet des solutions si et seulement si $b \in \operatorname{Im} u$ et dans ce cas, l'ensemble des solutions est de la forme $a + \ker u = \{a + x \setminus x \in \ker u\}$ (*attention* : ce n'est pas un sev de E si $a \neq 0$).

5. Applications linéaires particulières

a. Homothéties :

Définition :

Une homothétie de rapport λ est un endomorphisme de E de la forme $\lambda \mathrm{Id}_E$ avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

b. Projecteurs :

Propriété et définition :

Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E.

Tout élément de x de E s'écrit alors de manière unique $x = x_F + x_G$ avec $(x_F, x_G) \in F \times G$.

L'application $p : E \to E \,;\, x \mapsto x_F$ est linéaire et s'appelle projecteur ou projection sur F parallèlement à G.

Propriété :

Soit p une projection sur F parallèlement à G. Alors :

- $\ker p = G$ et $\operatorname{Im} p = F$.
- $x \in \operatorname{Im} p \Leftrightarrow p(x) = x$.

Propriété :

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. p est un projecteur si et seulement si $p^2 = p$.

Propriété et définition :

Si p est une projection de E, alors $\mathrm{Id} - p$ est la projection sur $\ker p$ parallèlement à $\operatorname{Im} p$. On dit que p et $\mathrm{Id} - p$ sont des projecteurs associés.

c. Symétries :

Propriété et définition :

Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E.

Tout élément de x de E s'écrit alors de manière unique $x = x_F + x_G$ avec $(x_F, x_G) \in F \times G$.

L'application $s : E \to E \,;\, x \mapsto x_F - x_G$ est linéaire et s'appelle symétrie par rapport à F parallèlement à G.

Propriété :

Soit s une symétrie par rapport F parallèlement à G. Alors :

- $x \in F \Leftrightarrow s(x) = x$. Autrement dit : $F = \ker(s - \mathrm{Id})$.
- $x \in G \Leftrightarrow s(x) = -x$. Autrement dit : $G = \ker(s + \mathrm{Id})$.

Propriété :

Soit $s \in \mathcal{L}(E)$. s est une symétrie si et seulement si $s^2 = \mathrm{Id}$.

III – Dimension des espaces vectoriels

1. Bases

Définition :

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E. On dit que cette famille est base de E si elle est libre et génératrice.

Propriété et définition :

Soit E une espace vectoriel possédant une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$.

Tout vecteur x de E s'écrit alors de manière unique $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n$ avec $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$. Les x_i sont appelés coordonnées ou composantes de x dans la base $\mathcal{B}$.

2. Dimension d'un espace vectoriel

Définition :

Un espace vectoriel est de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie.

Théorème : *de l'échange* (*hors programme, mais fondateur*)

Soient $\mathcal{F} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ une famille libre et $\mathcal{G} = (y_1, y_2, ..., y_p)$ une famille génératrice de E.

On a $n \leq p$ et il existe n vecteur de $\mathcal{G}$, qui échangés par ceux de $\mathcal{F}$ forment une nouvelle famille génératrice.

Théorème : *de la base extraite*

De toute famille finie génératrice d'un espace E de dimension finie et différent de $\{0\}$, on peut extraire une base.

Théorème et définition :

Tout espace vectoriel E de dimension finie et différent de $\{0\}$ possède des bases et toutes les bases ont le même cardinal. Ce cardinal s'appelle la dimension de E, noté $\dim E$.

Propriété :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dim \mathbb{K}^n = n$.

Propriété :

Etant donnée une famille *F* de p vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n :

- Si *F* est libre, alors $p \leq n$, avec égalité si et seulement si *F* est une base.
- Si *F* est génératrice, alors $p \geq n$, avec égalité si et seulement si *F* est une base.

Corollaire :

Etant donnée une famille *F* de n vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n :

$$F \text{ est une base} \Leftrightarrow F \text{ est libre} \Leftrightarrow F \text{ est génératrice.}$$

3. Applications linéaires et dimensions finies

Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base de E.

$$\forall\, x \in E,\ \exists! (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n,\ x = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n .$$

Alors, si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ où F est un espace vectoriel, on a :

$$u(x) = x_1u(e_1) + x_2u(e_2) + ... + x_nu(e_n) .$$

Ceci prouve que la donnée des $u(e_i)$ pour i entre 1 et n définit parfaitement u.

Réciproquement, si $(f_1, f_2, ..., f_n)$ est une famille de n vecteurs de F, alors il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $\forall\, i \in [\![1, n]\!]$, $u(e_i) = f_i$.

Dans le même ordre d'idée, si $E = E_1 \oplus E_2$, $u_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$ et $u_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$, alors il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ coïncidant avec u_1 sur E_1 et u_2 sur E_2.

Toujours dans le même ordre d'idée, la donnée d'une famille $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de n vecteurs de E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque détermine une unique application linéaire u de $\mathbb{K}^n$ dans E telle que $\forall\, i \in [\![1, n]\!]$, $u(e_i) = x_i$ où $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

4. Dimension finie et isomorphismes

Propriété :

> Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
>
> f est un isomorphisme si et seulement si l'image d'une base de E est une base de F.

Corollaires :

> - Tout espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.
> - Deux espaces vectoriels de dimension finie E et F sont isomorphes si et seulement si $\dim E = \dim F$.

5. Espace produit

Propriété :

> Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.
>
> $E \times F$ est de dimension finie et $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$. De plus, si $(e_1, e_2, ..., e_n)$ et $(f_1, f_2, ..., f_p)$ sont des bases de E et F alors $\big((e_1, 0_F), (e_2, 0_F), ..., (e_n, 0_F), (0_E, f_1), (0_E, f_2), ..., (0_E, f_p)\big)$ est une base de $E \times F$.

6. Espace $\mathcal{L}(E, F)$

Propriété :

> Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.
>
> $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie et $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \times \dim F$.

7. Sous-espaces vectoriels en dimension finie

a. Dimension d'un sous-espace vectoriel :

Théorème :

> Tout sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E de dimension finie est de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$ avec égalité si et seulement si $F = E$.

b. Rang d'une famille de vecteurs :

Définition :

> Soit $\mathcal{F}$ une famille finie de vecteurs de E. Le rang de $\mathcal{F}$, noté $\mathrm{rg}(\mathcal{F})$, est la dimension de $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.

Propriété :

> Soit $\mathcal{F}$ une famille finie de vecteurs de E. $\mathcal{F}$ est libre si et seulement si $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \mathrm{Card}(\mathcal{F})$.

Propriété :

Soit $(x_1, x_2, ..., x_p)$ une famille de E alors :

- $\forall (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p) \in (\mathbb{K}^*)^p$, $rg(x_1, x_2, ..., x_p) = rg(\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, ..., \lambda_p x_p)$.
- $\forall (\lambda_2, ..., \lambda_p) \in \mathbb{K}^{p-1}$, $rg(x_1, x_2, ..., x_p) = rg(x_1, x_2 + \lambda_2 x_1, ..., x_p + \lambda_p x_1)$.
- $\forall (\alpha_2, ..., \alpha_p) \in \mathbb{K}^{p-1}$, $rg(x_1, x_2, ..., x_p) = rg(x_1 + \sum_{i=2}^{p} \alpha_i x_i, x, ..., x_p)$.

c. Théorème de la base incomplète :

Théorème : *de la base incomplète.*

Dans un espace vectoriel E de dimension finie, toute famille libre peut être complétée en une base de E.

Corollaire :

Dans un espace vectoriel E de dimension finie, tout sous-espace vectoriel possède un supplémentaire.

d. Dimension de la somme :

Propriétés :

Soient F et G deux sous-espaces d'un espace vectoriel E de dimension finie.

- Si $F \cap G = \{0\}$, on a $\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$.
- Pour F et G quelconques, $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$ (c'est la *formule de Grassmann*).
- $F \cap G = \{0\}$ si et seulement si $\dim(F + G) = \dim F + \dim G$.

Propriété :

Deux sous-espaces F et G d'un espace vectoriel E de dimension finie sont supplémentaires si et seulement si $F \cap G = \{0\}$ et $\dim F + \dim G = \dim E$

Corollaire :

Soit H un sev de E. H est un hyperplan ssi $\dim H = \dim E - 1$.

IV – Applications linéaires en dimension finie

1. Rang d'une application linéaire

Dans cette partie, on considère E et F deux espaces vectoriels.

a. Définition :

Propriété :

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de E, alors $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}\big((u(x_i))_{i \in I}\big)$.

Si E est de dimension finie et $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ est une base de E, alors :

$$\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(u(\mathcal{B})) = \operatorname{Vect}(u(e_1), ..., u(e_n)).$$

Propriété et définition :

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$.

Si E ou F est de dimension finie, alors $\operatorname{Im} u$ est de dimension finie et la dimension de $\operatorname{Im} u$ est appelée rang de u, noté $\operatorname{rg}(u)$.

De plus, si E est de dimension finie n, alors $\operatorname{rg}(u) \leq n$ et si F est de dimension finie p, alors $\operatorname{rg}(u) \leq p$, ainsi, si E et F sont de dimension finie, $\operatorname{rg}(u) \leq \min(\dim E, \dim F)$.

b. Théorème du rang :

Propriété :

Si $u \in \mathcal{L}(E,F)$ avec E de dimension finie et G est un supplémentaire de $\ker u$ dans E, alors u induit un isomorphisme de G dans $\operatorname{Im} u$.

Théorème : *du rang*.

Pour tout $u \in \mathcal{L}(E,F)$ avec E de dimension finie, on a :

$$\dim(\ker u) + \operatorname{rg}(u) = \dim E.$$

Corollaire 1 :

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ où E et F sont de dimension finie, n et p respectivement. On a alors :

- u est injective si et seulement si $\operatorname{rg}(u) = n$.
- u est surjective si et seulement si $\operatorname{rg}(u) = p$.

Corollaire 2 :

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Si E et F sont de *même* dimension finie, alors :

$$u \text{ bijective } \Leftrightarrow u \text{ injective } \Leftrightarrow u \text{ surjective.}$$

Corollaire 3 :

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. u est un automorphisme si et seulement si $\operatorname{rg}(u) = n$ où n est la dimension de E.

Corollaire 4 :

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$ où E, F et G sont trois espaces vectoriels de dimension finie.

- $\operatorname{Im}(v \circ u) \subset \operatorname{Im} v$, $\ker u \subset \ker(v \circ u)$ et $\operatorname{rg}(v \circ u) = \min(\operatorname{rg}(u), \operatorname{rg}(v))$.
- Si u est un isomorphisme, alors $\operatorname{Im}(v \circ u) = \operatorname{Im} v$ et $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg}(v)$.
- Si v est un isomorphisme, alors $\ker(v \circ u) = \ker u$ et $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg}(u)$.

2. Formes linéaires et hyperplans en dimension finie

Propriétés et définition :

Soit H un sous-espace de E.

H est un hyperplan si et seulement si H est le noyau d'une forme linéaire non nulle $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

Alors, l'équation $\varphi(x)=0$ est une <u>équation cartésienne</u> de H.

Si E est de dimension finie $n>0$, alors toute équation cartésienne de H est de la forme $\varphi(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ avec $x=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ où $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est une base E et $\varphi(e_i)=a_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.