Chapitre 9 : Equations différentielles

Programme officiel PCSI

b) Équations différentielles linéaires du premier ordre

Équation différentielle linéaire du premier ordre $$y' + a(x)y = b(x)$$ où a et b sont des fonctions réelles ou complexes définies et continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.	Équation homogène associée. Cas particulier où la fonction a est constante.
Ensemble des solutions de l'équation homogène.	
Principe de superposition.	
Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée.	
Méthode de la variation de la constante.	
Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	

c) Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants $$y'' + ay' + by = f(x)$$ où a et b sont des scalaires et f est une fonction réelle ou complexe, définie et continue sur un intervalle.	Équation homogène associée.
Ensemble des solutions de l'équation homogène.	Si a et b sont réels, description des solutions réelles.
Principe de superposition. Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée.	Les étudiants doivent savoir déterminer une solution particulière dans le cas d'un second membre polynôme, de la forme $x \mapsto Ae^{\lambda x}$ avec $(A, \lambda) \in \mathbb{C}^2$, $x \mapsto B\cos(\omega x)$ et $x \mapsto B\sin(\omega x)$ avec $(B, \omega) \in \mathbb{R}^2$.
Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	La démonstration de ce résultat est hors programme.

Plan du résumé

Résumé

I – Généralités

Une équation différentielle est une équation du type :

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$$

où l'inconnue est y, fonction de la variable x au moins n fois dérivable sur un intervalle I et où F est une fonction de $n+2$ variables.

L'entier n est l'ordre de l'équation.

Une solution de l'équation est une fonction f, n fois dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ qui vérifie l'équation.

Une solution maximale est un couple (f, I) où f est une solution de l'équation sur un intervalle I, *le plus grand possible* (au sens de l'inclusion).

Un problème de Cauchy est la recherche d'une solution d'une équation différentielle d'ordre n vérifiant n conditions initiales. On verra (surtout l'année prochaine) qu'un problème de Cauchy admet souvent une unique solution maximale.

Une équation différentielle est linéaire si elle est de la forme $a_n(x)y^{(n)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$.

L'équation différentielle $a_n(x)y^{(n)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ est l'équation homogène (ou sans second membre) (ESSM) associée.

II – Equations linéaires du premier ordre

1. Définition

Définition :

> On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre une équation de la forme $a(t)y' + b(t)y = c(t)$, où a, b et c sont des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles ou complexes.

Autres types d'équation d'ordre 1 :

- Equations à variables séparables : on peut écrire l'équation sous forme $y'f(y) = g(t)$.
- Systèmes différentiels linéaires d'ordre 1 à deux inconnues.
- Equation pour laquelle un changement de fonction ramène à une équation linéaire.
- …

2. Résolution

Dans la suite, on appelle (E), l'équation $y' + a(t)y = b(t)$ où a et b sont deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes et (H) : $y' + a(t)y = 0$, l'équation homogène associée à (E).

Propriété :

> Les solutions sur I de (H) sont les fonctions :
>
> $$t \mapsto k\exp\left(-\int^t a(u)du\right)$$
>
> où $t \mapsto \int^t a(u)du$ est une primitive de a sur I et k est une constante réelle ou complexe.

<u>Théorème</u> :

Les solutions sur I de (E) sont les fonctions de la forme :
$$t \mapsto y_p(t) + k\exp\left(-\int^t a(u)du\right)$$
où k est une constante réelle ou complexe et y_p est une solution particulière de (E).

Détermination d'une solution particulière de (E) *par la <u>méthode de variation de la constante</u>* :

Les solutions de (H) sont de la forme $t \mapsto k\,e^{-A(t)}$. La méthode de variation de la constante est de chercher une solution particulière sous la forme $y_p : t \mapsto k(t)\,e^{-A(t)}$ où k est une fonction dérivable sur I.

En réinjectant dans (E), on obtient $k'(t) = b(t)\,e^{A(t)}$ et on obtient une solution particulière :
$$y_p : t \mapsto e^{-A(t)} \int^t b(u)\,e^{A(u)}\,du\ .$$

<u>Théorème</u> :

Le problème de Cauchy formé par (E) et la condition initiale $y(t_o) = y_o$ admet une unique solution.

<u>Propriété</u> (*Principe de superposition*) :

On suppose que $b = b_1 + b_2$ où b_1 et b_2 sont deux fonctions continues sur I. Alors, une fonction f est solution de (E) si et seulement si $f = f_1 + f_2$ avec f_1 solution de $(E_1) : y' + a(t)y = b_1(t)$ et f_2 solution de $(E_2) : y' + a(t)y = b_2(t)$.

III – Equations linéaires du second ordre

1. <u>Définition</u>

<u>Définition</u> :

On appelle <u>équation différentielle linéaire du second ordre</u> une équation de la forme $a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = f(t)$, où a, b, c et f sont des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes.

2. <u>Résolution</u>

Dans la suite on appelle (E), l'équation $ay'' + by' + cy = f(t)$ où a, b et c sont trois nombres réels ou complexes tels que $a \neq 0$ et f est une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes et (H) : $ay'' + by' + cy = 0$, l'équation homogène associée à (E).

<u>Définition</u> :

On appelle <u>équation caractéristique associée à (E)</u>, l'équation $ar^2 + br + c = 0$ (d'inconnue r).

<u>Propriété</u> :

Si on appelle r_1 et r_2 les racines (éventuellement complexes) de l'équation caractéristique, les solutions de (H) sur I sont les fonctions :

- $t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ si $r_1 \neq r_2$;
- $t \mapsto (\lambda t + \mu)e^{r_1 t}$ si $r_1 = r_2$.

où λ et μ sont des constantes réelles ou complexes.

Cas des fonctions à valeurs réelles :

Si a, b et c sont réels, alors trois cas se présentent :

1) L'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 ($\Delta = b^2 - 4ac > 0$) et les solutions de (H) sont de la forme $t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ avec λ et μ réels.
2) L'équation caractéristique admet une racine réelle double r_o ($\Delta = b^2 - 4ac = 0$) et les solutions de (H) sont de la forme $t \mapsto (\lambda t + \mu)e^{r_o t}$ avec λ et μ réels.
3) L'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$ ($\Delta = b^2 - 4ac < 0$) et les solutions de (H) sont de la forme $t \mapsto (\lambda \cos\beta t + \mu \sin\beta t)e^{\alpha t}$ avec λ et μ réels.

<u>*Théorème*</u> :

> L'équation (E) admet des solutions sur I et si y_p est une solution particulière de (E), alors :
>
> $$y \text{ est solution de (E)} \iff y = y_p + y_h \text{ avec } y_h \text{ solution de l'ESSM (H).}$$

<u>*Propriété*</u> :

> Si $f(t) = K e^{\alpha t}$ avec $(\alpha, K) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$, alors (E) admet une solution particulière de la forme $t \mapsto Q(t) e^{\alpha t}$ où Q est une fonction polynôme telle que :
>
> - Q est constante si α n'est pas racine de l'équation caractéristique ;
> - Q est affine si α est racine simple de l'équation caractéristique ;
> - Q est de degré 2 si α est racine double de l'équation caractéristique.

<u>*Théorème*</u> :

> Le problème de Cauchy formé par (E) et les conditions initiales $y(t_o) = y_o$ et $y'(t_o) = y'_o$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

<u>*Propriété*</u> (*Principe de superposition*) :

> On suppose que $f = f_1 + f_2$ où f_1 et f_2 sont deux fonctions continues sur I. Alors, une fonction g est solution de (E) si et seulement si $g = g_1 + g_2$ avec g_1 solution de $(E_1): ay'' + by' + cy = f_1(t)$ et g_2 solution de $(E_2): ay'' + by' + cy = f_2(t)$.

Une application :

Si le second membre de (E) est de la forme $f(t) = K\cos(\omega t)$ ou $f(t) = K\sin(\omega t)$ avec K et ω réels, alors avec les formules d'Euler, on a :

$$ay'' + by' + cy = \frac{K}{2}e^{i\omega t} + \frac{K}{2}e^{-i\omega t} \text{ ou } ay'' + by' + cy = \frac{K}{2i}e^{i\omega t} - \frac{K}{2i}e^{-i\omega t}.$$

On peut alors utiliser le principe de superposition et la propriété vue plus haut (deux fois).

Remarques : Dans le cas où a, b et c sont réels, on peut aller plus vite en remarquant que :

- toute solution réelle de $ay'' + by' + cy = K\cos(\omega t)$ est la partie réelle d'une solution (complexe) de $ay'' + by' + cy = Ke^{i\omega t}$;
- toute solution réelle de $ay'' + by' + cy = K\sin(\omega t)$ est la partie imaginaire d'une solution (complexe) de $ay'' + by' + cy = Ke^{i\omega t}$.

Dans les deux cas, si $i\omega$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, alors une solution particulière de $ay''+by'+cy=Ke^{i\omega t}$ est de la forme $t\mapsto \lambda e^{i\omega t}$ avec λ complexe dont les parties réelles est imaginaires seront des combinaisons linéaires de $t\mapsto \cos(\omega t)$ et $t\mapsto \sin(\omega t)$.