Chapitre 4 : Nombres complexes

Programme officiel PCSI

a) Nombres complexes

Parties réelle et imaginaire. Opérations sur les nombres complexes. Brève extension du calcul de $\sum_{k=0}^{n} x^k$, de la factorisation de $a^n - b^n$, de la formule du binôme.	La construction de $\mathbb{C}$ est hors programme.
Point du plan associé à un nombre complexe, affixe d'un point, affixe d'un vecteur.	On identifie $\mathbb{C}$ au plan usuel muni d'un repère orthonormé direct (« plan complexe »).

b) Conjugaison et module

Conjugaison, compatibilité avec les opérations. Module. Relation $\lvert z\rvert^2 = z\bar{z}$, module d'un produit, d'un quotient. Inégalité triangulaire, cas d'égalité.	Image du conjugué dans le plan complexe. Interprétation géométrique de $\lvert z - z'\rvert$, cercles et disques.

c) Nombres complexes de module 1 et trigonométrie

Identification du cercle trigonométrique et de l'ensemble des nombres complexes de module 1. Définition de e^{it} pour $t \in \mathbb{R}$. Exponentielle d'une somme.	Notation $\mathbb{U}$.
Formules d'Euler. Technique de l'angle moitié : factorisation de $1 \pm e^{it}$, de $e^{ip} \pm e^{iq}$.	Les étudiants doivent savoir retrouver les formules donnant $\cos(p) \pm \cos(q)$, $\sin(p) \pm \sin(q)$. Linéarisation, calcul de $\sum_{k=0}^{n} \cos(kt)$ et de $\sum_{k=0}^{n} \sin(kt)$.
Formule de Moivre.	Les étudiants doivent savoir retrouver les expressions de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction de $\cos t$ et $\sin t$.

d) Forme trigonométrique

Forme trigonométrique $re^{i\theta}$ $(r > 0)$ d'un nombre complexe non nul. Arguments. Arguments d'un produit, d'un quotient. Transformation de $a\cos t + b\sin t$ en $A\cos(t - \varphi)$.	

d) Trigonométrie

Cercle trigonométrique. Paramétrisation par cosinus et sinus.	
Relation de congruence modulo 2π sur $\mathbb{R}$.	Notation $a \equiv b\ [2\pi]$.
Cosinus et sinus de $\pi \pm x$, de $\frac{\pi}{2} \pm x$. Cosinus et sinus des angles usuels.	Les étudiants doivent savoir retrouver ces résultats et résoudre des équations et inéquations trigonométriques simples en s'aidant du cercle trigonométrique.
Formules d'addition $\cos(a \pm b)$, $\sin(a \pm b)$. Cas particulier des formules de duplication : $\cos(2a)$, $\sin(2a)$.	On présente une justification géométrique de l'une de ces formules. Les étudiants doivent savoir retrouver rapidement les formules donnant $\cos(a)\cos(b)$, $\cos(a)\sin(b)$, $\sin(a)\sin(b)$.

Fonctions circulaires cosinus et sinus. Formule d'addition $\tan(a \pm b)$.	On justifie les formules donnant les fonctions dérivées de sinus et cosinus vues en classe de terminale.

e) Équations algébriques

Pour P fonction polynomiale à coefficients complexes admettant a pour racine, factorisation de $P(z)$ par $z-a$. Résolution des équations du second degré dans $\mathbb{C}$. Somme et produit des racines.	Calcul des racines carrées d'un nombre complexe donné sous forme algébrique.

f) Racines n-ièmes

Description des racines n-ièmes de l'unité, d'un nombre complexe non nul donné sous forme trigonométrique.	Notation $\mathbb{U}_n$. Représentation géométrique.

g) Exponentielle complexe

Définition de e^z pour z complexe : $e^z = e^{\mathrm{Re}(z)} e^{i\,\mathrm{Im}(z)}$. Exponentielle d'une somme. Pour tous z et z' dans $\mathbb{C}$, $\exp(z) = \exp(z')$ si et seulement si $z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$.	Notations $\exp(z)$, e^z. Module et arguments de e^z.

h) Interprétation géométrique des nombres complexes

Interprétation géométrique des module et arguments de $\dfrac{c-a}{b-a}$.	Traduction de l'alignement, de l'orthogonalité.
Interprétation géométrique des applications $z \mapsto az$ et $z \mapsto z+b$ pour $(a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$. Interprétation géométrique de la conjugaison.	Il s'agit d'introduire certaines transformations du plan : translations, homothéties, rotations. L'étude générale des similitudes est hors programme.

Plan du résumé

Résumé

I – L'ensemble $\mathbb{C}$

1. Généralités

Définition :

L'ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$, est le plus petit ensemble au sens de l'inclusion contenant $\mathbb{R}$ et i (tel que $i^2 = -1$) et dans lequel les propriétés des opérations +, –, x et ÷ sont les mêmes que dans $\mathbb{R}$.

Conséquences :

- Les règles de puissances, les identités remarquables, la formule du binôme de Newton fonctionnent de la même façon dans $\mathbb{C}$ que dans $\mathbb{R}$.
- La propriété « *un produit de facteur est nul si et seulement un facteur est nul* » est valable dans $\mathbb{C}$ (on dit que $\mathbb{C}$ est intègre)

Théorème et définitions :

L'ensemble des nombres complexes est l'ensemble des nombres de la forme $z = x + iy$ avec x et y réels dans lequel les règles de calcul sont celles des nombres réels.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, l'écriture $z = x + iy$ avec x et y réels est unique, x est appelé partie réelle de z, noté $\mathrm{Re}(z)$ et y est appelé partie imaginaire de z, noté $\mathrm{Im}(z)$.

Si $y = 0$, z est réel, si $x = 0$, z est imaginaire pur.

Propriétés : *Règles de calcul*

Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$ tels que $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, on a :

$$z + z' = (x + x') + i(y + y') \quad \text{et} \quad zz' = xx' - yy' + i(xy' + x'y).$$

2. Conjugaison

Définition :

Pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$, le nombre complexe $x - iy$ est appelé conjugué de z, noté $\overline{z}$.

Propriétés :

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

- $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ et $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$.
- $z \in \mathbb{R}$ (z est réel) $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Im}(z) = 0$ $\Leftrightarrow$ $\overline{z} = z$.
- $z \in i\mathbb{R}$ (z est imaginaire pur) $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Re}(z) = 0$ $\Leftrightarrow$ $\overline{z} = -z$.
- $z = 0 \Leftrightarrow \overline{z} = 0$ (et donc $z \neq 0 \Leftrightarrow \overline{z} \neq 0$).

Règles de calcul : Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$:

- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$.
- $\overline{zz'} = \overline{z}.\overline{z'}$.

- $\overline{\left(\dfrac{z'}{z}\right)} = \dfrac{\overline{z'}}{\overline{z}}$ (avec $z \neq 0$).
- $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ ($\forall n \in \mathbb{Z}$ avec $z \neq 0$ si nécessaire).

3. <u>Module</u>

<u>Définition</u> :

Pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$, le réel $\sqrt{x^2 + y^2}$ est appelé <u>module</u> de z, noté $|z|$.

<u>Propriétés</u> : *Règles de calcul*

Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, on a :

- $|zz'| = |z||z'|$.
- $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$ quand $z \neq 0$.
- $|z^n| = |z|^n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ (quand $z \neq 0$ pour $n \leq 0$).
- $|\overline{z}| = |z|$.
- $z\overline{z} = |z|^2$.
- $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ quand $z \neq 0$.

<u>Propriété</u> (*inégalité triangulaire*) :

$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2$, on a :

$$\big||z| - |z'|\big| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|.$$

La deuxième inégalité est une égalité si et seulement si $z' = kz$ ou $z = kz'$ avec $k \in \mathbb{R}_+$.

II – Groupe des nombres complexes de module 1

1. <u>Le groupe $\mathbb{U}$</u>

<u>Définition</u> :

On appelle <u>$\mathbb{U}$</u> l'ensemble des nombres complexes de module 1.

<u>Théorème</u> :

L'ensemble $\mathbb{U}$ est un groupe pour la multiplication. C'est-à-dire :

- Le produit de deux complexes de modules 1 est encore de module 1 ($\mathbb{U}$ est stable pour la multiplication).
- $1 \in \mathbb{U}$ et la multiplication est associative dans $\mathbb{U}$.
- L'inverse d'un complexe de module 1 est encore de module 1.

2. <u>Forme exponentielle d'un nombre complexe de module 1</u>

<u>Définition</u> :

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Propriété :

$z \in \mathbb{U} \iff \exists\, \theta \in \mathbb{R},\ z = e^{i\theta}$.

Propriété :

$\forall\, (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, on a $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} e^{i\theta'}$.

Corollaires :

i. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$e^{i(\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_n)} = e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} \ldots e^{i\theta_n}.$$

ii. *Formule de Moivre* : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, \theta \in \mathbb{R}$:

$$e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n \iff \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^n.$$

iii. $\forall\, (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$:

$$\overline{e^{i\theta}} = \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \quad \text{et} \quad e^{i(\theta-\theta')} = \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}.$$

iv. *Formules d'Euler* : $\forall\, \theta \in \mathbb{R}$:

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

3. Forme exponentielle

Propriété et définition :

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$, unique modulo 2π, tel que $z = |z| e^{i\theta}$ (où $|z|$ est le module de z).

Cette écriture est la forme exponentielle de z et θ est un argument de z.

Propriété :

Pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}^*$, on a :

$$\cos\theta = \frac{x}{|z|} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{y}{|z|}.$$

Propriété :

Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, on a :

$$z = z' \iff \begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg(z) = \arg(z') \ [2\pi] \end{cases}$$

En particulier :

- si z est réel, module et valeur absolue sont identiques et $\arg(z) = \begin{cases} 0\,[2\pi] & \text{si } z > 0 \\ \pi\,[2\pi] & \text{si } z < 0 \end{cases}$;
- si z est imaginaire pur avec z = iy, $|z| = |y|$ et $\arg(z) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}\,[2\pi] & \text{si } y > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2}\,[2\pi] & \text{si } y < 0 \end{cases}$.

Propriétés : *Règles de calcul*

Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}^*$, on a :

- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$.
- $\arg\left(\frac{z'}{z}\right) = \arg(z') - \arg(z)\ [2\pi]$.
- $\arg(z^n) = n\arg(z)\ [2\pi]$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
- $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)\ [2\pi]$.

4. Applications

a. Linéarisation :

Il s'agit d'exprimer les puissances du cosinus ou du sinus d'un angle en fonction des cosinus et sinus des multiples de cet angle. Pour cela, on utilise les formules d'Euler et du binôme de Newton :

$$\cos^n\theta = \frac{1}{2^n}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})^n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ik\theta}e^{-i(n-k)\theta} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{i(2k-n)\theta}$$

$$\sin^n\theta = \frac{1}{(2i)^n}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})^n = \frac{1}{(2i)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}e^{ik\theta}e^{-i(n-k)\theta} = \frac{1}{(2i)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}e^{i(2k-n)\theta}$$

b. Développement :

C'est le contraire, on cherche à exprimer le cosinus ou le sinus d'un multiple d'un angle en fonction des puissances du cosinus et du sinus de cet angle. Pour cela, on utilise les formules de Moivre et du binôme de Newton :

$$\cos(n\theta) = \mathrm{Re}(e^{ni\theta}) = \mathrm{Re}\left((e^{i\theta})^n\right) = \mathrm{Re}\left((\cos\theta + i\sin\theta)^n\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}i^{n-k}\cos^k\theta\sin^{n-k}\theta\right)$$

$$\sin(n\theta) = \mathrm{Im}(e^{ni\theta}) = \mathrm{Im}\left((e^{i\theta})^n\right) = \mathrm{Im}\left((\cos\theta + i\sin\theta)^n\right) = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}i^{n-k}\cos^k\theta\sin^{n-k}\theta\right)$$

c. Technique de l'angle moitié :

Pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$1+e^{it} = 2e^{i\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{t}{2}\right) \qquad 1-e^{it} = -2ie^{i\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{t}{2}\right)$$

Application : Pour tout $\theta \neq 0\ [2\pi]$:

$$\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}(e^{i\theta})^k\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}\right) = \frac{\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\sin(k\theta) = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n}(e^{i\theta})^k\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}\right) = \frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$:

$$e^{ia} + e^{ib} = 2e^{i\frac{a+b}{2}} \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$e^{ia} - e^{ib} = 2ie^{i\frac{a+b}{2}} \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

d. Formules de trigonométrie :

Soit deux réels a et b.

Formules d'addition :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

Notamment :

$$\cos(\pi + a) = \cos(\pi - a) = -\cos a$$
$$\sin(\pi + a) = -\sin a$$
$$\sin(\pi - a) = \sin a$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\sin a$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$$

Pour a, b et $a+b$ différents de $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, avec k entier :

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

Formules de soustraction :

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

Pour a, b et $a-b$ différents de $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, avec k entier :

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

Formules de produits :

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$$
$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right)$$
$$\cos a \sin b = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) - \sin(a-b)\right)$$

Formules de duplication :

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$
$$\sin(2a) = 2\sin a \cos a$$

Pour a et 2a différents de $(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, avec k entier :

$$\tan(2a) = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$$

Formules d'addition :

$$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$
$$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

Formules de soustraction :

$$\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$$
$$\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$$

Formules avec l'angle moitié :

Pour a tel que $\dfrac{a}{2}$ différent de $(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, avec k entier, et en posant $t = \tan\left(\dfrac{a}{2}\right)$, on a :

$$\cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin a = \frac{2t}{1+t^2}$$

Et pour $a \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, avec k entier :

$$\tan a = \frac{2t}{1-t^2}$$

Réduction de $\mathbf{a\cos x + b\sin x}$:

Soient a et b deux réels non nuls. Il existe α tel que :

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ et } \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\alpha).$$

Cas particuliers :

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})$$
$$\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})$$

III – Racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité

1. <u>L'ensemble des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité</u>

<u>Définition</u> :

> Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
> Les <u>racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité</u> sont les racines complexes de $z^n = 1$. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble de ces racines.

Propriété :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{U}_n = \left\{ e^{i\frac{2k\pi}{n}},\ k \in [\![0\,;n-1]\!] \right\}.$$

Propriété :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\mathbb{U}_n$ est stable par multiplication et passage à l'inverse.

2. Résolution de $z^n = a$

Propriété et définition :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \mathbb{R}_+$. Il existe un unique réel positif a tel que $a^n = r$.

Ce réel est appelé racine $n^{\text{ième}}$ de r, noté $\sqrt[n]{r}$.

Propriété et définition :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}^*$ tel que $a = re^{i\alpha}$ avec $r > 0$.

L'ensemble des solutions de l'équation $z^n = a$ d'inconnue z est $z_o\mathbb{U}_n$ où $z_o = \sqrt[n]{r}\,e^{i\frac{\alpha}{n}}$.

Ces solutions sont appelées racines $n^{\text{ième}}$ de a.

IV – Second degré

1. Racines carrées

Propriété :

Soit $z \in \mathbb{C}$. Il existe deux nombres complexes r_1 et r_2 tels que $r_1^2 = r_2^2 = z$. On a de plus, $r_2 = -r_1$.

2. Second degré

Soient a, b et c trios nombres complexes, avec $a \neq 0$.

On cherche à résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation :

$$az^2 + bz + c = 0.$$

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ qui est le discriminant. Si δ est une racine carrée de Δ, les racines de l'équation ci-dessus sont :

$$\frac{-b-\delta}{2a} \text{ et } \frac{-b+\delta}{2a}.$$

Une équation du second degré dans $\mathbb{C}$ possède *toujours* deux solutions (éventuellement égales : racine double).

3. Relations entre les coefficients et les racines d'un trinôme

Propriété :

Si z_1 et z_2 sont les racines de $az^2 + bz + c$ (distinctes ou pas), on a $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ et $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$.

V – Exponentielle complexe

1. Définition

Définition :

> Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$. On pose $e^z = e^x e^{iy}$.

2. Propriétés

Propriété :

> $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2$, $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$.

Corollaires :

> i. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall (z_1, z_2, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n$, $e^{z_1+z_2+...+z_n} = e^{z_1} e^{z_2} ... e^{z_n}$.
>
> ii. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $e^{nz} = (e^z)^n$.
>
> iii. $\forall z \in \mathbb{C}$, $\dfrac{1}{e^z} = e^{-z}$.
>
> iv. $\forall z \in \mathbb{C}$ et $\forall z' \in \mathbb{C}$, on a $e^{z-z'} = \dfrac{e^z}{e^{z'}}$.
>
> v. $\forall z \in \mathbb{C}$, $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$.

Propriété :

> $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2$:
>
> $$e^z = e^{z'} \quad \Leftrightarrow \quad z - z' = 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

VI – Interprétation géométrique de nombres complexes

1. Le plan complexe

Définitions :

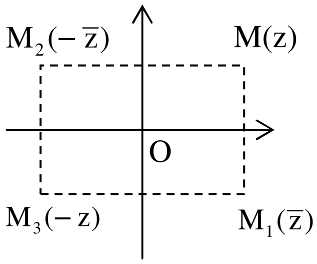
> Le <u>plan complexe</u> est le plan usuel ($\mathbb{R}^2$) muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
>
> Si M est un point (*resp.* : $\vec{U}$ est un vecteur) de coordonnées (x, y), alors $z = x + iy$ est l'<u>affixe</u> du point M (*resp.* : du vecteur $\vec{U}$). Le plan est ainsi mis en bijection avec $\mathbb{C}$.

Propriétés :

> Si M est un point d'affixe z, alors :
>
> - $|z| = OM$.
> - $\arg(z) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right)$.
> - $M \in (Ox) \quad \Leftrightarrow \quad$ z est réel.
> - $M \in (Oy) \quad \Leftrightarrow \quad$ z est imaginaire pur.
>
> Pour tous points A, B, C et D, d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D :
>
> - L'affixe de $\overrightarrow{AB}$ est $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.

- $A = B \iff z_A = z_B$.
- $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = |z_B - z_A|$
- $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)\ [2\pi]$ avec $A \neq B$.
- $\arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})\ [2\pi]$ avec $A \neq B$ *et* $C \neq D$.
- L'affixe du milieu d'un segment [AB] est $\dfrac{z_A + z_B}{2}$.
- L'affixe du centre de gravité d'un triangle ABC est $\dfrac{z_A + z_B + z_C}{3}$.

Pour M d'affixe z, on a le schéma :



où M_1, M_2 et M_3 sont les symétriques de M par rapport à (Ox), (Oy) et O respectivement.

Propriétés :

Pour tous vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ d'affixes respectives z et z' :

- l'affixe de $\vec{U} + \vec{V}$ est $z + z'$ et l'affixe de $k\vec{U}$ avec k *réel* est kz.
- $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont colinéaires si et seulement si $z\overline{z}' \in \mathbb{R}$.
- $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont orthogonaux si et seulement si $z\overline{z}' \in i\mathbb{R}$.

Propriété :

Soit a un complexe fixé et $R > 0$. L'ensemble des points M, d'affixe z, du plan complexe tel que $|z - a| < R$ (*resp.* $|z - a| \leq R$) est le disque ouvert (*resp.* fermé) de centre A, d'affixe a, et de rayon R.

2. Transformations du plan

a. Généralités :

Définitions :

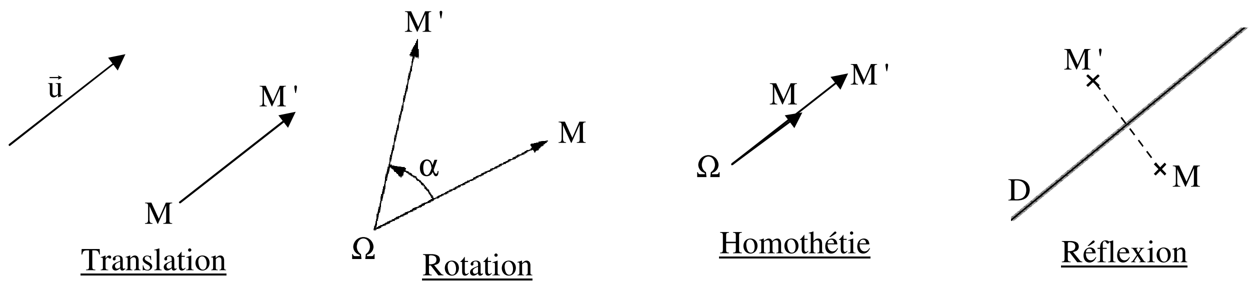
On appelle transformation du plan une bijection du plan dans lui-même.

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. La translation de vecteur $\vec{u}$ est l'application du plan dans lui-même qui à un point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

Soient Ω un point du plan et α un réel. La rotation de centre Ω et d'angle α est l'application du plan dans lui-même qui à un point M du plan associe le point M' tel que $\Omega M' = \Omega M$ et $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \alpha\,[2\pi]$ (quand $M \neq \Omega$).

Soient Ω un point du plan et k un réel non nul. L'homothétie de centre Ω et de rapport k est l'application du plan dans lui-même qui à un point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$.

Soit D une droite du plan. La réflexion (ou symétrie axiale) d'axe D est l'application du plan dans lui-même qui à un point M associe le point M' tel que D est la médiatrice de $[MM']$ si $M \notin D$ et $M' = M$ si $M \in D$.



Propriétés :

Les translations, rotations, homothéties et réflexions sont des transformations du plan et :

- La réciproque d'une translation de vecteur $\vec{u}$ est la translation de vecteur $-\vec{u}$.
- La réciproque d'une rotation de centre Ω et d'angle α est la rotation de même centre et d'angle – α.
- La réciproque d'une homothétie de centre Ω et de rapport k est l'homothétie de même centre et de rapport 1/k.
- La réciproque d'une réflexion (ou symétrie axiale) d'axe D est elle-même.

b. Ecriture complexe :

Définition :

L'écriture complexe d'une application du plan dans lui-même est une relation du type $z' = f(z)$ où z est l'affixe d'un point M et z' est l'affixe de son image par l'application.

Propriétés :

Soit f une application de *P* dans *P*.

- f est une translation si et seulement si son écriture complexe est $z' = z + b$. Dans ce cas, f est une translation de vecteur $\vec{u}$, d'affixe b.
- f est une rotation si et seulement si son écriture complexe est $z' = e^{i\alpha}(z - z_\Omega) + z_\Omega$. Dans ce cas, f est une rotation de centre Ω d'affixe z_Ω et d'angle α.
- f est une homothétie si et seulement si son écriture complexe est $z' = k(z - z_\Omega) + z_\Omega$. Dans ce cas, f est une homothétie de centre Ω et de rapport k est.
- L'écriture complexe de la réflexion par rapport à l'axe des abscisses (*resp.* ordonnées) est $z' = \overline{z}$ (*resp.* $z' = -\overline{z}$).