# Chapitre 19 : Espaces préhilbertiens réels et euclidiens

## Programme officiel PCSI

### a) Produit scalaire

| | |
|---|---|
| Produit scalaire. | Notations $\langle x, y\rangle$, $(x\|y)$, $x \cdot y$. |
| Espace préhilbertien, espace euclidien. | |
| Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$. | Expression $X^\top Y$. |
| Produit scalaire $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_a^b fg$ sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$. | Exemples de produits scalaires intégraux sur $\mathbb{R}[X]$ et $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$. |

### b) Norme associée à un produit scalaire

| | |
|---|---|
| Norme associée à un produit scalaire, distance. | |
| Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité. | Exemples : sommes finies, intégrales. |
| Inégalité triangulaire, cas d'égalité. | |
| Identité remarquable $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle$. | Formule de polarisation associée. |

### c) Orthogonalité

| | |
|---|---|
| Vecteurs orthogonaux, orthogonal d'une partie. | Notation $X^\perp$. L'orthogonal d'une partie est un sous-espace. |
| Famille orthogonale, orthonormée (ou orthonormale). Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre. Théorème de Pythagore. Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. | |

### d) Bases orthonormées

| | |
|---|---|
| Existence de bases orthonormées dans un espace euclidien. Théorème de la base orthonormée incomplète. Expression des coordonnées, du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée. | |

### e) Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

| | |
|---|---|
| Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace $F$ de dimension finie. Projection orthogonale sur $F$. Expression du projeté orthogonal d'un vecteur $x$ dans une base orthonormée de $F$. | En dimension finie : dimension de $F^\perp$, vecteur normal à un hyperplan. |
| Distance d'un vecteur à $F$. | Notation $d(x,F)$. |
| Le projeté orthogonal de $x$ sur $F$ est l'unique élément de $F$ qui réalise la distance de $x$ à $F$. | |

## *Plan du résumé*

## *Résumé*

*Dans tout ce chapitre,* E *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$.

# I – Produit scalaire

## 1. Définition

*Définition* :

> On appelle produit scalaire sur E toute application φ de E² dans $\mathbb{R}$ vérifiant les quatre propriétés suivantes :
>
> - φ est bilinéaire : $\forall\,(x,x',y,y')\in E^4$ et $\forall\,(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ :
>
> $$\varphi(\lambda x+\mu x',y)=\lambda\varphi(x,y)+\mu\varphi(x',y) \text{ et } \varphi(x,\lambda y+\mu y')=\lambda\varphi(x,y)+\mu\varphi(x,y').$$
>
> - φ est symétrique : $\forall\,(x,y)\in E^2,\ \varphi(x,y)=\varphi(y,x)$.
> - φ est positive : $\forall\,x\in E,\ \varphi(x,x)\geq 0$.
> - φ est définie : $\forall\,x\in E,\ \varphi(x,x)=0 \iff x=0$.

*Notations* : On note souvent $\varphi(x,y)=\left(x\,|\,y\right)$ ou $\left\langle x\,|\,y\right\rangle$ ou $\left\langle x,y\right\rangle$.

*Exemples fondamentaux* :

1) Dans $\mathbb{R}^n$, $\left(x\,|\,y\right)=x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n$ avec $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ et $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$.
   En identifiant $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $\left(X\,|\,Y\right)=X^{\mathsf{T}}Y$.
2) Dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, $(f\,|\,g)=\int_a^b fg$.
3) Dans $\mathbb{R}[X]$, $(P\,|\,Q)=\int_0^1 PQ$.

## 2. Inégalité de Cauchy-Schwarz

*Propriété* :

> Si E est muni d'un produit scalaire $(\cdot\,|\,\cdot)$, alors pour tout $(x,y)\in E^2$, on a :
>
> $$\left|\left(x\,|\,y\right)\right|\leq\sqrt{\left(x\,|\,x\right)\left(y\,|\,y\right)}.$$
>
> Et on a égalité si et seulement si la famille $(x,y)$ est liée.

## 3. Norme euclidienne

a. Définition :

*Définition* :

> On appelle norme sur E toute application N de E dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant les trois propriétés suivantes :
>
> - $\forall\,x\in E$ et $\forall\,\lambda\in\mathbb{R}$, $N(\lambda x)=|\lambda|\,N(x)$ (homogénéité) ;
> - $\forall\,x\in E,\ N(x)=0 \iff x=0$ ;
> - $\forall\,(x,y)\in E^2,\ N(x+y)\leq N(x)+N(y)$ (inégalité triangulaire).

*Théorème et définition* :

> Si E est muni d'un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$, alors l'application $x \mapsto \sqrt{(x|x)}$ est une norme sur E, appelée norme euclidienne associée au produit scalaire.

b. Distance associée à une norme :

*Définition* :

> Si E est muni d'une norme N. L'application d de E² dans $\mathbb{R}_+$ définie, pour tout $(x,y)\in E^2$, par $d(x,y)=N(x-y)$ est appelée distance associée à la norme N.
>
> Si de plus, N est une norme euclidienne, on dit que d est une distance euclidienne.

*Propriétés* :

> Si d est une distance sur E associée à une norme N, on a, $\forall\,(x,y,z)\in E^3$ :
>
> - $d(x,y)=d(y,x)$ (symétrie).
> - $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$ (séparation).
> - $d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)$ (inégalité triangulaire).

c. Identités de polarisation :

*Propriétés* :

> Si E est muni d'un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ de norme associée $\|\cdot\|$, on a pour tout $(x,y)\in E^2$ :
>
> - $\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2+2(x|y)$.
> - $\|x-y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2-2(x|y)$.
> - $\|x+y\|^2-\|x-y\|^2=4(x|y)$.
> - $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)$ (*identité du parallélogramme*).
> - $\left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\|^2=\frac{1}{4}\left(2\|x\|^2+2\|y\|^2-\|x-y\|^2\right)$ (*théorème de la médiane*).

**4. Espaces préhilbertiens réels et espaces euclidiens**

*Définitions* :

> Un espace préhilbertien réel est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire.
>
> Si de plus, cet espace est de dimension finie, alors c'est un espace euclidien.

# II – Orthogonalité

*Dans ce qui suit, sauf mention contraire,* E *est un espace préhilbertien réel.*

*On note* $(\cdot|\cdot)$ *le produit scalaire et* $\|\cdot\|$ *la norme euclidienne associée.*

## 1. Vecteurs orthogonaux, vecteurs unitaires

*Définitions* :

Deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux si $(x|y)=0$, on note alors $x \perp y$.

Un vecteur x de E est dit unitaire s'il est de norme 1.

Une famille $F$ de vecteurs de E est orthogonale si pour tous $x, x' \in F$ tels que $x \neq x'$, on a $(x|x')=0$ (autrement dit si tous les vecteurs sont orthogonaux deux à deux).

Une famille de vecteurs de E est orthonormale ou orthonormée si elle est orthogonale et si tous ses vecteurs sont unitaires.

*Propriété* :

Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls de E est libre.

*Propriété* : *Relation de Pythagore.*

Si $(x_1, x_2, ..., x_p)$ est une famille orthogonale de vecteurs de E, alors :

$$\|x_1 + x_2 + ... + x_p\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + ... + \|x_p\|^2.$$

Et, dans le cas de deux vecteurs, la réciproque est vraie : si $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ alors $x \perp y$.

## 2. Sous-espaces vectoriels orthogonaux

*Définitions* :

Soient F et G deux sev de E. On dit que F et G sont orthogonaux si pour tout $(x, y) \in F \times G$, $(x|y)=0$.

Si A est une partie non vide de E, l'ensemble $\{x \in E \setminus \forall a \in A, (a|x)=0\}$ est appelé orthogonal de A, noté $A^\perp$.

*Propriétés* :

- $E^\perp = \{0\}$ et $\{0\}^\perp = E$.
- $F \perp G \Leftrightarrow F \subset G^\perp \Leftrightarrow G \subset F^\perp$.

Si A est une partie non vide de E.

- $A^\perp$ est un sev de E.
- Si B est une autre partie de E telle que $A \subset B$, alors $B^\perp \subset A^\perp$.
- $A \subset (A^\perp)^\perp$
- $A^\perp = (\text{Vect}\, A)^\perp$.
- $A \cap A^\perp$ est vide si A ne contient pas 0 et réduit à $\{0\}$ sinon.

### 3. Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

*Propriété* : *Procédé ou algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.*

Si $(f_1, f_2, ..., f_n)$ est une famille libre de E, alors il existe une famille orthonormée de E, $(e_1, e_2, ..., e_n)$ telle que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ :

$$\text{Vect}(e_1, e_2, ..., e_k) = \text{Vect}(f_1, f_2, ..., f_k).$$

### 4. Bases orthonormales

*Dans cette partie,* E *est euclidien de dimension n non nulle.*

*Propriétés et définition* :

Toute famille orthogonale de n vecteurs non nuls de E est une base de E.

Toute famille orthonormée de n vecteurs de E est une base de E. Une telle famille est appelée base orthonormale ou orthonormée (b.o.n.) de E.

*Théorème* :

E possède des bases orthonormales et si $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est une telle base, alors $\forall\, x \in E$ :

$$x = (e_1 \mid x)e_1 + (e_2 \mid x)e_2 + ... + (e_n \mid x)e_n \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = (e_1 \mid x)^2 + (e_2 \mid x)^2 + ... + (e_n \mid x)^2.$$

*Théorème* : *de la base orthonormée incomplète.*

Toute famille orthonormale $(e_1, e_2, ..., e_p)$ peut être complétée en une base orthonormale de E.

*Corollaires* :

Soit F un sous-espace de E.

- $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$.
- $F \oplus F^\perp = E$.
- $(F^\perp)^\perp = F$.

*Notation* : Si F et G sont deux sev tels que $F \perp G$, leur somme (directe) est notée $F \overset{\perp}{\oplus} G$.

### 5. Produit scalaire et formes linéaires

*Ici encore, on prend* E *euclidien de dimension* n.

*Propriété* :

Soit $f : E \to \mathbb{R}$.

On a $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ si et seulement s'il existe un unique vecteur a de E tel que pour tout $x \in E$ :

$$f(x) = (a \mid x).$$

Autrement dit, toute forme linéaire sur E s'écrit de manière unique sous la forme $x \mapsto (a \mid x)$, où a est un vecteur fixé de E.

# III – Projections orthogonales

*Sauf mention contraire, dans cette partie comme dans la précédente,* E *est un espace préhilbertien réel et on note à nouveau* $(\cdot|\cdot)$ *le produit scalaire et* $\|\cdot\|$ *la norme euclidienne associée.*

## 1. Projection orthogonale

<u>*Lemme*</u> :

> Soit F un sev de E, de dimension finie et $\mathcal{B}=(e_1,e_2,...,e_p)$ une base orthonormée de F.
>
> Pour tout $x\in E$, on a :
>
> $$x\in F^{\perp} \Leftrightarrow \forall\, i\in [\![1,p]\!],\ (x\,|\,e_i)=0.$$

<u>*Théorème et définition*</u> :

> Soit F un sous-espace vectoriel de E, de dimension finie.
>
> $$\forall\, x\in E,\ \exists!\, x_F\in F \text{ tel que } x-x_F\in F^{\perp}.$$
>
> Le vecteur $x_F$ est appelé <u>projeté orthogonal</u> de x sur F et l'application $p_F$ de E dans E qui à x associe $x_F$ est linéaire et est appelée <u>projection orthogonale sur F</u>.

<u>*Propriété*</u> :

> Soient F un sev de dimension finie de E et $p_F$ la projection orthogonale sur F. Si $(e_1,e_2,...,e_p)$ est une base orthonormale de F, alors pour tout $x\in E$ :
>
> $$p_F(x)=(e_1\,|\,x)e_1+(e_2\,|\,x)e_2+...+(e_p\,|\,x)e_p.$$

<u>*Propriétés*</u> :

> Soient F un sev de E, de dimension finie.
>
> - $F\oplus F^{\perp}=E$.
> - La projection orthogonale sur F est le projecteur sur F parallèlement à $F^{\perp}$.

## 2. Distance à un sous-espace vectoriel

<u>*Propriété et définition*</u> :

> Soient A une partie non vide de E et $x_o\in E$. L'ensemble $\{\|a-x_o\| \setminus a\in A\}$ admet une borne inférieure appelée <u>distance de $x_o$ à A</u>, notée $d(x_o,A)$.

<u>*Propriété*</u> :

> Soient F un sev de E, de dimension finie et $p_F$ la projection orthogonale sur F. Alors $\forall\, x\in E$, on a :
>
> $$d(x,F)=\|x-p_F(x)\|.$$