Chapitre 3 : Nombres réels

Programme officiel PCSI

c) Ensembles de nombres usuels

Nombres décimaux, rationnels, réels, irrationnels.	La construction des ensembles de nombres usuels, en particulier celle de $\mathbb{R}$, est hors programme.

c) Inégalités

Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$. Compatibilité avec les opérations. Intervalles de $\mathbb{R}$.	Exemples de majoration et de minoration de sommes, de produits et de quotients. Utilisation de factorisations et de tableaux de signes. Résolution d'inéquations.
Valeur absolue. Inégalité triangulaire.	Interprétation sur la droite réelle d'inégalités du type $\lvert x-a\rvert \leqslant b$.
Dans $\mathbb{R}$, parties majorées, minorées, bornées. Majorant, minorant ; maximum, minimum.	
Partie entière d'un nombre réel.	Notation $\lfloor x \rfloor$.

a) Propriété de la borne supérieure

Borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie de $\mathbb{R}$. Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (resp. inférieure). Une partie X de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si pour tous $a, b \in X$ tels que $a \leqslant b$, $[a, b] \subset X$.	Notations $\sup X$, $\inf X$. On convient que $\sup X = +\infty$ si X est non majorée.

Plan du résumé

Résumé

I – Ensemble des nombres réels

1. Ensembles usuels de nombres

Les ensembles usuels de nombres sont :

$\mathbb{N}$ = ensemble des nombres entiers naturels
$\mathbb{Z}$ = ensemble des nombres entiers relatifs
$\mathbb{D}$ = ensemble des nombres décimaux
$\mathbb{Q}$ = ensemble des nombres rationnels
$\mathbb{R}$ = ensemble des nombres réels
$\mathbb{C}$ = ensemble des nombres complexes

avec $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

2. Nombres réels

L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est muni d'une addition et d'une multiplication internes qui lui donne une structure de corps commutatif : $(\mathbb{R},+)$ et $(\mathbb{R}^*,\times)$ sont des groupes commutatifs et la multiplication est distributive sur l'addition.

Propriété :

> $\mathbb{R}$ est un ensemble totalement ordonné par la relation $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a \le b \iff b - a \ge 0$.
>
> Cette relation d'ordre est compatible avec l'addition et la multiplication, c'est-à-dire : $\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$,
>
> - $a \le b$ et $c \le d \Rightarrow a + c \le b + d$ (on peut additionner membres à membres des inégalités) ;
> - $a \le b$ et $c \ge 0 \Rightarrow ac \le bc$ (on peut multiplier une inégalité par un réel positif).

3. Bornes supérieures, inférieures

a. Généralités :

Définitions :

> Si A est une partie de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.
>
> On dit que a est un minorant (*resp*. majorant) de A si $\forall x \in A,\ a \le x$ (*resp*. $x \le a$).
>
> Une partie possédant des minorants (*resp*. majorants) est minorée (*resp*. majorée). Une partie minorée et majorée est bornée.
>
> Si a est un minorant (*resp*. majorant) de A et $a \in A$, a est le plus petit élément ou minimum (*resp*. plus grand élément ou maximum) de A.
>
> S'il existe, le plus petit des majorants de A est appelé borne supérieure de A.
>
> S'il existe, le plus grand des minorants de A est appelé borne inférieure de A.

Propriétés :

> Soit A une partie de $\mathbb{R}$.
>
> Si A possède une borne supérieure (*resp*. inférieure), elle est unique. On la note $\sup A$ (*resp*. $\inf A$).
>
> Si A possède un maximum (*resp*. minimum), il est unique. On le note $\max A$ (*resp*. $\min A$).

Propriété :

Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

On convient que pour une partie A non majorée de $\mathbb{R}$, $\sup A = +\infty$.

Corollaire :

Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

On convient que pour une partie A non minorée de $\mathbb{R}$, $\inf A = -\infty$.

b. Caractérisation (*pas dans le programme, mais fondamentale*) :

Propriété :

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ majorée par M (*resp.* minorée par m).

$$M = \sup A \ (\textit{resp.}\ m = \inf A) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, M - \varepsilon < a \leq M \ (\textit{resp.}\ m \leq a < m + \varepsilon).$$

Corollaire : *Caractérisation séquentielle*

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ majorée par M (*resp.* minorée par m).

$M = \sup A$ (*resp.* $m = \inf A$) $\Leftrightarrow$ Il existe une suite d'éléments de A convergeant vers M (*resp.* m).

II – Valeur absolue

1. Généralités

Définition :

$\forall x \in \mathbb{R}$, on appelle valeur absolue de x le réel positif noté $|x|$ tel que :

$$\begin{cases} \text{si } x \geq 0, & |x| = x \\ \text{si } x \leq 0, & |x| = -x \end{cases}$$

Propriétés :

$\forall x \in \mathbb{R}$:

- $|x| = \max(-x, x)$ donc $-|x| \leq x \leq |x|$.
- $|-x| = |x|$.
- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ et par contraposée : $|x| \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$.
- $|x| \leq 0 \Leftrightarrow x = 0$ et par contraposée : $|x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$.
- $|x|^2 = x^2$ et $\sqrt{x^2} = |x|$.
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|x| = |y| \Leftrightarrow x^2 = y^2$.
- $\forall a \geq 0$, $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$ et $|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a$ ou $x \leq -a$.

2. Valeur absolues et opérations

Propriétés :

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$:

- $|xy| = |x|.|y|$ et si $y \neq 0$, $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.
- *Inégalités triangulaires* : $\big||x| - |y|\big| \leq |x+y| \leq |x| + |y|$.

III – Intervalles

Définitions :

Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont les parties de $\mathbb{R}$ suivantes :

- $[a;b] = \{x \in \mathbb{R} \setminus a \leq x \leq b\}$. Ce type d'intervalle est appelé segment.
- $]a;b[= \{x \in \mathbb{R} \setminus a < x < b\}$.
- $[a;b[= \{x \in \mathbb{R} \setminus a \leq x < b\}$.
- $]a;b] = \{x \in \mathbb{R} \setminus a < x \leq b\}$.
- $]-\infty;a] = \{x \in \mathbb{R} \setminus x \leq a\}$.
- $]-\infty;a[= \{x \in \mathbb{R} \setminus x < a\}$.
- $[a;+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \setminus a \leq x\}$.
- $]a;+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \setminus a < x\}$.
- $]-\infty;+\infty[= \mathbb{R}$.

Dans les quatre premiers cas, a et b sont deux réels tels que $a \leq b$ (et l'intervalle est borné) et dans les autres cas, a est un réel quelconque.

Pour $]a;b[$, $]-\infty;a[$ et $]a;+\infty[$, on dit que l'intervalle est ouvert ; pour $[a;b]$, $]-\infty;a]$ et $[a;+\infty[$, on dit que l'intervalle est fermé ; pour $[a;b[$ (*resp.* $]a;b]$), on dit que l'intervalle est semi-ouvert à droite (*resp.* à gauche).

Définition :

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que A est convexe, si pour tous $x, y \in A$ tels que $x \leq y$, on a $[x;y] \subset A$.

Théorème :

Une partie de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si elle est convexe. Autrement, les intervalles sont les parties convexes de $\mathbb{R}$.

Propriété :

L'intersection de deux intervalles est un intervalle.

IV – Partie entière

1. Définition

Théorème et définition :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique entier relatif n tel que $n \leq x < n+1$.

Cet entier est appelé partie entière de du réel x, notée $\lfloor x \rfloor$.

2. La fonction partie entière

La fonction partie entière est la fonction $E : \mathbb{R} \to \mathbb{Z} ; x \mapsto \lfloor x \rfloor$.

Propriétés :

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \leq y$, on a $\lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$.

On a la courbe :