Chapitre 8 : Fonctions numériques - Primitives

Programme officiel PCSI

a) Calcul de primitives

Primitives d'une fonction définie sur un intervalle à valeurs complexes. Lien entre intégrales et primitives.	Description de l'ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle connaissant l'une d'entre elles. On rappelle sans démonstration que, pour une fonction continue f, $x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ a pour dérivée f. On pourra noter $\int^{x} f(t)\mathrm{d}t$ une primitive générique de f.
Calcul des primitives, application au calcul d'intégrales.	Primitives de $x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$, application aux primitives de $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)$.
Primitives des fonctions exponentielle, logarithme, puissances, trigonométriques et hyperboliques, et des fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.	Les étudiants doivent savoir calculer les primitives de fonctions du type $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ et reconnaître les dérivées de fonctions composées.
Intégration par parties, changement de variable.	Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.

Plan du résumé

Résumé

Dans ce chapitre, les fonctions considérées sont définies sur un intervalle I quelconque de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les propriétés de bases des intégrales de fonctions continues (linéarité, relation de Chasles, croissance) sont supposées connues (vues en Terminale) et seront reprises en fin d'années.

I – Primitives d'une fonction continue

1. Définition

Définitions :

Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. On dit qu'une fonction F est une primitive de f sur I si F est dérivable sur I et $F' = f$.

Propriété :

Deux primitives sur un intervalle d'une même fonction continue diffèrent d'une constante.

2. Primitives et intégrales

Théorème :

Soient $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ et $a \in I$.

- La fonction f admet des primitives sur I. On note $x \mapsto \int^x f(t)dt$ une primitive quelconque de f.
- La fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$, définie sur I, est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

Corollaires :

Soient $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ et $a \in I$.

- Pour toute primitive F de f sur I, on a $\forall\, x \in I$, $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt$.
- Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, alors $\forall\, x \in I$, on a $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt$.

Propriété :

Soient $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ et h et g deux fonctions dérivables sur un intervalle J et à valeurs dans I.

Alors, la fonction $x \mapsto \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt$ est dérivable sur J, de dérivée $x \mapsto h'(x)f\big(h(x)\big) - g'(x)f\big(g(x)\big)$.

3. Primitives usuelles

Fonction	*Primitive*	*Intervalle*	*Commentaires*
$\lambda f + \mu g$	$\lambda F + \mu G + \text{cste}$	I	I = intervalle sur lequel f et g sont continues. λ et μ réels fixés.
$t \mapsto f(at+b)$	$t \mapsto \frac{1}{a}F(at+b) + \text{cste}$	I	I = intervalle sur lequel $t \mapsto f(at+b)$ est continue.
$t \mapsto u'(t)f\big(u(t)\big)$	$t \mapsto F\big(u(t)\big) + \text{cste}$	I	I = intervalle sur lequel $t \mapsto f\big(u(t)\big)$ et $t \mapsto u'(t)$ sont continues.

$t \mapsto t^{\alpha}$ avec $\alpha \neq -1$	$t \mapsto \dfrac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \text{cste}$	$\mathbb{R}_+^*$	Peut se prolonger à $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_-^*$ suivant les valeurs de α.
$t \mapsto \dfrac{1}{t}$	$t \mapsto \ln t + \text{cste}$	$\mathbb{R}_+^*$	$t \mapsto \ln\lvert t\rvert + \text{cste}$ sur $\mathbb{R}_-^*$.
$t \mapsto e^{\lambda t}$	$t \mapsto \dfrac{1}{\lambda} e^{\lambda t} + \text{cste}$	$\mathbb{R}$	$\lambda \in \mathbb{C}^*$
$t \mapsto e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ $t \mapsto e^{\alpha t}\sin(\beta t)$	$t \mapsto \dfrac{\alpha e^{\alpha t}\cos(\beta t) + \beta e^{\alpha t}\sin(\beta t)}{\alpha^2+\beta^2} + \text{cste}$ $t \mapsto \dfrac{\alpha e^{\alpha t}\sin(\beta t) - \beta e^{\alpha t}\cos(\beta t)}{\alpha^2+\beta^2} + \text{cste}$	$\mathbb{R}$	$(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Parties réelle et imaginaires d'une primitive de $t \mapsto e^{(\alpha+i\beta)t}$.
$t \mapsto \ln t$	$t \mapsto t\ln t - t + \text{cste}$	$\mathbb{R}_+^*$	S'obtient en intégrant par parties.
$t \mapsto \cos t$	$t \mapsto \sin t + \text{cste}$	$\mathbb{R}$	
$t \mapsto \sin t$	$t \mapsto -\cos t + \text{cste}$	$\mathbb{R}$	
$t \mapsto \tan t$	$t \mapsto -\ln\lvert\cos t\rvert + \text{cste}$	I	I = intervalle ne contenant pas de multiple impaire de $\pi/2$.
$t \mapsto \text{ch}\, t$	$t \mapsto \text{sh}\, t + \text{cste}$	$\mathbb{R}$	
$t \mapsto \text{sh}\, t$	$t \mapsto \text{ch}\, t + \text{cste}$	$\mathbb{R}$	
$t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$	$t \mapsto \arctan t + \text{cste}$	$\mathbb{R}$	
$t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$	$t \mapsto -\arccos(t) + \text{cste}$ ou $t \mapsto \arcsin(t) + \text{cste}$	$]-1;1[$	

II – Calcul de primitives et d'intégrales

1. Intégration par parties

Propriété :

Soient u et v deux fonctions de classe C^1 sur I. Alors, $\forall (a,b) \in I^2$, on a :

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,dt = \left[u(t)v(t)\right]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,dt.$$

2. Changement de variable

Propriété :

Soient $f \in C(I,\mathbb{K})$ et φ une fonction de classe C^1 sur $[\alpha,\beta]$ et à valeurs dans I, on a :

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi'(u) f\left(\varphi(u)\right) du.$$

Quelques changements de variable usuels :

1) <u>Changement affine</u> : $t = \varphi(u) = au + b$. On a $dt = a\,du$ donc $u = \dfrac{t-b}{a}$ et $du = \dfrac{1}{a}dt$.

2) <u>Exponentiel</u> : Si $f(t) = e^t g(e^t)$, on peut poser $u = e^t$. On a $du = e^t dt$ et :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b e^t g(e^t)dt = \int_{e^a}^{e^b} g(u)du\,.$$

3) <u>Trigonométrique</u> : Si $f(t) = g(\cos t, \sin t)$, on peut poser $u = \cos t$, $u = \sin t$, $u = \tan t$ ou $u = \tan\dfrac{t}{2}$.
   - Pour les deux premiers, il faut penser que $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, pour éventuellement remplacer des $\cos t$ par des $\sin t$, ou vice-versa.
   - Pour les deux derniers, il faut faire très attention à l'intervalle d'intégration car la fonction tangente n'est pas définie sur $\mathbb{R}$.
   - Le dernier est plus laborieux à mettre en œuvre, mais marche très souvent. Si $u = \tan\dfrac{t}{2}$, on a :
     - $dt = \dfrac{2du}{1+u^2}$.
     - $\cos t = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$.
     - $\sin t = \dfrac{2u}{1+u^2}$.

4) Quand apparait dans la fonction la quantité $\sqrt{1-t^2}$, penser aux fonctions trigonométriques.

3. <u>Cas de fonctions rationnelles simples</u>

Une fonction rationnelle est le quotient de deux fonctions polynômes.

Primitives de fonctions du type $t \mapsto \dfrac{1}{at^2+bt+c}$ *avec* $a \neq 0$:

- Si $at^2 + bt + c$ possède deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 ($b^2 - 4ac > 0$), on peut écrire :

$$\frac{1}{at^2+bt+c} = \frac{\alpha}{t-r_1} + \frac{\beta}{t-r_2}$$

  où a et b sont des réels (que l'on peut obtenir par identification).

  Une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{at^2+bt+c}$ est alors $t \mapsto \alpha \ln|t-r_1| + \beta \ln|t-r_2|$ sur un intervalle ne contenant pas les racines r_1 et r_2.

- Si $at^2 + bt + c$ possède une racine réelle double r ($b^2 - 4ac = 0$), on peut écrire :

$$\frac{1}{at^2+bt+c} = \frac{1}{a(t-r)^2}\,.$$

  Une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{at^2+bt+c}$ est alors $t \mapsto -\dfrac{1}{a(t-r)}$ sur un intervalle ne contenant pas r.

- Si at^2+bt+c ne possède pas de racine réelle ($b^2-4ac<0$), on peut écrire :

$$\frac{1}{at^2+bt+c}=\frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\frac{\frac{2a}{\sqrt{4ac-b^2}}}{\left(\frac{2at+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right)^2+1}.$$

Une primitive de $t\mapsto\frac{1}{at^2+bt+c}$ est alors $t\mapsto\frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\arctan\left(\frac{2at+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right)$.

Primitives de fonctions du type $t\mapsto\frac{\alpha t+\beta}{at^2+bt+c}$ *avec* $a\neq 0$:

$$\frac{\alpha t+\beta}{at^2+bt+c}=\frac{\alpha}{2a}\frac{2at+b}{at^2+bt+c}+\frac{2a\beta-\alpha b}{2a}\frac{1}{at^2+bt+c}.$$

On a alors une combinaison linéaire de deux fonctions que l'on sait intégrer.

Primitives de fonctions du type $t\mapsto\frac{P(t)}{at^2+bt+c}$ *avec* $a\neq 0$ *et* P *fonction polynôme* :

Les fonctions du type $t\mapsto\frac{P(t)}{at^2+bt+c}$ où P est une fonction polynôme quelconque peut d'écrire sous la forme $t\mapsto Q(t)+\frac{\alpha t+\beta}{at^2+bt+c}$ où Q est une fonction polynôme obtenue par division euclidienne de P par aX^2+bX+c. On peut donc intégrer ce type de fonctions.