Chapitre 17 : Matrices et systèmes linéaires

Programme officiel PCSI

b) Résolution de petits systèmes linéaires par la méthode du pivot

Système linéaire à coefficients réels de deux ou trois équations à deux ou trois inconnues. Algorithme du pivot et mise en évidence des opérations élémentaires.	Interprétation géométrique : intersection de droites dans $\mathbb{R}^2$, de plans dans $\mathbb{R}^3$. Notations $L_i \leftrightarrow L_j$, $L_i \leftarrow \lambda L_i$ ($\lambda \neq 0$), $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.

a) Opérations sur les matrices

Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$. Addition, multiplication par un scalaire, combinaisons linéaires.	
Matrices élémentaires.	Toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est combinaison linéaire de matrices élémentaires.
Produit matriciel ; bilinéarité, associativité.	Si X est une matrice colonne, AX est une combinaison linéaire des colonnes de A.
Produit d'une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.	Symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$.
Transposée d'une matrice.	Notation $A^\top$.
Opérations sur les transposées : combinaison linéaire, produit.	

b) Opérations élémentaires

Interprétation des opérations élémentaires sur les lignes et sur les colonnes en termes de produit matriciel.	

c) Systèmes linéaires

Écriture matricielle $AX = B$ d'un système linéaire. Système homogène associé.	
Système compatible.	Le système $AX = B$ est compatible si B est combinaison linéaire des colonnes de A.
Les solutions du système compatible $AX = B$ sont les $X_0 + Y$, où X_0 est une solution particulière et où Y parcourt l'ensemble des solutions du système homogène associé.	On reprend brièvement l'algorithme du pivot, en termes d'opérations élémentaires sur les lignes, dans ce contexte général. Toute technicité est exclue.

d) Ensemble des matrices carrées

Ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.	Non commutativité si $n \geqslant 2$. Exemples de diviseurs de zéro, d'éléments nilpotents.
Matrice identité, matrice scalaire.	Notation I_n.
Matrices symétriques, antisymétriques.	Notations $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.
Formule du binôme.	Application au calcul de puissances.
Produit de matrices diagonales, de matrices triangulaires supérieures, inférieures.	
Matrice inversible, inverse. Groupe linéaire.	Notation $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. On vérifie les propriétés lui conférant une structure de groupe, mais la définition axiomatique des groupes est hors programme.

Inverse d'une transposée.	
Inverse d'un produit de matrices inversibles.	
Les opérations élémentaires préservent l'inversibilité.	
Calcul de l'inverse d'une matrice, par opérations élémentaires ou par résolution du système $AX = Y$.	Toute technicité est exclue.
Condition nécessaire et suffisante d'inversibilité d'une matrice triangulaire ; l'inverse d'une matrice triangulaire inversible est triangulaire.	Cas particulier des matrices diagonales.

A - Matrices et applications linéaires

a) Matrice d'une application linéaire dans des bases

Matrice d'un vecteur, d'une famille de vecteurs dans une base, d'une application linéaire dans un couple de bases, d'un endomorphisme dans une base.	Exemple : matrice d'une rotation vectorielle du plan, d'une homothétie.
Isomorphisme de $\mathscr{L}(E,F)$ sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ induit par le choix d'un couple de bases.	
Coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire.	
Matrice d'une composée d'applications linéaires. Lien entre matrices inversibles et isomorphismes.	Cas particulier des endomorphismes. Matrice de la réciproque d'un isomorphisme.

b) Application linéaire canoniquement associée à une matrice, rang d'une matrice

Application linéaire canoniquement associée à une matrice.	On identifie ici $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$.
Noyau, image et rang d'une matrice.	Les colonnes engendrent l'image, les lignes donnent un système d'équations du noyau.
Une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si son noyau est réduit au sous-espace nul, ou si et seulement si ses colonnes engendrent l'espace $\mathbb{K}^n$ ou si et seulement si son rang est n.	Retour sur la condition d'inversibilité d'une matrice triangulaire. Lien entre les diverses notions de rang.
Toute matrice carrée inversible à gauche ou à droite est inversible.	
Les opérations élémentaires sur les colonnes (resp. lignes) conservent l'image (resp. le noyau). Les opérations élémentaires conservent le rang.	Application : calcul du rang.
Invariance du rang par transposition.	Ce résultat est admis.

c) Changements de bases

Matrice de passage d'une base à une autre.	
Inversibilité et inverse d'une matrice de passage.	
Effet d'un changement de base sur la matrice d'un vecteur.	
Effet d'un changement du couple de bases sur la matrice d'une application linéaire.	
Effet d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme.	Exemples de recherche d' une base dans laquelle la matrice d'un endomorphisme donné est simple.
Matrices semblables.	Exemples de recherche d'une matrice simple semblable à une matrice donnée.

d) Systèmes linéaires

Interprétation de l'ensemble des solutions d'un système homogène comme noyau d'une matrice. Rang d'un tel système, dimension de l'espace des solutions.	
Le système $AX = B$ est compatible si et seulement si B appartient à l'image de A.	
Si A est carrée et inversible, le système $AX = B$ possède une unique solution.	Dans ce cas, le système est dit de Cramer.

Plan du résumé

Résumé

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I – Généralités

1. Définitions

Définition :

Une matrice $n\times p$ est un tableau d'éléments de $\mathbb{K}$ contenant n lignes et p colonnes.

Notations :

- Un matrice A est notée $A=(a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$ ou $A=(a_{i,j})$ (quand on connait n et p par le contexte) et :

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,p} \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

- Les $a_{i,j}$ sont appelés coefficients de A.
- On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes sur $\mathbb{K}$.

Définitions :

On appelle matrices élémentaires de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ les matrices $E_{i,j}$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ne contenant que des 0, sauf au croisement de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne où il y a un 1, avec $(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]$. On a donc :

$$E_{i,j}=\left(\delta_{i,k}\delta_{j,\ell}\right)_{(k,\ell)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$$

où $\delta_{a,b}$ est le symbole de Kronecker, qui vaut 1 quand $a=b$ et 0 sinon.

2. Opérations sur les matrices

a. Combinaisons linéaires :

Si $A=(a_{i,j})$ et $B=(b_{i,j})$ sont deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on définit :

- la somme de A et B par : $A+B=(a_{i,j}+b_{i,j})$;
- le produit de A par un scalaire λ par : $\lambda A=(\lambda a_{i,j})$.

Propriété :

$\left(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),+,\cdot\right)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Propriété et définitions :

La famille $(E_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$ des matrice élémentaires de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, appelée base canonique. De plus, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de dimension finie np.

b. Produit :

Si $A=(a_{i,j})\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B=(b_{i,j})\in\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ sont deux matrices, on définit le produit $AB=(c_{i,j})$ avec :

$$\forall\,(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;q]\!],\ c_{i,j}=\sum_{k=1}^{p}a_{i,k}b_{k,j}.$$

Propriétés :

L'application $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})\times\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})\,;(A,B)\mapsto AB$ est bilinéaire, c'est-à-dire :

- si $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, l'application $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})\to\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})\,;M\mapsto AM$ est linéaire ;
- si $B\in\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, l'application $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})\to\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})\,;M\mapsto MB$ est linéaire.

Le produit matriciel (s'il est défini) est associatif.

Propriété :

Pour tous $n,p,q\in\mathbb{N}^*$ et tout $(i,j,i',j')\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]\times[\![1;p]\!]\times[\![1;q]\!]$, on a :

$$E_{i,j}E_{i',j'}=\delta_{i',j}E_{i,j'}$$

avec $E_{i,j}\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $E_{i',j'}\in\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $E_{i,j'}\in\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$.

3. Matrices colonnes – Matrices lignes

Définitions :

Une matrice colonne est une matrice ne contenant qu'une seule colonne, un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Une matrice ligne est une matrice ne contenant qu'une seule ligne, un élément de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$.

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, $\mathcal{B}$ une base de E et $(X_1,X_2,...,X_p)$ une famille de p vecteurs de E.
La matrice de la famille $(X_1,X_2,...,X_p)$ dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont la $j^{\text{ème}}$ colonne contient les coordonnées de X_j dans la base $\mathcal{B}$.

Propriété :

Si $X\in\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors AX est un vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, combinaison linéaires des vecteurs colonnes de A.

4. Matrices carrées

Définition :

Une matrice carrée est une matrice dont le nombre de colonnes est égal au nombre de lignes.

Notation : On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées $n\times n$ (au lieu de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$).

Propriété :

$(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, stable par produit.

Attention : Le produit dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n'est ni intègre (on peut avoir $AB=0_n$ avec $A\neq 0_n$ et $B\neq 0_n$), ni commutatif ($AB\neq BA$ en général). Les identités remarquables, dont la formule du binôme de Newton, ne fonctionnent donc qu'avec des matrices qui *commutent*.

Définition :

Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente s'il existe un entier naturel k tel que $A^k = 0_n$.

Définitions :

Pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, les éléments $a_{i,i}$ sont appelés éléments ou coefficients diagonaux de A.

Une matrice diagonale est une matrice carrée dont tous les coefficients sont nuls hormis les éléments diagonaux (qui peuvent être nuls). Une matrice diagonale d'éléments diagonaux $a_1, a_2, ..., a_n$ est notée $\mathrm{diag}(a_1, a_2, ..., a_n)$.

La matrice $\mathrm{diag}(1,1,...,1)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est appelée matrice identité, notée I_n.

Une matrice de la forme λI_n avec $\lambda \in \mathbb{K}$ est appelée matrice scalaire.

Une matrice triangulaire supérieure est une matrice carrée $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients en dessous la diagonale sont nuls, soit $\forall\, i > j$, $a_{i,j} = 0$.

Une matrice triangulaire inférieure est une matrice carrée $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients au dessus de la diagonale sont nuls, soit $\forall\, i < j$, $a_{i,j} = 0$.

Notations : On note $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}_n^{\sup}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{T}_n^{\inf}(\mathbb{K})$ les ensembles des matrices diagonales, triangulaires supérieures et inférieures respectivement.

Propriété :

$\left(\mathcal{D}_n(\mathbb{K}), +, \cdot\right)$, $\left(\mathcal{T}_n^{\sup}(\mathbb{K}), +, \cdot\right)$ et $\left(\mathcal{T}_n^{\inf}(\mathbb{K}), +, \cdot\right)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, stables par produit. De plus, $\dim \mathcal{D}_n(\mathbb{K}) = n$, $\dim \mathcal{T}_n^{\sup}(\mathbb{K}) = \dim \mathcal{T}_n^{\inf}(\mathbb{K}) = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

5. Transposition

Définitions :

Si $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la matrice transposée de A, notée A^T, est la matrice $(a_{j,i})$ de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

Propriétés :

- L'application de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ qui, à une matrice A, associe sa transposée est involutive ($(A^T)^T = A$) et linéaire.
- Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, alors $(AB)^T = B^T A^T$.

Définitions :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On si que A est symétrique si $A^T = A$ et antisymétrique si $A^T = -A$.

Propriété :

Les ensembles $S_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ des matrices respectivement symétriques et antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

De plus (*hors programme*), $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de dimensions respectives $\dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

6. Matrices carrées inversibles

Définition :

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$.

Propriété et définition :

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible, alors la matrice B de la définition précédente est unique. Elle est appelée inverse de A, notée A^{-1}.

Définition :

L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est appelé groupe linéaire, noté $GL_n(\mathbb{K})$.

Propriétés :

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$.
- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $BA = I_n$.

Propriétés :

$(GL_n(\mathbb{K}),\times)$ est un groupe (non commutatif) : $GL_n(\mathbb{K})$ est stable par produit et passage à l'inverse, I_n est le neutre de $GL_n(\mathbb{K})$. De plus, pour toutes $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Propriété :

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors :

$$A \text{ est inversible} \iff A^\top \text{ est inversible.}$$

Et dans ce cas, on a $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$.

Propriété :

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire supérieure (*resp*. inférieure, *resp*. diagonale), alors A est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls. De plus, sont inverse est triangulaire supérieure (*resp*. inférieure, *resp*. diagonale) et ses coefficients diagonaux sont les inverses de ceux de A.

II – Matrices et applications linéaires

1. Isomorphisme entre $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ et notons $(e_1, e_2, ..., e_p)$ et $(f_1, f_2, ..., f_n)$ les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$.

A toute application linéaire u de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$, on peut associer une matrice $A=(a_{i,j})\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ où $a_{i,j}$ est la $i^{\text{ème}}$ coordonnée de l'image de e_j par u dans $(f_1,f_2,...,f_n)$. On dit que A est la matrice de u dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$. Réciproquement, à toute matrice $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on peut associer comme ci-dessus une unique application linéaire de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$.

Propriété :

> L'application de $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p,\mathbb{K}^n)$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ qui à u associe sa matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$ est un isomorphisme (dit canonique).

Définitions :

> Soit $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle noyau de A, noté $\ker A$, et image de A, noté $\operatorname{Im} A$, le noyau et l'image (respectivement) de l'application linéaire de $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p,\mathbb{K}^n)$ canoniquement associée à A.

2. Isomorphisme entre $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

On peut généraliser la propriété ci-dessus. Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-ev de dimensions respectives p et n, $\mathcal{B}=(e_1,e_2,...,e_p)$ une base de E, $\mathcal{C}=(f_1,f_2,...,f_n)$ une base de F et $u\in\mathcal{L}(E,F)$, alors $\forall\, j\in[\![1,p]\!]$, on peut écrire $u(e_j)=a_{1,j}f_1+a_{2,j}f_2+...+a_{n,j}f_n$. Ainsi, on peut associer à u une matrice $A=(a_{i,j})\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Il est clair que la matrice A dépend des bases choisies, elle est appelée matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, notée $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$. La $j^{\text{ème}}$ colonne de $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ est constituée des coordonnées dans la base $\mathcal{C}$ de l'image par u du $j^{\text{ème}}$ vecteur de la base $\mathcal{B}$.

Propriété :

> L'application $u\mapsto M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E,F)$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

3. Ecriture matricielle de l'effet d'une application linéaire sur un vecteur

Remarque : $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$ sont souvent identifiés. Autrement dit, vecteurs colonnes et vecteurs de $\mathbb{K}^n$ sont souvent identifiés.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimensions respectives p et n, $\mathcal{B}=(e_1,e_2,...,e_p)$ une base de E, $\mathcal{C}=(f_1,f_2,...,f_n)$ une base de F, $u\in\mathcal{L}(E,F)$ et $A=M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)=(a_{i,j})$.

Pour tout $x=x_1e_1+...+x_pe_p\in E$, en notant $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_p\end{pmatrix}$ et Y les vecteurs colonnes associés à x et u(x), on a :

$$Y=\begin{pmatrix}a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+...+a_{1,p}x_p\\ a_{2,1}x_1+a_{2,2}x_2+...+a_{2,p}x_p\\ \vdots\\ a_{n,1}x_1+a_{n,2}x_2+...+a_{n,p}x_p\end{pmatrix}.$$

Soit :

$$\underline{Y=AX}.$$

Propriétés :

- Si on note $C_1, \dots, C_p$ les colonnes de $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors $\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}(C_1, \dots, C_p)$.
- $\ker A$ est l'ensemble des solutions de $AX = 0$.

4. Matrice d'un endomorphisme

Il existe un isomorphisme canonique de $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Si E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et $u \in \mathcal{L}(E)$, alors on note $M_{\mathcal{B}}(u)$ la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$. La $j^{\text{ème}}$ colonne de $M_{\mathcal{B}}(u)$ est constituée des coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ de l'image par u du $j^{\text{ème}}$ vecteur de la base $\mathcal{B}$.

L'application $u \mapsto M_{\mathcal{B}}(u)$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

5. Produit de matrices et composition

Propriété :

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-ev de dimensions finies, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$.

Si $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ sont des bases respectives de E, F et G, on a :

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(v \circ u) = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(v)\, M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u).$$

6. Matrices inversibles et automorphismes

Propriétés :

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n.

- Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si l'endomorphisme de E associé à A dans une base $\mathcal{B}$ quelconque de E est bijectif.
- Un endomorphisme u de E est bijectif si et seulement si sa matrice dans une base $\mathcal{B}$ quelconque de E est inversible, et dans cas, on a $M_{\mathcal{B}}(u^{-1}) = M_{\mathcal{B}}(u)^{-1}$.

III – Changement de base

1. Matrices de passage

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ deux bases de E.

Alors, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on a $f_j = a_{1,j}e_1 + a_{2,j}e_2 + \dots + a_{n,j}e_n$ (les $a_{i,j}$ étant les coordonnées de f_j dans $\mathcal{B}$).

Définition :

Les relations précédentes définissent une matrice $(a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ appelée <u>matrice de passage</u> de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, notée $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$.

Remarque : $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_E)$.

Propriétés :

- *Relation de Chasles* : $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''}$.
- $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \in GL_n(\mathbb{K})$ et $(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$.

2. Effet d'un changement de base

a. Effet sur les coordonnées d'un vecteur :

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, ..., f_n)$ deux bases de E et $x \in E$.

Si $(x_1, x_2, ..., x_n)$ et $(x'_1, x'_2, ..., x'_n)$ sont les coordonnées de x dans $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ respectivement, on a :

$$\boxed{X = PX'}$$

avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ et $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$.

b. Effet sur la matrice d'une application linéaire :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimensions respectives p et n, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de F, et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

On note $A = M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B = M_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(u) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $Q = P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\boxed{B = Q^{-1}AP}$$

Remarque : Dans ce cas, on dit que les matrices A et B sont équivalentes.

c. Effet sur la matrice d'un endomorphisme :

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Si on note $A = M_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B = M_{\mathcal{B}'}(u) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors :

$$\boxed{B = P^{-1}AP}$$

Définition :

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On dit que A et B sont semblables, s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

Propriété :

Deux matrices semblables représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes.

Propriété : (*pas explicitement au programme, mais tellement utile…*)

Pour tout $(A, P) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times GL_n(\mathbb{K})$ et tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$(P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP.$$

IV – Opérations élémentaires sur les matrices

1. Définitions

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Notons $L_1, L_2, \dots, L_n$ les lignes de A et $C_1, C_2, \dots, C_p$ ses colonnes.

Définitions :

On appelle opérations (ou manipulations) élémentaires sur les lignes de A les manipulations suivantes :

- multiplication d'une ligne L_i par un scalaire α non nul (*codage* : $L_i \leftarrow \alpha L_i$) ;

- addition d'un multiple d'une ligne αL_j à une autre, L_i (*codage* : $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$) ;

- échange de deux lignes L_i et L_j (*codage* : $L_i \leftrightarrow L_j$).

On appelle opérations (ou manipulations) élémentaires sur les colonnes de A les manipulations similaires sur les colonnes (*codées* : $C_i \leftarrow \alpha C_i$, $C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$ et $C_i \leftrightarrow C_j$).

2. Interprétation en termes de produits matriciels

Si $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- Multiplier la $i^{\text{ème}}$ ligne L_i de A par $\alpha \neq 0$ (opération : $L_i \leftarrow \alpha L_i$) revient à transformer A en $D_i(\alpha)A$ avec $D_i(\alpha) = I_n + (\alpha - 1)E_{i,i}$.
- Additionner αL_j à la $i^{\text{ème}}$ ligne L_i de A (opération : $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$) revient à transformer A en $T_{i,j}(\alpha)A$ avec $T_{i,j}(\alpha) = I_n + \alpha E_{i,j}$.
- Echanger les $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ lignes L_i et L_j de A (opération : $L_i \leftrightarrow L_j$) revient à transformer A en $X_{i,j}A$ avec $X_{i,j} = I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$.

Et :

- Multiplier une colonne C_i de A par $\alpha \neq 0$ (opération : $C_i \leftarrow \alpha C_i$) revient à transformer A en $AD_i(\alpha)$.
- Ajouter αC_j à la $i^{\text{ème}}$ colonne C_i de A (opération : $C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$) revient à transformer A en $AT_{j,i}(\alpha)$.
- Echanger les colonnes C_i et C_j de A (opération : $C_i \leftrightarrow C_j$) revient à transformer A en $AX_{i,j}$.

Définitions et propriétés :

Les matrices du type $D_i(\alpha) = I_n + (\alpha - 1)E_{i,i}$ avec α scalaire non nul sont appelées matrices de dilatation.

Elles sont inversibles, d'inverse $D_i\left(\dfrac{1}{\alpha}\right) = I_n + \left(\dfrac{1}{\alpha} - 1\right)E_{i,i}$.

Les matrices du type $T_{i,j}(\alpha) = I_n + \alpha E_{i,j}$ avec $i \neq j$ et α scalaire non nul sont appelées matrices de transvection. Elles sont inversibles, d'inverse $T_{i,j}(-\alpha) = I_n - \alpha E_{i,j}$.

Les matrices du type $X_{i,j} = I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$ sont appelées matrices de transposition. Elles sont inversibles, d'inverse elles-mêmes.

Propriété :

Effectuer une opération élémentaire sur les lignes (*resp.* sur les colonnes) revient à multiplier A à gauche (*resp.* à droite) par une matrice d'opération élémentaire (inversible).

3. Algorithme du pivot de Gauss-Jordan

Théorème et définition :

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, il existe une matrice $E \in GL_n(\mathbb{K})$, produit de matrices d'opérations élémentaires sur les lignes et une matrice $R \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ telles que $A = ER$ où R est de la forme $\begin{pmatrix} T & B \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix}$ avec $T \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure et $B \in \mathcal{M}_{r,p-r}(\mathbb{K})$.
La suite d'opérations élémentaires sur les lignes permettant de passer de A à R est appelée algorithme du pivot de Gauss-Jordan.

Corollaire :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On peut transformer A en une matrice triangulaire supérieure par une succession d'opérations élémentaires sur les lignes uniquement.

4. Application à l'inversion d'une matrice carrée

Propriété :

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si elle peut s'écrire comme un produit de matrices d'opérations élémentaires $A = E_1 \ldots E_q$, ces opérations élémentaires appliquées successivement à A transforment A en I_n.

V – Rang d'une matrice

1. Définition

Définition :

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Le rang de A, noté $\mathrm{rg}(A)$, est le rang de l'application $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ canoniquement associée à A.

Propriétés :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de bases respectives $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

- Si $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ est une famille de E, on a $\mathrm{rg}(x_1, x_2, \ldots, x_r) = \mathrm{rg}\left(M_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \ldots, x_r)\right)$.
- Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, on a $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}\left(M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)\right)$.

2. Rang et inversibilité

Propriété :

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si $\mathrm{rg}(A) = n$.

Propriété :

Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$.

- Pour toute $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a $\mathrm{rg}(AM) = \mathrm{rg}(M)$.
- Pour toute $M \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, on a $\mathrm{rg}(MA) = \mathrm{rg}(M)$.

3. Caractérisation

Propriété :

Le rang d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est égal au nombre de coefficients diagonaux non nuls de la matrice triangulaire obtenue par l'algorithme du pivot de Gauss.

Théorème : (*pas explicitement au programme, mais tellement utile…*)

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. A est de rang r si et seulement s'il existe $U \in GL_n(\mathbb{K})$ et $V \in GL_p(\mathbb{K})$ telles que :

$$A = U\begin{pmatrix} I_r & 0_{n-r,r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix}V.$$

Propriété :

Pour toute $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a $\mathrm{rg}(A^T) = \mathrm{rg}(A)$.

VI – Systèmes linéaires

1. Vocabulaire

Définitions :

Une équation linéaire à p inconnues est une équation de la forme :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_px_p = b_1.$$

Un système (S) linéaire à p inconnues et n équations est un système de la forme :

$$(S) : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases} \Leftrightarrow \quad AX = B$$

où les x_i sont les inconnues et les $a_{i,j}$ et b_j sont des scalaires fixés. La matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la matrice associée à (S), $B = (b_i) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est appelé le second membre du système, et enfin, $X = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p$, où $\mathbb{K}^p$ est identifié à $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

Le système (linéaire) homogène ou sans second membre associé est le système :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,p}x_p = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,p}x_p = 0 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,p}x_p = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad AX = 0$$

Une solution d'un système linéaire est un p-uplet de $\mathbb{K}^p$ qui vérifie le système.

Le rang d'un système linéaire (S) est le rang de la matrice A associée au système.

Un système linéaire est compatible s'il admet au moins une solution. Dans le cas contraire, on dit que le système est incompatible.

Interprétation en termes d'applications linéaires :

Si on appelle u l'application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ canoniquement associée à A, et b le vecteur de $\mathbb{K}^n$ de coordonnées $(b_1, b_2, ..., b_n)$ dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$, alors le système se récrit :

$$u(x) = b$$

avec x vecteur inconnu de $\mathbb{K}^p$ (cf. les équations linéaires vues dans le chapitre d'algèbre).

2. Ensemble des solutions d'un système linéaire

Propriété :

Soit $(S): AX = B$ un système linéaire à p inconnues et n équations, de matrice associée $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, de rang r et (S_o) le système homogène associé.

- L'ensemble des solutions de (S_o) est $\ker A$, c'est un sous-espace de $\mathbb{K}^p$, de dimension $p - r$.
- L'ensemble F des solutions de (S) est soit vide quand $B \notin \operatorname{Im} A$, soit, quand $B \in \operatorname{Im} A$, de la forme $\mathsf{F} = X_0 + \ker A = \{X_0 + X \setminus X \in \ker A\}$ où X_0 est une solution particulière de (S).

Remarque : Avec l'algorithme du pivot de Gauss, on peut écrire $A = ER$ où R est de la forme $\begin{pmatrix} T & B \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix}$ avec $T \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure et $E \in GL_n(\mathbb{K})$ produit de matrices d'opérations.

Le système (S) est alors équivalent à $RX = E^{-1}B$, beaucoup plus simple à résoudre avec la forme de la matrice R.

3. Système de Cramer

Propriété et définition :

Avec les notations précédentes, si $n = p = r$, alors le système (S) admet une unique solution et dans ce cas on dit que c'est un <u>système de Cramer</u>.