

## Chapitre 18 : Déterminants

### Programme officiel PCSI

#### a) Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

Si  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et si  $e$  est une base de  $E$ , il existe une unique application  $\det_e : E^n \rightarrow \mathbb{K}$  linéaire par rapport à chaque variable, alternée, et vérifiant  $\det_e(e) = 1$ .

Si  $f : E^n \rightarrow \mathbb{K}$  est linéaire par rapport à chaque variable, alternée, alors elle est un multiple de  $\det_e$ .

En dimension 2 et 3, expression du déterminant dans une base en fonction des coordonnées.

Comparaison, si  $e$  et  $e'$  sont deux bases, de  $\det_e$  et  $\det_{e'}$ .

La famille  $(x_1, \dots, x_n)$  est une base si et seulement si  $\det_e(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ .

La démonstration de ce théorème et la notion générale de forme multilinéaire sont hors programme.

Dans  $\mathbb{R}^2$  (resp.  $\mathbb{R}^3$ ), interprétation du déterminant dans la base canonique comme aire orientée (resp. volume orienté) d'un parallélogramme (resp. parallélépipède).

#### b) Déterminant d'un endomorphisme

Déterminant d'un endomorphisme.

Déterminant d'une composée.

Caractérisation des automorphismes.

#### c) Déterminant d'une matrice carrée

Déterminant d'une matrice carrée.

Déterminant d'un produit.

Caractérisation des matrices inversibles. Déterminant de l'inverse.

Déterminant d'une transposée.

Caractère  $n$ -linéaire alterné du déterminant par rapport aux colonnes.

Relation  $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ .

La démonstration est hors programme.

#### d) Calcul des déterminants

Effet des opérations élémentaires.

Développement par rapport à une ligne ou une colonne.

Déterminant d'une matrice triangulaire.

La démonstration n'est pas exigible.

La comatrice est hors programme.

---

*Plan du résumé*

---

**I – Formes multilinéaires****II – Déterminants**

1. Déterminant d'une famille de  $n$  vecteurs dans une base
2. Déterminant d'une matrice carrée
  - a. Définition
  - b. Déterminant  $2 \times 2$
  - c. Déterminant  $3 \times 3$
3. Déterminant d'un endomorphisme

**III – Propriétés des déterminants**

1. Propriétés du déterminant d'une famille de vecteurs
2. Caractérisation des bases
3. Propriétés du déterminant d'un endomorphisme
4. Propriétés du déterminant d'une matrice

**IV – Calcul pratique d'un déterminant**

1. Calcul en dimensions 2 et 3
2. Effet des opérations élémentaires sur les colonnes ou les lignes d'un déterminant
3. Déterminant d'une matrice triangulaire
4. Développement par rapport à une ligne ou une colonne

## *Résumé*

### I – Formes multilinéaires (*introduction hors programme*)

Dans cette partie, on considère un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  avec  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

#### Définitions :

Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . Une forme p-linéaire sur  $E$  est une application  $\varphi : E^p \rightarrow \mathbb{K}$  telle que  $\forall k \in \llbracket 1; p \rrbracket$  et  $\forall (x_1, \dots, x_p) \in E^p$ , l'application  $\varphi_k : E \rightarrow \mathbb{K}; x \mapsto \varphi(x_1, \dots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \dots, x_p)$  est linéaire.

Si  $p = 2$ , on parle de forme bilinéaire; si  $p = 3$ , on parle de forme trilinéaire.

On note  $\mathcal{L}_p(E, \mathbb{K})$  l'ensemble des formes p-linéaires sur  $E$ .

Soit  $\varphi$  une forme p-linéaire sur  $E$ .

- On dit que  $\varphi$  est alternée si  $\forall (x_1, x_2, \dots, x_p) \in E^p$ ,  $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_p) = 0$  dès que deux vecteurs parmi les  $x_k$  sont égaux.
- On dit que  $\varphi$  est antisymétrique si  $\forall (x_1, x_2, \dots, x_p) \in E^p$ ,  $\varphi(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots) = -\varphi(\dots, x_j, \dots, x_i, \dots)$  quels que soient  $i$  et  $j$  distincts entre 1 et  $p$ .

#### Propriété :

Une forme p-linéaire sur  $E$  est alternée si et seulement si elle est antisymétrique.

### II – Déterminants

Dans toute cette partie,  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ .

#### 1. Déterminant d'une famille de $n$ vecteurs dans une base

##### Théorème et définition :

Il existe une unique forme n-linéaire alternée sur  $E$  prenant la valeur 1 sur une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  donnée de  $E$ . Cette forme n-linéaire est appelée déterminant dans la base  $\mathcal{B}$ , notée  $\det_{\mathcal{B}}$ .

##### Théorème :

L'ensemble  $\mathcal{A}_n(E, \mathbb{K})$  des formes n-linéaires alternées sur  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 1. Autrement dit, toute autre forme n-linéaire alternée sur  $E$  est proportionnelle à  $\det_{\mathcal{B}}$ .

##### Propriétés :

Soient  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases de  $E$ . On a :

- $\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \times \det_{\mathcal{B}}$ .
- $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \times \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 1$ .

Propriétés :

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ .

- Si  $E$  est de dimension 2, alors, pour tous vecteurs  $X$  et  $X'$  de  $E$ , de coordonnées respectives  $(x, y)$  et  $(x', y')$  dans  $\mathcal{B}$ , on a :

$$\det_{\mathcal{B}}(X, X') = xy' - x'y.$$

- Si  $E$  est de dimension 3, alors, pour tous vecteurs  $X$ ,  $X'$  et  $X''$  de  $E$ , de coordonnées respectives  $(x, y, z)$ ,  $(x', y', z')$  et  $(x'', y'', z'')$  dans  $\mathcal{B}$ , on a :

$$\det_{\mathcal{B}}(X, X', X'') = x''yz' - x''y'z + x'y''z - xy''z' + xy'z'' - x'yz''.$$

Interprétations géométriques :

- Dans le plan, pour deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , on a  $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{u}\| \cdot \sin(\vec{u}, \vec{v})$  et  $\det(\vec{u}, \vec{v})$  est l'aire algébrique du parallélogramme construit sur  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .
- Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, pour deux vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$ ,  $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  est le volume algébrique du parallélépipède construit sur  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$ .

**2. Déterminant d'une matrice carrée**a. Définition :Définition :

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Le déterminant de  $A$ , noté  $\det A$ , est le déterminant des vecteurs colonnes de  $A$  dans la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ .

*Notation :* Si  $A = (a_{i,j})$ , on note :

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

b. Déterminant 2x2 :

On a :

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

c. Déterminant 3x3 :

On a :

$$\det \begin{pmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = x''yz' - x''y'z + x'y''z - xy''z' + xy'z'' - x'yz''.$$

### 3. Déterminant d'un endomorphisme

Théorème et définition :

Soient  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ . Le scalaire  $\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}))$  est indépendant de la base  $\mathcal{B}$  et est appelé déterminant de  $f$ , noté  $\det f$ .

Propriété :

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ . Pour toute famille  $\mathcal{F}$  de  $n$  vecteurs de  $E$  :

$$\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{F})) = \det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B})) \times \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}).$$

Propriété :

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ . On a  $\det f = \det_{\mathcal{B}}(M_{\mathcal{B}}(f))$ .

## III – Propriétés des déterminants

### 1. Propriétés du déterminant d'une famille de vecteurs

Dans cette partie, on considère une base  $\mathcal{B}$  de  $E$ .

Pour tout  $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in E^p$  :

- $\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$  dès que deux vecteurs parmi les  $x_k$  sont égaux ;
- $\det_{\mathcal{B}}(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots) = -\det_{\mathcal{B}}(\dots, x_j, \dots, x_i, \dots)$  quels que soient  $i$  et  $j$  distincts entre 1 et  $p$ .

Propriétés :

$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$  :

- $\forall (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ ,  $\det_{\mathcal{B}}(\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots, \lambda_n x_n) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\det_{\mathcal{B}}(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = \lambda^n \det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .
- On ne change pas la valeur de  $\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  en ajoutant à l'un des vecteurs  $x_i$  une combinaison linéaire des autres vecteurs.
- Une famille  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  est liée si et seulement si  $\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ .
- Une famille  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  est libre si et seulement si  $\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$ .

### 2. Caractérisation des bases

Théorème :

Soient  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  et  $\mathcal{F}$  une famille de  $n$  vecteurs de  $E$ .

$$\mathcal{F} \text{ est une base de } E \Leftrightarrow \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0.$$

### 3. Propriétés du déterminant d'un endomorphisme

#### Propriétés :

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . On a :

- Pour toute famille  $\mathcal{F}$  de  $n$  vecteurs de  $E$ ,  $\det_B(f(\mathcal{F})) = \det f \times \det_B(\mathcal{F})$ .
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\det(\lambda f) = \lambda^n \det f$ .

#### Propriété :

Soit  $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ . On a :

$$\det(u \circ v) = \det u \times \det v .$$

#### Propriété :

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ .  $f$  est un automorphisme de  $E$  si et seulement si  $\det f \neq 0$ . Et dans ce cas,  $\det f^{-1} = \frac{1}{\det f}$ .

### 4. Propriétés du déterminant d'une matrice

#### Propriétés :

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

- Si  $A$  possède deux colonnes identiques, alors  $\det A = 0$ .
- Si  $C_1, C_2, \dots, C_n$  sont les colonnes de  $A$ , alors  $\forall (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ ,  $\det A' = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \det A$  où  $A'$  est la matrice obtenue en multipliant chaque colonne  $i$  de  $A$  par  $\lambda_i$ .
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$ .
- On ne change pas la valeur de  $\det A$  en ajoutant à l'une des colonnes de  $A$  une combinaison linéaire des autres colonnes.

#### Propriétés :

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

- $\det AB = \det BA = \det A \times \det B$ .
- $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  si et seulement si  $\det A \neq 0$ , et dans ce cas,  $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$ .
- Si  $A$  et  $B$  sont semblables elles ont le même déterminant.
- $\det(A^T) = \det A$ .

## IV – Calcul pratique d'un déterminant

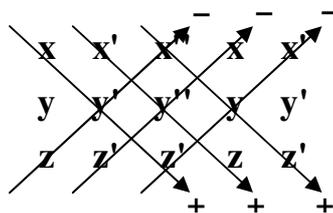
### 1. Calcul en dimensions 2 et 3

On a vu que :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \qquad \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = x''yz' - x'yz'' + x''yz' - xy''z' + xy'z'' - x'yz'' .$$

Règle de Sarrus : Pour calculer un déterminant en dimension 3.

C'est une méthode pour calculer simplement un déterminant  $3 \times 3$ . Elle consiste à écrire les 3 colonnes du déterminant, puis à recopier les 2 premières à la suite. On effectue le produit des termes des 6 diagonales, puis on les ajoute en les dotant d'un signe suivant le schéma suivant :



## 2. Effet des opérations élémentaires sur les colonnes ou les lignes d'un déterminant

Propriétés :

Pour toute  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  de colonnes  $C_1, C_2, \dots, C_n$  :

- multiplier une colonne de  $A$  par  $\alpha$  multiplie le déterminant par  $\alpha$  ;
- ajouter  $\alpha C_j$  à  $C_i$  ne change pas le déterminant ;
- échanger deux colonnes transforme le déterminant en son opposé.

## 3. Déterminant d'une matrice triangulaire

Propriété :

Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est triangulaire de coefficients diagonaux  $a_1, a_2, \dots, a_n$  alors  $\det A = a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n$ .

En particulier,  $\det[\text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)] = a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n$ .

## 4. Développement par rapport à une ligne ou une colonne

Propriétés et définitions :

$A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On note  $\Delta_{i,j}$  le déterminant de la matrice  $(n-1) \times (n-1)$  obtenue en supprimant la  $i^{\text{ème}}$  ligne et la  $j^{\text{ème}}$  colonne de  $A$ .

- $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a  $\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}$ . Cette façon de procéder s'appelle développement par rapport à la  $j^{\text{ème}}$  colonne.
- $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a  $\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}$ . Cette façon de procéder s'appelle développement par rapport à la  $i^{\text{ème}}$  ligne.