Complément sur la trigonalisation

Pour trigonaliser une matrice A (3×3) :

- Calculer χ_A. Si χ_A est scindé, A est trigonalisable.
- Chercher les sous-espaces propres.
  - S'il y a trois vap distinctes <u>ou</u> deux vap distinctes, mais avec un sep de dimension 2 <u>ou</u> une seule vap, mais avec un sep de dimension 3 (dans ce cas, A est scalaire) : A est diagonalisable dans une base de vep.
  - Si $\chi_A = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)^2$ avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$ et les deux sep sont des droites, alors A est semblable à $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & a \\ 0 & \lambda_2 & b \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ dans une base (e_1, e_2, e_3) où e_1 est un vep associé à λ_1, e_2 est un vep associé à λ_2 et e_3 complète e_1 et e_2 en un base.
  - Si $\chi_A = (X-\lambda_1)^3$, et $\ker(A-\lambda_1 I_3)$ est un plan, on procède comme ci-dessus avec (e_1, e_2) une base de $\ker(A-\lambda_1 I_3)$.
  - Si $\chi_A = (X-\lambda_1)^3$, et $\ker(A-\lambda_1 I_3)$ est une droite, c'est un tout petit peu plus délicat.

    Voici deux méthodes.

    - *<u>Première méthode</u>*

      Si e_1 dirige $\ker(A-\lambda_1 I_3)$, alors on peut le compléter en une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^3$ dans laquelle la matrice A devient $\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{B}} \\ 0 & & \end{pmatrix} = P^{-1}AP$ avec $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ et $P = P_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{B}}$ où $\mathcal{B}_c$ est la base canonique de $\mathbb{K}^3$.

      Alors, $\chi_A = (X-\lambda_1)\chi_B = (X-\lambda_1)^3$ donc $\chi_B = (X-\lambda_1)^2$ et λ_1 est vap de B.

      Si $e'_1 \in \mathbb{K}^2$ est un vep de B associé à λ_1, on le complète en une base $\mathscr{b}$ de $\mathbb{K}^2$, avec $Q = P_{\mathscr{b}_c}^{\mathscr{b}}$ où $\mathscr{b}_c$ est la base canonique de $\mathbb{K}^2$. Alors, $\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \lambda_1 & a \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} = R^{-1}AR$ avec $R = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{Q}} \\ 0 & & \end{pmatrix}$.

    - *<u>Seconde méthode</u>*

      Posons $B = A-\lambda_1 I_3$ (donc $\ker B$ est une droite). On a $\chi_A(A) = B^3 = 0_3$, mais $B^2 \neq 0_3$ (car sinon $\operatorname{Im} B \subset \ker B$ donc $rg(B) = 3-\dim(\ker B) \leq \dim(\ker B)$, donc $\dim(\ker B) \geq \dfrac{3}{2} > 1$ ce qui est absurde).

      Ainsi, il existe $e_3 \in \mathbb{K}^3$ tel que $B^2 e_3 \neq 0$ et on prouve facilement que $(B^2 e_3, Be_3, e_3)$ est libre, donc une base de $\mathbb{K}^3$. Dans cette base, B devient $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et donc A devient $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$.

Exemple : $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ 1 & 2 & -2\\ 3 & -1 & -1\end{pmatrix}$.

$$\chi_{A(t)}=\begin{vmatrix}X-2 & -1 & 2\\ -1 & X-2 & 2\\ -3 & 1 & X+1\end{vmatrix}\underset{C_1\leftarrow C_1+C_2+C_3}{=}\begin{vmatrix}X-1 & -1 & 2\\ X-1 & X-2 & 2\\ X-1 & 1 & X+1\end{vmatrix}$$

$$=(X-1)\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 1 & X-2 & 2\\ 1 & 1 & X+1\end{vmatrix}\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}{=}(X-1)\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & X-1 & 0\\ 0 & 2 & X-1\end{vmatrix}=(X-1)^3$$

Et :

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ 1 & 2 & -2\\ 3 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\quad\Leftrightarrow\quad x=y=z\,.$$

Donc, $\ker(A-\lambda_1 I_3)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\right)$ et on est dans le dernier cas.

Avec $B=A-I_3=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & 1 & -2\\ 3 & -1 & -2\end{pmatrix}$, on a $B^2=\begin{pmatrix}-4 & 4 & 0\\ -4 & 4 & 0\\ -4 & 4 & 0\end{pmatrix}$, donc si $\mathcal{B}_c=(e_1,e_2,e_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a $B^2e_2=4\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\neq 0$, donc $(B^2e_2,Be_2,e_2)=\left(4\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et avec $P=\begin{pmatrix}4 & 1 & 0\\ 4 & 1 & 1\\ 4 & -1 & 1\end{pmatrix}$:

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$