Corrigés des TD du chapitre 10

Exercice 1

1) a. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2-1}\,dt$ est impropre en 0, 1 et $+\infty$.

- $\lim_{t\to 1}\left(\frac{\ln t}{t^2-1}\right) = \lim_{t\to 1}\left(\frac{1}{t+1}\frac{\ln t}{t-1}\right) = \frac{1}{2}$, donc $t \mapsto \frac{\ln t}{t^2-1}$, prolongée par continuité en 1, est continue sur $\mathbb{R}_+^*$;
- $\frac{\ln t}{t^2-1} \underset{t\to 0}{\sim} -\ln t$ et $t \mapsto -\ln t$ est intégrable au voisinage de 0^+ ;
- $\lim_{t\to+\infty}\left(t^{1,5}\frac{\ln t}{t^2-1}\right) = \lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{\sqrt{t}} = 0$ donc $\frac{\ln t}{t^2-1} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^{1,5}}\right)$ et $t \mapsto \frac{1}{t^{1,5}}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$.

Donc :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2-1}\,dt \text{ converge.}}$$

b. L'intégrale $\int_0^1 \frac{dx}{\arccos x}$ est impropre en 1.

- $x \mapsto \frac{1}{\arccos x}$ est continue sur $[0,1[$;
- Pour tout $a \in [0,1[$, $\int_0^1 \frac{dx}{\arccos x} \underset{t=\arccos x}{=} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{t}\,dt$ et $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$.

Donc :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{dx}{\arccos x} \text{ converge.}}$$

c. L'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^a(\ln t)^b}$ est impropre en $+\infty$.

- Si $a<1$, alors $\frac{1}{t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^a(\ln t)^b}\right)$ et $\int_2^{+\infty}\frac{dt}{t}$ diverge, donc $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^a(\ln t)^b}$ diverge.
- Si $a>1$, alors $\frac{1}{t^a(\ln t)^b} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^{(a+1)/2}}\right)$ et $\int_2^{+\infty}\frac{dt}{t^{(a+1)/2}}$ converge car $\frac{a+1}{2} > 1$, donc $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^a(\ln t)^b}$ converge.
- Si $a=b=1$, alors pour $X \geq 2$, $\int_2^X \frac{dt}{t\ln t} = \ln\left(\frac{\ln X}{\ln 2}\right) \xrightarrow[X\to+\infty]{} +\infty$, donc $\int_2^{+\infty}\frac{dt}{t\ln t}$ diverge.
- Si $a=1$ et $b\neq 1$, alors pour tout $X\geq 2$, $\int_2^X \frac{dt}{t(\ln t)^b} = \frac{1}{1-b}\left[\frac{1}{(\ln X)^{b-1}} - \frac{1}{(\ln 2)^{b-1}}\right]$, donc $\int_2^{+\infty}\frac{dt}{t(\ln t)^b}$ converge quand $b>1$.

Donc :

$$\boxed{\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^a(\ln t)^b} \text{ converge si et seulement si } a>1 \text{ ou } (a=1 \text{ et } b>1).}$$

d. L'intégrale $\int_1^{+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1+\frac{1}{x}}-a-\frac{b}{x}\right]dx$ est impropre en $+\infty$.

On a :

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)=\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Donc :

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1+\frac{1}{x}}-a-\frac{b}{x}=e^{\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}-a-\frac{b}{x}=e^{\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)}-a-\frac{b}{x}=1-a+\frac{1-b}{x}+\frac{1}{x^2}+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

La fonction $x\mapsto\frac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, mais $x\mapsto 1-a+\frac{1-b}{x}$ ne l'est pas sauf si elle est nulle, autrement dit si $a=b=1$. Ainsi :

$$\boxed{\int_1^{+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1+\frac{1}{x}}-a-\frac{b}{x}\right]dx \text{ converge si et seulement si } a=b=1.}$$

e. L'intégrale $\int_0^{+\infty}\sin^2 x\,dx$ est impropre en $+\infty$.

La fonction $x\mapsto\sin^2 x$ est non nulle et périodique, donc :

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\sin^2 x\,dx \text{ diverge.}}$$

f. L'intégrale $\int_0^{+\infty}e^{it^2}dt$ est impropre en $+\infty$.

Pour tout $x\geq 1$, on a en intégrant par parties :

$$\int_1^x e^{it^2}dt=\int_1^x\frac{1}{2it}2ite^{it^2}dt=\left[\frac{1}{2it}e^{it^2}\right]_1^x+\frac{1}{2i}\int_1^x\frac{1}{t^2}e^{it^2}dt=\frac{1}{2i}\left(\frac{e^{ix^2}}{x}-e^i+\int_1^x\frac{1}{t^2}e^{it^2}dt\right).$$

Et :

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{ix^2}}{x}=0$;
- $\left|\frac{1}{t^2}e^{it^2}\right|=\frac{1}{t^2}$ et $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt$ converge, donc $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}e^{it^2}dt$ converge ($t\mapsto\frac{1}{t^2}e^{it^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$).

Ainsi :

$$\boxed{\int_0^{+\infty}e^{it^2}dt \text{ converge.}}$$

g. L'intégrale $\int_0^{+\infty}\cos(e^x)\,dx$ est impropre en $+\infty$.

On fait la même technique que ci-dessus :

$$\int_0^{+\infty}\cos(e^x)\,dx=\int_0^{+\infty}e^{-x}e^x\cos(e^x)\,dx=\left[e^{-x}\sin(e^x)\right]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-x}\sin(e^x)\,dx=\sin 1+\int_0^{+\infty}e^{-x}\sin(e^x)\,dx\,.$$

Comme $\left|e^{-x}\sin(e^x)\right|\leq e^{-x}$ et $\int_0^{+\infty}e^{-x}dx$ converge, $\int_0^{+\infty}e^{-x}\sin(e^x)\,dx$ converge.

Ainsi :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \cos(e^x)\,dx \text{ converge.}}$$

h. L'intégrale $\int_0^{+\infty} x^3 \sin(x^8)\,dx$ est impropre en $+\infty$.

Once again :

$$\int_1^{+\infty} x^3 \sin(x^8)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{8x^4} 8x^7 \sin(x^8)\,dx = \left[-\frac{1}{8x^4}\cos(x^8)\right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{2x^5}\cos(x^8)\right)dx.$$

Et les deux termes du membre de droite convergent, donc :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} x^3 \sin(x^8)\,dx \text{ converge.}}$$

2) Les deux intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ et $\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$ sont impropres en 0 et $+\infty$.

On a $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, donc $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ et $x \mapsto \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$ se prolongent par continuité en 0, et ainsi :

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx \text{ et } \int_0^1\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx \text{ convergent.}$$

Pour tout $x \in [1,+\infty[$, on a $0 \le \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \le \frac{1}{x^2}$ et $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ converge, donc $x \mapsto \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ et ainsi :

$$\int_1^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx \text{ converge.}$$

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $a < b$, on a en intégrant par parties :

$$\int_a^b \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \int_a^b \frac{1}{x^2}\sin^2 x\,dx = \left[\left(-\frac{1}{x}\right)\sin^2 x\right]_a^b - \int_a^b\left(-\frac{1}{x}\right)2\cos x \sin x\,dx$$
$$= \frac{\sin^2 a}{a} - \frac{\sin^2 b}{b} + \int_a^b \frac{\sin(2x)}{x}dx = \frac{\sin^2 a}{a} - \frac{\sin^2 b}{b} + \int_a^b \frac{\sin(2x)}{2x}2\,dx$$

Et en posant $t = 2x$, on obtient :

$$\int_a^b \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \frac{\sin^2 a}{a} - \frac{\sin^2 b}{b} + \int_{2a}^{2b}\frac{\sin t}{t}dt$$

Or, on a $\lim\limits_{a\to 0}\frac{\sin^2 a}{a} = \lim\limits_{a\to 0}\left(\sin a \frac{\sin a}{a}\right) = 0\times 1 = 0$ et $\lim\limits_{b\to +\infty}\frac{\sin^2 b}{b} = 0$, donc, en faisant tendre a vers 0 et b vers $+\infty$ dans la relation ci-dessus, on obtient la convergence de $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt$ et :

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt}$$

L'intégrale de Dirichlet est $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$, donc on vient de voir qu'elle converge. On montre que qu'elle est semi-convergente et vaut $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 2

a. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^2} dt$ est impropre en $+\infty$, mais $\frac{\arctan t}{t^2} \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{\pi/2}{t^2}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge, donc $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^2} dt$ converge.

Pour tout $x \in [1, +\infty[$, on a en intégrant par parties :

$$\int_1^x \frac{\arctan t}{t^2} dt = \left[-\frac{\arctan t}{t} \right]_1^x + \int_1^x \frac{dt}{t(t^2+1)} = \arctan 1 - \frac{\arctan x}{x} + \int_1^x \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{t^2+1} \right) dt$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{\arctan x}{x} + \left[\ln t - \frac{1}{2} \ln(t^2+1) \right]_1^x = \frac{\pi}{4} - \frac{\arctan x}{x} + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x^2}{x^2+1} \right) + \frac{1}{2} \ln 2$$

Enfin, en en faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient :

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^2} dt = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2}$$

b. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^3}$ est impropre en $+\infty$, mais $\frac{1}{1+t^3} \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{1}{t^3}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3} dt$ converge, donc $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^3}$ converge.

On a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^3} = \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+t} - \frac{t-2}{t^2-t+1} \right) dt = \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+t} - \frac{1}{2} \frac{2t-1}{t^2-t+1} + \frac{3}{2} \frac{1}{t^2-t+1} \right) dt$$

$$= \frac{1}{3} \left[\ln(1+t) - \frac{1}{2} \ln(t^2-t+1) + \sqrt{3} \arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}} \right) \right]_0^{+\infty}$$

$$= \left[\frac{1}{3} \ln\left(\frac{1+t}{\sqrt{t^2-t+1}} \right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}} \right) \right]_0^{+\infty}$$

Soit :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^3} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}}$$

c. L'intégrale $\int_0^1 \frac{x \ln x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ est impropre en 0 et 1, mais :

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \ln x}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 1} \frac{x \ln x}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x \to 1} \left(x \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \, \frac{\ln x}{1-x} \right) = 0 .$$

Donc, $\int_0^1 \frac{x \ln x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ converge.

Avec une IPP, on a pour tout $(a,b)\in\,]0,1[^2$:

$$\int_a^b \frac{x\ln x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\int_a^b \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\ln x\,dx = -\left[\sqrt{1-x^2}\,\ln x\right]_a^b + \int_a^b \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}dx .$$

En posant $t=\sqrt{1-x^2}$:

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}dx &= -\int_a^b \frac{1-x^2}{x^2}\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}dx = -\int_{\sqrt{1-a^2}}^{\sqrt{1-b^2}} \frac{t^2}{1-t^2}dt = \int_{\sqrt{1-a^2}}^{\sqrt{1-b^2}}\left(1-\frac{1}{1-t^2}\right)dt \\ &= [t]_{\sqrt{1-a^2}}^{\sqrt{1-b^2}} - \frac{1}{2}\int_{\sqrt{1-a^2}}^{\sqrt{1-b^2}}\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)dt = [t]_{\sqrt{1-a^2}}^{\sqrt{1-b^2}} - \left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)\right]_{\sqrt{1-a^2}}^{\sqrt{1-b^2}} \\ &= [t]_{\sqrt{1-a^2}}^{\sqrt{1-b^2}} - \left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{(1+t)^2}{1-t^2}\right)\right]_{\sqrt{1-a^2}}^{\sqrt{1-b^2}} = [t]_{\sqrt{1-a^2}}^{\sqrt{1-b^2}} - \left[\ln\left(\frac{1+t}{\sqrt{1-t^2}}\right)\right]_{\sqrt{1-a^2}}^{\sqrt{1-b^2}} . \\ &= \sqrt{1-b^2}-\sqrt{1-a^2}-\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-b^2}}{b}\right)+\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{a}\right)\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{x\ln x}{\sqrt{1-x^2}}dx &= -\sqrt{1-b^2}\,\ln b+\sqrt{1-a^2}\,\ln a+\sqrt{1-b^2}-\sqrt{1-a^2}-\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-b^2}}{b}\right)+\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{a}\right) \\ &= \sqrt{1-a^2}\,\ln a+\ln\left(1+\sqrt{1-a^2}\right)-\ln a-\sqrt{1-a^2}-\sqrt{1-b^2}\,\ln b+\sqrt{1-b^2}-\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-b^2}}{b}\right) \\ &= \left[\sqrt{1-a^2}-1\right]\ln a+\ln\left(1+\sqrt{1-a^2}\right)-\sqrt{1-a^2}-\sqrt{1-b^2}\,\ln b+\sqrt{1-b^2}-\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-b^2}}{b}\right) \\ &= \frac{-a^2\ln a}{\sqrt{1-a^2}+1}+\ln\left(1+\sqrt{1-a^2}\right)-\sqrt{1-a^2}-\sqrt{1-b^2}\,\ln b+\sqrt{1-b^2}-\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-b^2}}{b}\right)\end{aligned}$$

En faisant tendre a vers 0 et b vers 1, on obtient :

$$\boxed{\int_a^b \frac{x\ln x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \ln 2 - 1}$$

d. L'intégrale $\int_0^{\pi/2}\sqrt{\tan x}\,dx$ est impropre en $\frac{\pi}{2}$, mais $\sqrt{\tan\left(\frac{\pi}{2}-h\right)}=\sqrt{\operatorname{cotan} h}\underset{h\to 0^+}{\sim}\frac{1}{\sqrt{h}}$ et $\int_0^a \frac{1}{\sqrt{h}}dh$ converge, donc $\int_0^{\pi/2}\sqrt{\tan x}\,dx$ converge.

Posons carrément $t=\sqrt{\tan x}$. On obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\sqrt{\tan x}\,dx &= \int_0^{+\infty} t\frac{2t}{1+t^4}dt = 2\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{1+t^4}dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{t^2-\sqrt{2}t+1}-\frac{t}{t^2+\sqrt{2}t+1}\right)dt \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^{+\infty}\left(\frac{2t-\sqrt{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1}-\frac{2t+\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1}+\frac{\sqrt{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1}+\frac{\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1}\right)dt\end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi/2}\sqrt{\tan x}\,dx=\frac{1}{2\sqrt2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{2t-\sqrt2}{t^2-\sqrt2 t+1}-\frac{2t+\sqrt2}{t^2+\sqrt2 t+1}\right)dt+\frac12\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{t^2-\sqrt2 t+1}\right)dt+\frac12\int_{-\infty}^{0}\left(\frac{1}{t^2-\sqrt2 t+1}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2\sqrt2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{2t-\sqrt2}{t^2-\sqrt2 t+1}-\frac{2t+\sqrt2}{t^2+\sqrt2 t+1}\right)dt+\frac12\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{t^2-\sqrt2 t+1}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2\sqrt2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{2t-\sqrt2}{t^2-\sqrt2 t+1}-\frac{2t+\sqrt2}{t^2+\sqrt2 t+1}\right)dt+\frac{1}{\sqrt2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sqrt2}{(\sqrt2 t-1)^2+1}dt$$

$$=\frac{1}{2\sqrt2}\left[\ln\left(\frac{t^2-\sqrt2 t+1}{t^2+\sqrt2 t+1}\right)\right]_0^{+\infty}+\frac{1}{\sqrt2}\left[\arctan\left(\sqrt2 t-1\right)\right]_{-\infty}^{+\infty}$$

Soit :

$$\boxed{\int_0^{\pi/2}\sqrt{\tan x}\,dx=\frac{\pi}{\sqrt2}}$$

e. L'intégrale $\int_0^{+\infty}\left(\sqrt t+a\sqrt{t+1}+b\sqrt{t+2}\right)dt$ est impropre en $+\infty$. Or :

$$\sqrt t+a\sqrt{t+1}+b\sqrt{t+2}=\sqrt t\left(1+a\sqrt{1+\frac1t}+b\sqrt{1+\frac2t}\right)$$

$$=\sqrt t\left[1+a+b+\frac{a+2b}{2t}-\frac{a+4b}{8t^2}+\underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)\right]$$

$$=(1+a+b)\sqrt t+\frac{a+2b}{2\sqrt t}-\frac{a+4b}{8t\sqrt t}+\underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t\sqrt t}\right)$$

Comme $\int_0^{+\infty}\sqrt t\,dt$ et $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt t}dt$ divergent et $\int_0^{+\infty}\frac{1}{t\sqrt t}dt$ converge, l'intégrale converge si et seulement si :

$$\begin{cases}1+a+b=0\\ a+2b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2\\ b=1\end{cases}.$$

Dans ce cas, on a :

$$\int_0^{+\infty}\left(\sqrt t-2\sqrt{t+1}+\sqrt{t+2}\right)dt=\left[\frac23 t\sqrt t-2\frac23(t+1)\sqrt{t+1}+\frac23(t+2)\sqrt{t+2}\right]_0^{+\infty}$$

$$=\frac23\left[t\left(\sqrt t-2\sqrt{t+1}+\sqrt{t+2}\right)+2\left(\sqrt{t+2}-\sqrt{t+1}\right)\right]_0^{+\infty}$$

$$=\frac23\lim_{t\to+\infty}\left[t\left(\sqrt t-2\sqrt{t+1}+\sqrt{t+2}\right)+2\left(\sqrt{t+2}-\sqrt{t+1}\right)\right]-\frac{4(\sqrt2-1)}{3}$$

$$=\frac23\lim_{t\to+\infty}\left[t\sqrt t\left(1-2\sqrt{1+\frac1t}+\sqrt{1+\frac2t}\right)+2\frac{1}{\sqrt{t+2}+\sqrt{t+1}}\right]-\frac{4(\sqrt2-1)}{3}$$

$$=\frac23\lim_{t\to+\infty}\left[-\frac{1}{4\sqrt t}+\underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\sqrt t}\right)\right]-\frac{4(\sqrt2-1)}{3}$$

Soit :

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\left(\sqrt t-2\sqrt{t+1}+\sqrt{t+2}\right)dt=-\frac{4(\sqrt2-1)}{3}}$$

f. Pour que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{(1-t)(1+at)}}$ soit définie sur $]0,1[$, il faut que $1+at>0$ sur $]0,1[$.

C'est toujours le cas quand $a \geq 0$ et si $a<0$, $1+at>0$ équivaut à $t<-\dfrac{1}{a}$, donc si $-\dfrac{1}{a} \in\ ]0,1[$, c'est-à-dire $a<-1$, la fonction n'est pas définie sur $]0,1[$.

Ainsi, il faut que $a \geq -1$ et dans ce cas, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t)(1+at)}}$ est impropre en 1.

Il y a deux cas à distinguer.

- Si $a=-1$, alors $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t)(1+at)}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t)(1-t)}} = \int_0^1 \frac{dt}{1-t}$ qui diverge.
- Si $a>-1$, alors $\dfrac{1}{\sqrt{(1-t)(1+at)}} \underset{t\to 1}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{1-a}}\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}}$ converge, donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t)(1+at)}}$ converge.

Ainsi :

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t)(1+at)}} \text{ converge si et seulement si } a>-1.$$

Si $a=0$, on a :

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t)(1+at)}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = -2\left[\sqrt{1-t}\right]_0^1 = 2.$$

Si $a \neq 0$:

$$(1-t)(1+at) = 1-(1-a)t-at^2 = \frac{(1+a)^2}{4a}\left[1-\left(\frac{2at+1-a}{1+a}\right)^2\right].$$

Alors, en posant $x=\dfrac{2at+1-a}{1+a}$, on a (avec $1+a>0$) :

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t)(1+at)}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{\frac{(1+a)^2}{4a}\left[1-\left(\frac{2at+1-a}{1+a}\right)^2\right]}} = \int_{\frac{1-a}{1+a}}^1 \frac{\frac{1+a}{2a}dx}{\sqrt{\frac{(1+a)^2}{4a}\left[(1-x^2)\right]}} = \int_{\frac{1-a}{1+a}}^1 \frac{dx}{a\sqrt{\frac{1}{a}\left[(1-x^2)\right]}}.$$

Sur $]-1,+\infty[$, la fonction $a \mapsto \dfrac{1-a}{1+a}$ est strictement décroissante de $+\infty$ à -1 et vaut 1 en 0. Il faut donc distinguer deux cas.

Si $a>0$, on a $\dfrac{1-a}{1+a} \in\ ]-1,1[$ et :

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t)(1+at)}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{\frac{1-a}{1+a}}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\left[-\arccos x\right]_{\frac{1-a}{1+a}}^1 = \frac{1}{\sqrt{a}}\arccos\left(\frac{1-a}{1+a}\right).$$

Si $-1<a<0$, on a $\dfrac{1-a}{1+a}>1$ et :

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t)(1+at)}} = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\int_1^{\frac{1-a}{1+a}} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\left[\operatorname{argch} x\right]_1^{\frac{1-a}{1+a}} = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\operatorname{argch}\left(\frac{1-a}{1+a}\right).$$

Remarquons que la fonction *argch* n'est pas au programme…

Finalement :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t)(1+at)}} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{|a|}}\operatorname{argch}\left(\dfrac{1-a}{1+a}\right) & \text{quand } -1<a<0 \\ 2 & \text{quand } a=0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{a}}\arccos\left(\dfrac{1-a}{1+a}\right) & \text{quand } a>0 \end{cases}}$$

g. L'intégrale $\int_0^1 t\left\lfloor \frac{1}{t}\right\rfloor dt$ est impropre en 0.

Commençons par effectuer le changement de variable $x=\frac{1}{t}$. On obtient :

$$\int_0^1 t\left\lfloor \frac{1}{t}\right\rfloor dt = \int_1^{+\infty}\frac{\lfloor x\rfloor}{x^3}dx .$$

Or, pour tout $x\in[1,+\infty[$, $0<\lfloor x\rfloor\le x$, donc $0<\frac{\lfloor x\rfloor}{x^3}\le\frac{1}{x^2}$ et, comme $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ converge, $\int_1^{+\infty}\frac{\lfloor x\rfloor}{x^3}dx$ converge.

On a alors :

$$\int_1^{+\infty}\frac{\lfloor x\rfloor}{x^3}dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_n^{n+1}\frac{\lfloor x\rfloor}{x^3}dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_n^{n+1}\frac{n}{x^3}dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\left[-\frac{n}{2x^2}\right]_n^{n+1}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}n\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$$

Et ainsi :

$$\boxed{\int_0^1 t\left\lfloor \frac{1}{t}\right\rfloor dt=\frac{\pi^2}{12}}$$

h. L'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^2)(1+t^\lambda)}$ est impropre en $+\infty$ et en 0 quand $\lambda<0$.

Si $\lambda>0$, on a $\frac{1}{(1+t^2)(1+t^\lambda)}\underset{t\to+\infty}{\sim}\frac{1}{t^{2+\lambda}}$ et $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^{2+\lambda}}$ converge (car $2+\lambda>1$), donc $\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^2)(1+t^\lambda)}$ converge.

Si $\lambda=0$, on a $\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^2)(1+t^\lambda)}=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{4}$, donc $\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^2)(1+t^\lambda)}$ converge.

Si $\lambda<0$, on a

- $\frac{1}{(1+t^2)(1+t^\lambda)}\underset{t\to+\infty}{\sim}\frac{1}{t^2}$ et $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^2}$ converge, donc $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^2)(1+t^\lambda)}$ converge ;
- $\frac{1}{(1+t^2)(1+t^\lambda)}\underset{t\to 0}{\sim}t^{-\lambda}$ et $\int_0^1 t^{-\lambda}dt$ converge (car $-\lambda>0$), donc $\int_0^1\frac{dt}{(1+t^2)(1+t^\lambda)}$ converge.

Ainsi, $\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^2)(1+t^\lambda)}$ converge.

Effectuons le changement de variable $x=\dfrac{1}{t}$. On obtient :

$$\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^2)(1+t^\lambda)}=\int_0^{+\infty}\frac{x^\lambda dx}{(1+x^2)(1+x^\lambda)}.$$

On a alors :

$$2\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^2)(1+t^\lambda)}=\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^2)(1+t^\lambda)}+\int_0^{+\infty}\frac{t^\lambda dt}{(1+t^2)(1+t^\lambda)}=\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{2}.$$

Et donc :

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^2)(1+t^\lambda)}=\frac{\pi}{4}}$$

i. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{(-1)^{E(x)}}{x}dx$ est impropre en $+\infty$.

Soit $X\geq 2$ et $N=E(X)\geq 2$, on a :

$$\begin{aligned}\int_1^X\frac{(-1)^{E(x)}}{x}dx&=\sum_{n=1}^{N-1}\int_n^{n+1}\frac{(-1)^{E(x)}}{x}dx+\int_N^X\frac{(-1)^{E(x)}}{x}dx=\sum_{n=1}^{N-1}(-1)^n\int_n^{n+1}\frac{dx}{x}+(-1)^N\int_N^X\frac{dx}{x}\\&=\sum_{n=1}^{N-1}(-1)^n\left[\ln(n+1)-\ln n\right]+(-1)^N\ln\left(\frac{X}{N}\right)=\sum_{n=1}^{N-1}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+(-1)^N\ln\left(\frac{X}{N}\right)\end{aligned}$$

On a $N\leq X<N+1$, donc $1\leq\dfrac{X}{N}<1+\dfrac{1}{N}$ et quand $X\to+\infty$, $N\to+\infty$, donc $\dfrac{X}{N}\to 1$ et ainsi :

$$\lim_{X\to+\infty}(-1)^N\ln\left(\frac{X}{N}\right)=0.$$

La série $\sum(-1)^n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ vérifie de CSSA, donc converge et ainsi :

$$\int_1^{+\infty}\frac{(-1)^{E(x)}}{x}dx=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Or, pour tout $N\in\mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{2N}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)&=\sum_{n=1}^{2N}(-1)^n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=\sum_{p=1}^{N}\ln\left(\frac{2p+1}{2p}\right)-\sum_{p=1}^{N}\ln\left(\frac{2p}{2p-1}\right)\\&=\sum_{p=1}^{N}\ln\left(\frac{2p+1}{2p}\right)+\sum_{p=1}^{N}\ln\left(\frac{2p-1}{2p}\right)\\&=\ln\left(\frac{3\times5\times\ldots\times(2N-1)\times(2N+1)}{2\times4\times\ldots\times(2N-2)\times(2N)}\right)+\ln\left(\frac{1\times3\times5\times\ldots\times(2N-1)\times(2N-1)}{2\times4\times\ldots\times(2N-2)\times(2N)}\right)\\&=\ln\left(\frac{(2N+1)!}{\left[2\times4\times\ldots\times(2N-2)\times(2N)\right]^2}\right)+\ln\left(\frac{(2N)!}{\left[2\times4\times\ldots\times(2N-2)\times(2N)\right]^2}\right)\\&=\ln\left(\frac{(2N+1)!}{\left(2^N N!\right)^2}\right)+\ln\left(\frac{(2N)!}{\left(2^N N!\right)^2}\right)=\ln\left((2N+1)\left[\frac{(2N)!}{2^{2N}(N!)^2}\right]^2\right)\end{aligned}$$

Et avec la formule de Stirling, on a :

$$(2N+1)\left[\frac{(2N)!}{2^{2N}(N!)^2}\right]^2 \underset{N\to+\infty}{\sim} (2N+1)\left[\frac{\sqrt{4\pi N}\left(\frac{2N}{e}\right)^{2N}}{2^{2N}\times 2\pi N\left(\frac{N}{e}\right)^{2N}}\right]^2 = \frac{2N+1}{\pi N} \to \frac{2}{\pi}.$$

Ainsi $\sum_{n=1}^{2N}(-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \to \ln\left(\frac{2}{\pi}\right)$, donc $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{2}{\pi}\right)$, d'où :

$$\boxed{\int_1^{+\infty}\frac{(-1)^{E(x)}}{x}dx = \ln\left(\frac{2}{\pi}\right)}$$

j. L'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{f(bx)-f(ax)}{x}dx$ est impropre en 0 et en $+\infty$.

On a $\frac{f(bx)}{x} = \underset{x\to+\infty}{o}\big(f(bx)\big)$ et comme *f* est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, alors $x \mapsto f(bx)$ l'est aussi et donc l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{f(bx)}{x}dx$ converge. De même, l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{f(ax)}{x}dx$ converge, et donc $\int_1^{+\infty}\frac{f(bx)-f(ax)}{x}dx$ converge.

Soit $h>0$. Comme $\int_h^{+\infty}\frac{f(ax)}{x}dx$ et $\int_h^{+\infty}\frac{f(bx)}{x}dx$ convergent, on peut écrire :

$$\int_h^{+\infty}\frac{f(bx)-f(ax)}{x}dx = \int_h^{+\infty}\frac{f(bx)}{x}dx - \int_h^{+\infty}\frac{f(ax)}{x}dx.$$

Et en posant $t = ax$, on obtient :

$$\int_h^{+\infty}\frac{f(ax)}{x}dx = \int_{ah}^{+\infty}\frac{f(t)}{t}dt.$$

On a le même résultat avec *b*, d'où :

$$\int_h^{+\infty}\frac{f(bx)-f(ax)}{x}dx = \int_{bh}^{+\infty}\frac{f(t)}{t}dt - \int_{ah}^{+\infty}\frac{f(t)}{t}dt = \int_{bh}^{ah}\frac{f(t)}{t}dt.$$

La fonction *f* est continue en 0, donc pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\alpha>0$ tel que pour tout $x\in[0,\alpha]$, on a :

$$f(0)-\varepsilon \le f(x) \le f(0)+\varepsilon.$$

Alors, pour tout $h\in\left[0,\frac{\alpha}{b}\right]$, on a $0\le ah<bh\le\alpha$, donc pour tout $t\in[ah,bh]$, $f(0)-\varepsilon\le f(t)\le f(0)+\varepsilon$, d'où :

$$\int_{ah}^{bh}\frac{f(0)-\varepsilon}{t}dt \le \int_{ah}^{bh}\frac{f(t)}{t}dt \le \int_{ah}^{bh}\frac{f(0)+\varepsilon}{t}dt \quad\Leftrightarrow\quad \big(f(0)-\varepsilon\big)\int_{ah}^{bh}\frac{dt}{t} \le \int_{ah}^{bh}\frac{f(t)}{t}dt \le \big(f(0)+\varepsilon\big)\int_{ah}^{bh}\frac{dt}{t}.$$

Or :

$$\int_{ah}^{bh}\frac{dt}{t} = [\ln t]_{ah}^{bh} = \ln(bh)-\ln(ah) = \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Comme $\ln\left(\frac{b}{a}\right)>0$, on obtient :

$$f(0)-\varepsilon \le \frac{1}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\int_{ah}^{bh}\frac{f(t)}{t}dt \le f(0)+\varepsilon.$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha' = \dfrac{\alpha}{b} > 0$ tel que pour tout $h \in [0, \alpha']$:

$$f(0) - \varepsilon \le \frac{1}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \int_{ah}^{bh} \frac{f(t)}{t}\, dt \le f(0) + \varepsilon.$$

Ceci prouve que $\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{1}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \int_{ah}^{bh} \frac{f(t)}{t}\, dt = f(0)$, soit :

$$\lim_{h \to 0} \int_h^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x}\, dx = -f(0) \ln\left(\frac{b}{a}\right) = f(0) \ln\left(\frac{a}{b}\right).$$

Ainsi :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x}\, dx \text{ converge et } \int_0^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x}\, dx = f(0) \ln\left(\frac{a}{b}\right).}$$

k. L'intégrale $\displaystyle \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\, dt$ est impropre en 0 et en 1.

Or, $\displaystyle \lim_{t \to 0} \frac{t-1}{\ln t} = 0$ et $\displaystyle \lim_{t \to 1} \frac{t-1}{\ln t} = 1$, donc la fonction $t \mapsto \dfrac{t-1}{\ln t}$ est continue sur $]0,1[$ (quotient) et se prolonge par continuité en 0 et 1. Ainsi, l'intégrale $\displaystyle \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\, dt$ converge. Pour tout $x \in\,]0,1[$, on a :

$$\int_0^x \frac{t-1}{\ln t}\, dt = \int_0^x \frac{t}{\ln t}\, dt - \int_0^x \frac{1}{\ln t}\, dt = \int_0^x \frac{1}{\ln(t^2)} (2t dt) - \int_0^x \frac{1}{\ln t}\, dt \underset{u=t^2}{=} \int_0^{x^2} \frac{1}{\ln u}\, du - \int_0^x \frac{1}{\ln t}\, dt$$

Donc :

$$\int_0^x \frac{t-1}{\ln t}\, dt = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\, dt.$$

Pour tout $x \in\,]0,1[$ et tout $t \in [x^2, x] \subset\,]0,1[$, on a $t \ln t < 0$ et :

$$x^2 \le t \le x \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{t \ln t} \le \frac{t}{t \ln t} \le \frac{x^2}{t \ln t} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{t \ln t} \le \frac{1}{\ln t} \le \frac{x^2}{t \ln t}.$$

Donc :

$$\int_{x^2}^x \frac{x^2}{t \ln t}\, dt \le \int_{x^2}^x \frac{1}{\ln t}\, dt \le \int_{x^2}^x \frac{x}{t \ln t}\, dt \quad \Leftrightarrow \quad \int_x^{x^2} \frac{x}{t \ln t}\, dt \le \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\, dt \le \int_x^{x^2} \frac{x^2}{t \ln t}\, dt$$

$$\Leftrightarrow \quad x \int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln t} \le \int_0^x \frac{t-1}{\ln t}\, dt \le x^2 \int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln t}$$

Or :

$$\int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln t} = \left[\ln(\ln t)\right]_x^{x^2} = \ln(\ln x^2) - \ln(\ln x) = \ln(2 \ln x) - \ln(\ln x) = \ln 2 + \ln x - \ln x = \ln 2.$$

Et ainsi, pour tout $x \in\,]0,1[$:

$$x \ln 2 \le \int_0^x \frac{t-1}{\ln t}\, dt \le x^2 \ln 2.$$

En passant à la limite quand x tend vers 1, on obtient :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\, dt = \ln 2}$$

Exercice 3

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^3+x^2}$ est définie et continue (car rationnelle) sur $[0,1]$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^3+x^2}$ est défini et F est bien définie sur $D = \mathbb{R}_+^*$.

Quand $x \to +\infty$, on a $\dfrac{1}{t^3+x^2} \sim \dfrac{1}{x^2}$ quel que soit $t \in [0,1]$. Nous conjecturons alors que $F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{x^2} = \frac{1}{x^2}$.

Pour prouver cela, il faut prouver que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2F(x) = 1$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$x^2F(x) - 1 = \int_0^1 \frac{dt}{t^3+x^2} - 1 = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{t^3+x^2} - 1\right)dt = -\int_0^1 \frac{t^3}{t^3+x^2}\,dt .$$

Et, pour tout $t \in [0,1]$, $0 \le \dfrac{t^3}{t^3+x^2} \le \dfrac{t^3}{x^2}$, donc :

$$\left|x^2F(x) - 1\right| = \int_0^1 \frac{t^3}{t^3+x^2}\,dt \le \int_0^1 \frac{t^3}{x^2}\,dt = \frac{1}{x^2}\int_0^1 t^3 dt = \frac{1}{4x^2} .$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{4x^2} = 0$, on a par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2F(x)-1\right) = 0$ et ainsi :

$$\boxed{F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}}$$

Remarquons que cet exercice n'est pas sur les intégrales généralisées, donc est un exercice de 1ère année.

2) La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(\arctan t)^2}$ est définie et continue (inverse) sur $D = \mathbb{R}_+^*$, donc on peut l'intégrer entre x et 1 quel que soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et ainsi, F est bien définie sur $D = \mathbb{R}_+^*$.

La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^2} - \dfrac{1}{(\arctan t)^2}$ est définie et continue (différence) sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f(t) = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{(\arctan t)^2} = \frac{(\arctan t)^2 - t^2}{t^2(\arctan t)^2} .$$

Et :

$$\left.\begin{aligned} (\arctan t)^2 - t^2 = \left(t - \frac{1}{3}t^3 + \underset{0}{o}(t^3)\right)^2 - t^2 \underset{0}{\sim} -\frac{2}{3}t^4 \\ t^2(\arctan t)^2 \underset{0}{\sim} t^4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad f(t) \xrightarrow[t\to 0]{} -\frac{2}{3} .$$

On peut alors prolonger *f* par continuité en 0, et ainsi prolongée, *f* est continue sur le segment $[0,1]$, donc peut y être intégrée. Ainsi, *f* est intégrable sur $]0,1]$. On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$F(x) = \int_x^1 \frac{dt}{(\arctan t)^2} = \int_x^1 \left(\frac{1}{t^2} - f(t)\right)dt = \int_x^1 \frac{dt}{t^2} - \int_x^1 f(t)dt = \frac{1}{x} - 1 - \int_x^1 f(t)dt .$$

Comme $x \mapsto -1 - \displaystyle\int_x^1 f(t)dt$ admet une limite finie en 0^+ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$, on a :

$$\boxed{F(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}}$$

3) On a $t^2e^{-t^2} \to 0$ quand $t \to +\infty$, donc $e^{-t^2} = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $\int_x^{+\infty} e^{-t^2}dt$ converge pour tout réel x. Ainsi, F est bien définie sur $D = \mathbb{R}$.

Pour tous $x, X \in \mathbb{R}_+^*$, on a, en intégrant par parties :

$$\int_x^X e^{-t^2}dt = \int_x^X \left(-\frac{1}{2t}\right)(-2t)e^{-t^2}dt = \left[\left(-\frac{1}{2t}\right)e^{-t^2}\right]_x^X - \int_x^X \frac{1}{2t^2}e^{-t^2}dt = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \frac{e^{-X^2}}{2X} - \int_x^X \frac{1}{2t^2}e^{-t^2}dt$$

Comme $\int_x^{+\infty} e^{-t^2}dt$ converge et $\frac{e^{-X^2}}{2X} \to 0$ quand $t \to +\infty$, on peut passer à la limite dans la relation ci-dessus, ce qui donne :

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \int_x^{+\infty} \frac{1}{2t^2}e^{-t^2}dt.$$

On peut recommencer. Pour tous $x, X \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\int_x^X \frac{1}{2t^2}e^{-t^2}dt = \int_x^X \left(-\frac{1}{4t^3}\right)(-2t)e^{-t^2}dt = \left[-\frac{e^{-t^2}}{4t^3}\right]_x^X - \int_x^X \frac{3}{4t^4}e^{-t^2}dt = \frac{e^{-x^2}}{4x^3} - \frac{e^{-X^2}}{4X^3} - \frac{3}{4}\int_x^X \frac{e^{-t^2}}{t^4}dt.$$

Donc :

$$\int_x^{+\infty} \frac{1}{2t^2}e^{-t^2}dt = \frac{e^{-x^2}}{4x^3} - \frac{3}{4}\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^4}dt.$$

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$F(x) = e^{x^2}\left(\frac{e^{-x^2}}{2x} - \frac{e^{-x^2}}{4x^3} + \frac{3}{4}\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^4}dt\right) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{4x^3} + \frac{3}{4}e^{x^2}\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^4}dt.$$

Enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $t \geq x$, on a $0 < e^{-t^2} \leq e^{-x^2}$, donc :

$$0 \leq e^{x^2}\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^4}dt \leq \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^4} = \frac{1}{3x^3} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{4x^3} \leq F(x) - \frac{1}{2x} \leq 0 \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{2x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Donc :

$$\boxed{F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}}$$

4) Pour tous $x, X \in \mathbb{R}_+^*$, on a, en intégrant par parties :

$$\int_x^X \frac{\cos t}{t}dt = \left[\frac{\sin t}{t}\right]_x^X + \int_x^X \frac{\sin t}{t^2}dt = \frac{\sin X}{X} - \frac{\sin x}{x} + \int_x^X \frac{\sin t}{t^2}dt.$$

Or, $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\sin t}{t} = 0$ et $\frac{\sin t}{t^2} = \underset{t\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, donc $\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}dt$ converge et ainsi, $\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}dt$ converge.

La fonction F est donc bien définie sur $D = \mathbb{R}_+^*$.

Faisons intégration par parties. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\int_x^1 \frac{\cos t}{t}dt = \left[(\ln t)(\cos t)\right]_x^1 + \int_x^1 (\ln t)(\sin t)dt = -(\ln x)(\cos x) + \int_x^1 (\ln t)(\sin t)dt.$$

Or, $(\ln t)(\sin t) \underset{t\to 0}{\sim} t\ln t$ donc $\lim\limits_{t\to 0}(\ln t)(\sin t) = \lim\limits_{t\to 0} t\ln t = 0$ et la fonction $t \mapsto (\ln t)(\sin t)$ peut être prolongée par continuité en 0, ce qui permet de conclure que $\int_0^1 (\ln t)(\sin t)dt$ converge.

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt = \int_x^1 \frac{\cos t}{t} dt + \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt = -(\ln x)(\cos x) + \int_x^1 (\ln t)(\sin t)dt + \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt .$$

Or, $\lim\limits_{x\to 0}\left[-(\ln x)(\cos x)\right] = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0}\left[\int_x^1 (\ln t)(\sin t)dt + \int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{t}dt\right] = \int_0^1 (\ln t)(\sin t)dt + \int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{t}dt$, donc :

$$F(x) \underset{x\to 0}{\sim} -(\ln x)(\cos x) .$$

Enfin, comme $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$, on a :

$$\boxed{F(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln x}$$

Exercice 4

1) Comme *f* est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge et :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)dt = \lim_{x\to+\infty}\int_0^{x+1} f(t)dt = \int_0^{+\infty} f(t)dt .$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\int_x^{x+1} f(t)dt = \int_0^{x+1} f(t)dt - \int_0^x f(t)dt$, donc :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+1} f(t)dt = \lim_{x\to+\infty}\left[\int_0^{x+1} f(t)dt - \int_0^x f(t)dt\right] = \int_0^{+\infty} f(t)dt - \int_0^{+\infty} f(t)dt .$$

Soit :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+1} f(t)dt = 0}$$

2) Comme *f* est continue en 0, on a $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$ et donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha \in]0,1]$ tel que pour tout $t \in [0,\alpha]$, on a $|f(t) - f(0)| \le \varepsilon$, d'où pour tout $x \in]0,\alpha]$:

$$\left| x\left(\int_x^\alpha \frac{f(t)}{t^2}dt - \int_x^\alpha \frac{f(0)}{t^2}dt\right)\right| = \left| x\int_x^\alpha \frac{f(t)-f(0)}{t^2}dt\right| \le x\int_x^\alpha \frac{|f(t)-f(0)|}{t^2}dt \le x\int_x^\alpha \frac{\varepsilon}{t^2}dt = \varepsilon\left(1 - \frac{x}{\alpha}\right) \le \varepsilon .$$

Or, pour tout $x \in]0,\alpha]$:

$$\begin{aligned} x\int_x^1 \frac{f(t)}{t^2}dt - f(0) &= x\int_x^1 \frac{f(t)}{t^2}dt - x\int_x^1 \frac{f(0)}{t^2}dt + x\int_x^1 \frac{f(0)}{t^2}dt - f(0) \\ &= x\int_x^\alpha \frac{f(t)}{t^2}dt + x\int_\alpha^1 \frac{f(t)}{t^2}dt - x\int_x^\alpha \frac{f(0)}{t^2}dt - x\int_\alpha^1 \frac{f(0)}{t^2}dt + x\int_x^1 \frac{f(0)}{t^2}dt - f(0) \\ &= x\left(\int_x^\alpha \frac{f(t)}{t^2}dt - \int_x^\alpha \frac{f(0)}{t^2}dt\right) + x\left[\int_\alpha^1 \frac{f(t)-f(0)}{t^2}dt - f(0)\right] \end{aligned}$$

En posant $A=\int_\alpha^1 \frac{f(t)-f(0)}{t^2}dt-f(0)$ (qui est indépendant de *x*), on a $\lim_{x\to 0} Ax=0$, donc il existe $\alpha'\in\,]0,1]$ tel que pour tout $x\in[0,\alpha']$, on a $|Ax|\le\varepsilon$.

Alors, pour tout $x\in\,]0,\alpha'']$ avec $\alpha''=\min(\alpha,\alpha')\in\,]0,1]$, on a :

$$\left|x\int_x^1\frac{f(t)}{t^2}dt-f(0)\right|=\left|x\left(\int_x^\alpha\frac{f(t)}{t^2}dt-\int_x^\alpha\frac{f(0)}{t^2}dt\right)+Ax\right|\le\left|x\left(\int_x^\alpha\frac{f(t)}{t^2}dt-\int_x^\alpha\frac{f(0)}{t^2}dt\right)\right|+|Ax|\le 2\varepsilon.$$

Finalement, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\alpha''\in\,]0,1]$ tel que pour tout $x\in\,]0,\alpha'']$, $\left|x\int_x^1\frac{f(t)}{t^2}dt-f(0)\right|\le 2\varepsilon$.

Ceci prouve que :

$$\boxed{\lim_{x\to 0} x\int_x^1\frac{f(t)}{t^2}dt=f(0)}$$

3) On a vu dans la question 1 que $\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)dt=\int_0^{+\infty}f(t)dt$.

On a aussi $\lim_{x\to+\infty}\int_0^{2x}f(t)dt=\int_0^{+\infty}f(t)dt$ et donc, pour $g(x)=\int_x^{2x}f(t)dt$, on a :

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\int_0^{2x}f(t)dt-\int_0^x f(t)dt\right]=\int_0^{+\infty}f(t)dt-\int_0^{+\infty}f(t)dt=0.$$

Or, *f* est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, donc pour tout $x\in\mathbb{R}_+$:

$$\forall\, t\in[x,2x],\ f(2x)\le f(t)\le f(x)\quad\Rightarrow\quad\int_x^{2x}f(2x)dt\le g(x)\le\int_x^{2x}f(x)dt.$$

Ceci donne pour tout $x\in\mathbb{R}_+$:

$$xf(2x)\le g(x)\le xf(x)\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}g(x)\le xf(x)\\ 2xf(2x)\le 2g(x)\end{cases}$$

En remplaçant *x* par $\frac{x}{2}$ dans la seconde inégalité, on obtient pour tout $x\in\mathbb{R}_+$:

$$g(x)\le xf(x)\le 2g\left(\frac{x}{2}\right).$$

Et $\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}2g\left(\frac{x}{2}\right)=0$, donc d'après le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}xf(x)=0}$$

4) Si *f* est nulle, alors *u* et *v* le sont aussi et le résultat est évident. On suppose *f* non nulle dans ce qui suit.

Posons $F(x)=\int_1^x f(t)dt$.

Comme *f* est continue sur $[1,+\infty[$, *F* est de classe C^1 sur cet intervalle.

De plus, comme *f* est positive sur $[1,+\infty[$, *F* est croissante et positive sur $[1,+\infty[$.

Enfin, $F(1)=0$ et, comme *f* est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, l'intégrale $I=\int_1^{+\infty}f(t)dt$ converge, et $\lim_{x\to+\infty}F(x)=I$, avec $I>0$ car *f* est non nulle.

Pour tout $x\in[1,+\infty[$, $u(x)=\dfrac{F(x)}{x^2}$ et $v(x)=\dfrac{f(x)}{x}$.

Donc, *u* et *v* sont positives, *u* est de classe C^1 et *v* est continue sur $[1,+\infty[$, en tant que quotients respectifs de fonctions qui le sont.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=I>0$, on a $u(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{I}{x^2}$ est comme $x\mapsto\dfrac{I}{x^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, *u* l'est aussi.

Pour tout $x\in[1,+\infty[$, on a $F(x)=x^2u(x)$, donc :

$$v(x)=\frac{f(x)}{x}=\frac{F'(x)}{x}=\frac{2x\,u(x)+x^2u'(x)}{x}=2u(x)+x\,u'(x)\,.$$

Et, comme *u* est de classe C^1 sur $[1,+\infty[$, on peut intégrer par parties :

$$\int_1^x t\,u'(t)dt=\big[t\,u(t)\big]_1^x-\int_1^x u(t)dt=xu(x)-u(1)-\int_1^x u(t)dt=\frac{F(x)}{x}-\int_1^x u(t)dt\,.$$

Alors :

$$\int_1^x v(t)dt=\int_1^x\big[2u(t)+t\,u'(t)\big]dt=2\int_1^x u(t)dt+\int_1^x t\,u'(t)dt=2\int_1^x u(t)dt+\frac{F(x)}{x}-\int_1^x u(t)dt=\int_1^x u(t)dt+\frac{F(x)}{x}.$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=I$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)}{x}=0$ et finalement, on a bien :

$$\boxed{u \text{ et } v \text{ sont intégrables sur } [1,+\infty[\text{ et } \int_1^{+\infty}u=\int_1^{+\infty}v\,.}$$

Exercice 5

1) Les solutions de l'équation homogène $(H): y'-y=0$ associée à (*E*) sont les fonctions $x\mapsto ke^x$ avec *k* constante. Par la méthode de variation de la constante, on cherche une solution particulière de la forme $x\mapsto k(x)e^x$ où *k* est ici une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On a alors pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$k'(x)e^x+k(x)e^x-k(x)e^x=\ln x \quad\Leftrightarrow\quad k'(x)=e^{-x}\ln x\,.$$

On peut prendre $k(x)=\int_1^x e^{-t}\ln t\,dt$ et une solution particulière est ainsi : $x\mapsto e^x\int_1^x e^{-t}\ln t\,dt$.

Finalement :

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ sont les fonctions } x\mapsto e^x\left(k+\int_1^x e^{-t}\ln t\,dt\right) \text{ avec } k \text{ constante.}}$$

2) On a $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(t^2e^{-t}\ln t\right)=0$, donc $e^{-t}\ln t=\underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et ainsi, $\int_1^{+\infty}e^{-t}\ln t\,dt$ converge.

On peut donc prendre les solutions de (*E*) sous la forme $f_a: x\mapsto e^x\left(a-\int_x^{+\infty}e^{-t}\ln t\,dt\right)$ où *a* est une constante.

On a alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(a-\int_x^{+\infty}e^{-t}\ln t\,dt\right)=a$, donc si $a\neq0$, on a $f_a(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}ae^x$ et f_a n'est pas bornée.

La seule solution bornée éventuelle est donc $f_0: x\mapsto -e^x\int_x^{+\infty}e^{-t}\ln t\,dt$, que nous appellerons juste *f* pour simplifier.

On a $e^{-t}\ln t \underset{t\to 0}{\sim} \ln t$. Comme $\int_0^1 \ln t\,dt$ converge, donc $\int_0^1 e^{-t}\ln t\,dt$ converge aussi et *f* admet une limite finie en 0, donc est bornée au voisinage de 0. Ainsi, *f* est bornée si et seulement si elle l'est au voisinage de + ∞.

Pour tous $x, X \in \mathbb{R}_+^*$, on a en intégrant par parties :

$$\int_x^X e^{-t}\ln t\,dt = \left[-e^{-t}\ln t\right]_x^X + \int_x^X \frac{e^{-t}}{t}dt = e^{-x}\ln x - e^{-X}\ln X + \int_x^X \frac{e^{-t}}{t}dt.$$

Et quand $X \to +\infty$, on a $e^{-X}\ln X \to 0$, donc $\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt$ converge et on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\int_x^{+\infty} e^{-t}\ln t\,dt = e^{-x}\ln x + \int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt.$$

En recommençant, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\int_x^{+\infty} e^{-t}\ln t\,dt = e^{-x}\ln x + \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^2}dt.$$

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f(x) = -e^x\int_x^{+\infty} e^{-t}\ln t\,dt = -\ln x - \frac{1}{x} + e^x\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^2}dt.$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $t \in [x, +\infty[$, on a :

$$\forall t \in [x,+\infty[,\ 0 < \frac{e^{-t}}{t^2} \le \frac{e^{-x}}{t^2} \quad \Rightarrow \quad 0 \le \int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^2}dt \le \int_x^{+\infty}\frac{e^{-x}}{t^2}dt = \frac{e^{-x}}{x} \quad \Rightarrow \quad 0 \le e^x\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^2}dt \le \frac{1}{x}.$$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^2}dt = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$, donc :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)+\ln x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x} + e^x\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^2}dt\right) = 0$$

Ceci implique que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et donc que *f* n'est pas bornée.

Finalement :

$$\boxed{\text{L'équation différentielle } (E) \text{ n'admet pas de solution bornée.}}$$

Exercice 6

Ici, f^2, $(f')^2$ et $(f'')^2$ sont toutes les trois continues sur $\mathbb{R}$.

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \le b$. On peut appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz à $|f|$ et $|f''|$ sur $[a,b]$, ce qui donne :

$$\left(\int_a^b |f''f|\right)^2 \le \left(\int_a^b |f|^2\right)\left(\int_a^b |f''|^2\right) \le \left(\int_{\mathbb{R}} f^2\right)\left(\int_{\mathbb{R}} (f'')^2\right) \qquad \textbf{(1)}.$$

Donc :

$f''f$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Par ailleurs, une intégration par parties donne pour tous $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^b (f')^2 = [f'f]_a^b - \int_a^b f''f \qquad \textbf{(2)}.$$

En particulier, pour tout $x\in\mathbb{R}_+$:

$$\int_0^x (f')^2 = f'(x)f(x) - f'(0)f(0) - \int_0^x f''f.$$

Comme la fonction $(f')^2$ est positive, la fonction $x\mapsto\int_0^x (f')^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Si elle n'est pas majorée, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x (f')^2 = +\infty$. Or, $\int_0^x f''f$ admet une limite finie en $+\infty$ (car $f''f$ est intégrable sur $\mathbb{R}$), donc on a aussi $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)f(x) = +\infty$.

Dans ce cas, il existe $a\in\mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x\in[a,+\infty[$, on a $2f'(x)f(x)\geq 1$, ce qui implique :

$$\int_a^x 2f'(t)f(t)dt \geq x-a \quad\Leftrightarrow\quad (f)^2(x)\geq x-a+(f)^2(a).$$

Et donc, pour tout $x\in[a,+\infty[$, $\int_a^x (f)^2 \geq \frac{1}{2}x^2+\alpha x+\beta$ ce qui contredit la convergence de $\int_a^{+\infty} f^2$.

Ainsi, $x\mapsto\int_0^x (f')^2$ non majorée mène à une absurdité, donc elle est majorée et, d'après le théorème de la limite monotone, elle admet une limite finie en $+\infty$, autrement dit :

$$\int_0^{+\infty} (f')^2 \text{ converge.}$$

Ceci prouve aussi que $f'f$ admet une limite finie L en $+\infty$, donc pour tout $\varepsilon>0$, il existe $A\in\mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x\in[A,+\infty[$, $|f'(x)f(x)-L|\leq\varepsilon$.

Alors, pour tout $x\in[A,+\infty[$:

$$(L-\varepsilon)(x-A)\leq\int_A^x f'(t)f(t)dt\leq(L+\varepsilon)(x-A) \quad\Rightarrow\quad 2(L-\varepsilon)x+C_-\leq f(x)^2\leq 2(L+\varepsilon)x+C_+.$$

où C_- et C_+ sont des constantes.

- Si $L>0$, alors avec $\varepsilon=\frac{L}{2}>0$, on obtient pour tout $x\in[A,+\infty[$, $f(x)^2\geq Lx+C_-$, ce qui contredit la convergence de $\int_A^{+\infty} f^2$.
- Si $L<0$, alors avec $\varepsilon=-\frac{L}{2}>0$, on obtient pour tout $x\in[A,+\infty[$, $f(x)^2\leq Lx+C_+$, et donc $f(x)^2<0$ pour x assez grand, ce qui est absurde.

Ainsi, $L\neq 0$ mène toujours à une absurdité, donc $L=0$, soit :

$$\lim_{+\infty} f'f = 0.$$

En considérant la fonction $x\mapsto\int_x^0 (f')^2$ qui est décroissante sur $\mathbb{R}_-$, on montre de la même façon que $\int_{-\infty}^0 (f')^2$ converge et $\lim\limits_{-\infty} f'f=0$.

Finalement, $\int_{-\infty}^{+\infty} (f')^2$ converge et, comme $(f')^2$ est positive sur $\mathbb{R}$, ceci revient à :

$$\boxed{(f')^2 \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}.}$$

Alors, en faisant $a \to -\infty$ et $b \to +\infty$ dans **(1)** et **(2)**, on obtient, avec $\lim\limits_{-\infty} f'f = \lim\limits_{+\infty} f'f = 0$:

$$\left(\int_{\mathbb{R}} f''f\right)^2 \le \left(\int_{\mathbb{R}} f^2\right)\left(\int_{\mathbb{R}} (f'')^2\right) \text{ et } \int_{\mathbb{R}} (f')^2 = -\int_{\mathbb{R}} f''f .$$

Ceci donne immédiatement :

$$\boxed{\left(\int_{\mathbb{R}} (f')^2\right)^2 \le \left(\int_{\mathbb{R}} f^2\right)\left(\int_{\mathbb{R}} (f'')^2\right)}$$

Exercice 7

1) Avec $f(x) = \ln x$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$R_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln k - \ln n .$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall\, t \in [k, k+1],\ \ln k \le \ln t \le \ln(k+1) \quad \Rightarrow \quad \ln k \le \int_k^{k+1} \ln t\, dt \le \ln(k+1)$$

En sommant de $k = 1$ à $k = n$, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} \ln k \le \int_1^{n+1} \ln t\, dt \le \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} \ln k \le \int_1^{n+1} \ln t\, dt \le \sum_{k=2}^{n+1} \ln k \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} \ln k \le \int_1^{n+1} \ln t\, dt \le \sum_{k=1}^{n+1} \ln k .$$

L'inégalité de droite reste vraie pour $n = 0$ (soit $n+1 = 1$), ce qui nous permet d'écrire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_1^{n} \ln t\, dt \le \sum_{k=1}^{n} \ln k \le \int_1^{n+1} \ln t\, dt \le \int_1^{n} \ln t\, dt + \int_n^{n+1} \ln t\, dt \le \int_1^{n} \ln t\, dt + \ln(n+1) .$$

Avec $\int_1^{n} \ln t\, dt = n\ln n - n + 1$, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$n\ln n - n + 1 \le \sum_{k=1}^{n} \ln k \le n\ln n - n + 1 + \ln(n+1) .$$

Et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$-1 + \frac{1}{n} \le R_n(f) \le -1 + \frac{1}{n} + \frac{\ln(n+1)}{n} .$$

Enfin, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-1 + \frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(-1 + \frac{1}{n} + \frac{\ln(n+1)}{n}\right) = -1$, donc d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n\to+\infty} R_n(f) = -1 .$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\int_x^1 \ln t\, dt = x - x\ln x - 1$, donc $\int_0^1 \ln t\, dt = -1$ et ainsi, on a :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} R_n(f) = \int_0^1 f(t)dt}$$

2) Remarquons que la fonction $-f$ vérifie les mêmes hypothèses que f sur $]0,1]$ (continuité, monotonie et $\lim\limits_{x\to 0} x(-f(x)) = \lim\limits_{x\to 0} x f(x) = 0$). De plus, $R_n(-f) = -R_n(f)$ et $\int_0^1 (-f(t))\, dt = -\int_0^1 f(t)dt$, donc, quitte à changer *f* en $-f$, on peut supposer que *f* est croissante sur $]0,1]$.

Alors, on a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $n\geq 2$ et $k\in[\![1,n-1]\!]$:

$$\forall\, t\in[k,k+1],\ f\left(\frac{k}{n}\right)\leq f\left(\frac{t}{n}\right)\leq f\left(\frac{k+1}{n}\right)\quad\Rightarrow\quad f\left(\frac{k}{n}\right)\leq\int_k^{k+1} f\left(\frac{t}{n}\right)dt\leq f\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

En sommant de $k=1$ à $k=n-1$, on obtient pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $n\geq 2$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\leq\int_1^n f\left(\frac{t}{n}\right)dt\leq\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right)\quad\Rightarrow\quad\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)-f(1)\leq\int_1^n f\left(\frac{t}{n}\right)dt\leq\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right).$$

Soit pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $n\geq 2$:

$$R_n(f)-\frac{f(1)}{n}\leq\frac{1}{n}\int_1^n f\left(\frac{t}{n}\right)dt\leq R_n(f)-\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)\quad\Leftrightarrow\quad\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}\int_1^n f\left(\frac{t}{n}\right)dt\leq R_n(f)\leq\frac{f(1)}{n}+\frac{1}{n}\int_1^n f\left(\frac{t}{n}\right)dt.$$

Or, en posant $u=\dfrac{t}{n}$, on obtient $\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_1^n f\left(\frac{t}{n}\right)dt=\int_{1/n}^1 f(u)du$ et donc, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $n\geq 2$:

$$\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)+\int_{1/n}^1 f(u)du\leq R_n(f)\leq\frac{f(1)}{n}+\int_{1/n}^1 f(u)du.$$

Enfin, comme $\lim\limits_{x\to 0} x f(x)=0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{1}{n}\right)=0$, donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)+\int_{1/n}^1 f(u)du\right]=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{f(1)}{n}+\int_{1/n}^1 f(u)du\right]=\int_0^1 f(u)du.$$

Et à l'aide du théorème des gendarmes, on obtient immédiatement :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} R_n(f)=\int_0^1 f(u)du}$$

Exercice 8

1) Soient $a,b\in\mathbb{R}$. On a $\left(|a|-|b|\right)^2=|a|^2-2|a||b|+|b|^2=a^2+b^2-2|ab|\geq 0$, donc :

$$\boxed{|ab|\leq\frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)}$$

2) On a $L^2(I,\mathbb{R})\subset\mathcal{CM}(I,\mathbb{R})$ et la fonction nulle appartient à $L^2(I,\mathbb{R})$, donc $L^2(I,\mathbb{R})$ n'est pas vide.

Soient $f,g\in L^2(I,\mathbb{R})$ et $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. D'après la question 1, on a $|fg|\leq\dfrac{1}{2}\left(f^2+g^2\right)$ et :

$$(\lambda f+\mu g)^2=\left(|\lambda f+\mu g|\right)^2\leq\left(|\lambda||f|+|\mu||g|\right)^2=\lambda^2 f^2+\mu^2 g^2+2|\lambda\mu||fg|\leq\lambda^2 f^2+\mu^2 g^2+|\lambda\mu|\left(f^2+g^2\right).$$

Donc :

$$(\lambda f+\mu g)^2\leq\left(\lambda^2+|\lambda\mu|\right)f^2+\left(\mu^2+|\lambda\mu|\right)g^2.$$

Et, comme $\int_I f^2$ et $\int_I g^2$ convergent, $\int_I(\lambda f+\mu g)^2$ converge et $\lambda f+\mu g\in L^2(I,\mathbb{R})$.

Ainsi, $L^2(I,\mathbb{R})$ est stable par combinaisons linéaires, donc $L^2(I,\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{CM}(I,\mathbb{R})$, ce qui permet de conclure que :

$$\boxed{\left(L^2(I,\mathbb{R}),+,\cdot\right)\text{ est un }\mathbb{R}\text{-espace vectoriel.}}$$

3) Notons $E_2 = L^2(I,\mathbb{R}) \cap C^0(I,\mathbb{R})$ et $\varphi : (f,g) \mapsto \int_I fg$.

- Soient $f, g \in E_2$. On a vu que $|fg| \leq \frac{1}{2}(f^2+g^2)$. Comme f^2 et g^2 sont intégrables sur *I*, $\frac{1}{2}(f^2+g^2)$ l'est aussi, et par comparaison, fg est intégrable sur *I*. Donc, φ est bien définie sur E_2 et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- L'application φ est symétrique (car $fg = gf$) et bilinéaire (par linéarité de l'intégrale).

  De plus, comme pour tout $f \in E_2$, $f^2 \geq 0$, on a $\varphi(f,f) = \int_I f^2 \geq 0$ par positivité de l'intégrale, avec $\varphi(f,f) = \int_I f^2 = 0$ si et seulement si $f^2 = 0$ (car f^2 est continue et positive), soit $f = 0$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{L'application } (f,g) \mapsto \int_I f^2 \text{ est un produit scalaire sur } L^2(I,\mathbb{R}) \cap C^0(I,\mathbb{R}).}$$

Remarquons alors que l'on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 9

Comme *f* est solution de (*E*), elle est au moins deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+$, donc continue et comme pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f''(x) = e^x f(x)$ donc *f* est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$.

1) Supposons que *f* s'annule au moins deux fois sur $\mathbb{R}_+$ et posons $A = \{x \in \mathbb{R}_+ \setminus f(x) = 0\}$.

L'ensemble *A* contient au moins deux éléments, donc est une partie non vide de $\mathbb{R}_+$ et $a = \inf A$ existe. Par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de *A* convergeant vers *a*, et comme *f* est continue, $f(a) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = 0$.

Rappelons que *f* est solution de (*E*), qui est une équation différentielle linéaire d'ordre 2, donc le problème de Cauchy constitué de (*E*) et des conditions initiales $f(a) = f'(a) = 0$ admet une unique solution : la fonction nulle. Or, *f* est non nulle et $f(a) = 0$, donc $f'(a) \neq 0$.

Quitte à changer *f* en $-f$, qui est aussi une solution non nulle de (*E*) sur $\mathbb{R}_+$, on peut supposer que $f'(a) > 0$ et comme f' est continue sur $\mathbb{R}_+$, elle reste strictement positive au voisinage de *a*. Alors, *f* est strictement croissante au voisinage de *a*, et il existe $\varepsilon > 0$, tel que $f(x) > f(a) = 0$ pour tout $x \in \,]a, a+\varepsilon[$.

Or, *f* s'annule au moins deux fois sur $\mathbb{R}_+$, $A \setminus \{a\} \neq \varnothing$ et $b = \min(A \setminus \{a\})$ existe, avec $b \geq a + \varepsilon > a$.

On a alors $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in \,]a,b[$ et, par continuité, *f* garde un signe constant sur $]a,b[$. Comme $f(x) > 0$ sur $]a, a+\varepsilon[\,\subset\,]a,b[$, on a $f(x) > 0$ sur $]a,b[$.

Alors, $f''(x) = e^x f(x) > 0$ pour tout $x \in \,]a,b[$, donc f' est strictement croissante sur $]a,b[$ et comme $f(a) = f(b) = 0$, le théorème de Rolle assure l'existence de $c \in \,]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Alors, pour tout $x \in \,]a,c[$, $f'(x) < 0$, donc *f* est décroissante sur $]a,c[$ et pour tout $x \in \,]a,c[$, $f(x) \leq f(a) = 0$, ce qui est absurde.

Finalement, supposer que *f* s'annule au moins deux fois sur $\mathbb{R}_+$ mène à une absurdité, donc :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ s'annule au plus une fois sur } \mathbb{R}_+.}$$

2) Supposons que f s'annule en $a \in \mathbb{R}_+$.

D'après la question précédente, a est le seul point d'annulation de f et, comme f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $f(0)=1>0$, on a $a>0$ et $f(x)>0$ pour tout $x \in [0,a[$.

Alors, pour tout $x \in [0,a[$, $f''(x)=e^x f(x)>0$ et f' est strictement croissante sur $[0,a[$, donc strictement positive sur $[0,a[$, car $f'(0)=1>0$.

Alors, f est strictement croissante sur $[0,a[$ et $f(a)>f(0)=1$, ce qui est absurde avec $f(a)=0$.

Ainsi, f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$.

Toujours du fait de sa continuité, f est alors de signe constant sur $\mathbb{R}_+$ et, comme $f(0)>0$, on a $f(x)>0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. On montre alors comme ci-dessus que f' est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$f'(x) \geq f'(0)=1.$$

Comme f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$, on peut alors écrire, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\int_0^x f'(t)dt = f(x)-f(0) \geq \int_0^x dt = x.$$

Avec $f(0)=1$, on obtient bien pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\boxed{f(x) \geq x+1}$$

3) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \geq x+1>0$, donc $0<\dfrac{1}{f(x)^2} \leq \dfrac{1}{(x+1)^2}$ et comme $x \mapsto \dfrac{1}{(x+1)^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{dt}{f(t)^2}$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. Ainsi :

$$\boxed{g \text{ est définie sur } \mathbb{R}_+.}$$

La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{dt}{f(t)^2}$ est alors définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$, de dérivée $x \mapsto -\dfrac{1}{f(x)^2}$, qui est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ (car f l'est et ne s'annule pas).

Ainsi, $x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{dt}{f(t)^2}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$ et comme f l'est aussi, il en va de même pour leur produit, soit :

$$\boxed{g \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } \mathbb{R}_+.}$$

D'après ce qui précède, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$g'(x) = f'(x)\int_x^{+\infty} \frac{dt}{f(t)^2} - f(x)\frac{1}{f(x)^2} = f'(x)\int_x^{+\infty} \frac{dt}{f(t)^2} - \frac{1}{f(x)}$$

$$g''(x) = f''(x)\int_x^{+\infty} \frac{dt}{f(t)^2} - f'(x)\frac{1}{f(x)^2} + \frac{f'(x)}{f(x)^2} = f''(x)\int_x^{+\infty} \frac{dt}{f(t)^2}$$

Et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$g''(x) - e^x g(x) = f''(x)\int_x^{+\infty} \frac{dt}{f(t)^2} - e^x f(x)\int_x^{+\infty} \frac{dt}{f(t)^2} = \left[f''(x) - e^x f(x)\right]\int_x^{+\infty} \frac{dt}{f(t)^2} = 0.$$

Donc :

$$\boxed{g \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}_+ .}$$

On a vu que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) > 0$, donc $\int_x^{+\infty} \frac{dt}{f(t)^2} > 0$ et $g(x) > 0$.

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$f''(x) = e^x f(x) \geq e^x (x+1) \quad \Rightarrow \quad f'(x) - f'(0) = \int_0^x f''(t)dt \geq \int_0^x e^t (t+1)dt \quad \Rightarrow \quad f'(x) \geq 1 + \int_0^x e^t (t+1)dt .$$

Or, en intégrant par parties, on a $\int_0^x e^t (t+1)dt = \left[e^t (t+1)\right]_0^x - \int_0^x e^t dt = \left[te^t\right]_0^x = xe^x$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$f'(x) \geq 1 + xe^x \quad \Rightarrow \quad f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)dt \geq \int_0^x (1+te^t)dt \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq 1 + x + \int_0^x te^t dt > 0 .$$

Et $\int_0^x te^t dt = \int_0^x e^t (t+1)dt - \int_0^x e^t dt = xe^x - e^x + 1$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$f(x) \geq 2 + x + (x-1)e^x > 0 \quad \Rightarrow \quad 0 < \frac{1}{f(x)} \leq \frac{1}{2 + x + (x-1)e^x} .$$

On a $\frac{1}{2 + x + (x-1)e^x} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{xe^x}$, donc $\frac{1}{f(x)} = \underset{x \to +\infty}{o}(e^{-x})$ et $\int_1^{+\infty} e^{-t} dt$ converge, donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\int_x^{+\infty} \frac{dt}{f(t)}$ converge et, comme $\frac{1}{f} > 0$:

$$\int_x^{+\infty} \frac{dt}{f(t)} \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{f(t)}$$

De plus, on a vu plus haut que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) \geq 1 > 0$, donc *f* est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $t \in [x, +\infty[$, $0 < f(x) \leq f(t)$, donc $0 < \frac{1}{f(t)} \leq \frac{1}{f(x)}$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$0 < g(x) = f(x) \int_x^{+\infty} \frac{dt}{f(t)^2} \leq f(x) \int_x^{+\infty} \frac{dt}{f(x) f(t)} \leq \int_x^{+\infty} \frac{dt}{f(t)} \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{f(t)} .$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $0 < g(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{f(t)}$, ce qui prouve que :

$$\boxed{g \text{ est bornée sur } \mathbb{R}_+ .}$$

Exercice 10

1) La fonction *f* est continue sur $]0,1[$ en tant que quotient de telles fonctions et :

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1 = f(0)$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 0 = f(1)$$

Donc, *f* est continue en 0 et en 1.

De plus, pour tout $x \in]0,1[$, on a $1-x \in]0,1[$, donc $\ln(1-x) < 0$ et $f(x) > 0$. Avec $f(0)=1$ et $f(1)=0$, *f* est bien positive sur $[0,1]$.

Enfin, pour tout $x \in [0,1[$, $\dfrac{1}{f(x)} = -\dfrac{\ln(1-x)}{x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{x^k}{k+1}$ et $x \mapsto \dfrac{x^k}{k+1}$ est croissante sur $[0,1]$, donc $\dfrac{1}{f}$ est croissante sur $[0,1[$ et *f* est décroissante sur $[0,1]$ (fermé car *f* est continue en 1).

Ainsi :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est continue, positive et décroissante sur } [0,1].}$$

2) D'après la question précédente, $x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{\ln(1-x)} = x^n f(x)$ est continue sur $[0,1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $I_n = -\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)dx$ existe et ainsi :

$$\boxed{\text{La suite } (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bien définie.}}$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$, on a $x^{n+1} \le x^n$, donc $-x^n f(x) \le -x^{n+1} f(x)$ (car $f(x) \ge 0$) et, par croissance de l'intégrale, on obtient $I_n \le I_{n+1}$, donc :

$$\boxed{\text{La suite } (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$$

Comme la fonction *f* est continue sur $[0,1]$, elle y est bornée. Il existe donc un réel $M > 0$ tel que pour tout $x \in [0,1]$, $0 \le f(x) \le M$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$, $x^n \ge 0$, donc $-Mx^n \le -x^n f(x) \le 0$ et :

$$-M\int_0^1 x^n dx = -\frac{M}{n+1} \le I_n \le 0.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{M}{n+1} = 0$, le théorème des gendarmes permet de conclure que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0}$$

2) On a vu que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)dx$. On pose $a_n = 1 - \dfrac{\ln n}{n+1}$ et $b_n = 1 - \dfrac{1}{(n+1)\ln n}$.

Pour $n \ge 3$, on a $0 < a_n < b_n < 1$ et :

$$-I_n = \int_0^{a_n} x^n f(x)dx + \int_{a_n}^{b_n} x^n f(x)dx + \int_{b_n}^1 x^n f(x)dx.$$

- Pour tout $x \in [0,a_n]$, $x^n f(a_n) \le x^n f(x) \le x^n f(0) = x^n$ donc $0 \le \displaystyle\int_0^{a_n} x^n f(x)dx \le \int_0^{a_n} x^n dx$, soit :

$$0 \le \int_0^{a_n} x^n f(x)dx \le \frac{a_n^{n+1}}{n+1} \qquad \textbf{(1)}.$$

- Pour tout $x\in[a_n,b_n]$, $x^n f(b_n)\le x^n f(x)\le x^n f(a_n)$ donc $\int_{a_n}^{b_n} x^n f(b_n)dx\le\int_{a_n}^{b_n} x^n f(x)dx\le\int_{a_n}^{b_n} x^n f(a_n)dx$, soit :

$$f(b_n)\frac{b_n^{n+1}-a_n^{n+1}}{n+1}\le\int_{a_n}^{b_n} x^n f(x)dx\le f(a_n)\frac{b_n^{n+1}-a_n^{n+1}}{n+1}\qquad \textbf{(2)}.$$

- Pour tout $x\in[b_n,1[$, $0\le x^n f(x)\le x^n f(b_n)$ donc $0\le\int_{b_n}^{1} x^n f(x)dx\le\int_{b_n}^{1} x^n f(b_n)dx$, soit :

$$0\le\int_{b_n}^{1} x^n f(x)dx\le f(b_n)\frac{1-b_n^{n+1}}{n+1}\qquad \textbf{(3)}.$$

On a :

$$a_n^{n+1}=\left(1-\frac{\ln n}{n+1}\right)^{n+1}=e^{(n+1)\ln\left(1-\frac{\ln n}{n+1}\right)}=e^{(n+1)\left[-\frac{\ln n}{n+1}+\underset{n\to+\infty}{O}\left(\left(\frac{\ln n}{n+1}\right)^2\right)\right]}=e^{-\ln n+\underset{n\to+\infty}{o}(1)}.$$

Donc :

$$a_n^{n+1}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n}.$$

Et **(1)** donne :

$$\underline{\int_0^{a_n} x^n f(x)dx=\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n\ln n}\right)}.$$

Par ailleurs :

$$b_n^{n+1}=\left(1-\frac{1}{(n+1)\ln n}\right)^{n+1}=e^{(n+1)\ln\left(1-\frac{1}{(n+1)\ln n}\right)}=e^{-\frac{1}{\ln n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\ln n}\right)}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1.$$

Donc :

$$b_n^{n+1}-a_n^{n+1}\underset{n\to+\infty}{\sim}1.$$

Et :

$$f(a_n)=-\frac{a_n}{\ln(1-a_n)}=-\frac{1-\frac{\ln n}{n+1}}{\ln\left(\frac{\ln n}{n+1}\right)}=\frac{1-\frac{\ln n}{n+1}}{\ln(n+1)-\ln(\ln n)}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{\ln(n+1)}$$

$$f(b_n)=-\frac{b_n}{\ln(1-b_n)}=-\frac{1-\frac{1}{(n+1)\ln n}}{\ln\left(\frac{1}{(n+1)\ln n}\right)}=\frac{1-\frac{1}{(n+1)\ln n}}{\ln\left((n+1)\ln n\right)}=\frac{1-\frac{1}{(n+1)\ln n}}{\ln(n+1)+\ln(\ln n)}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{\ln(n+1)}$$

Donc :

$$f(b_n)\frac{b_n^{n+1}-a_n^{n+1}}{n+1}\underset{n\to+\infty}{\sim}f(a_n)\frac{b_n^{n+1}-a_n^{n+1}}{n+1}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n\ln n}.$$

Et **(2)** donne $\int_{a_n}^{b_n} x^n f(x)dx\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n\ln n}$, soit :

$$\underline{\int_{a_n}^{b_n} x^n f(x)dx=\frac{1}{n\ln n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n\ln n}\right)}.$$

Enfin, $1-b_n^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $f(b_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\ln n}$, donc :

$$f(b_n)\frac{1-b_n^{n+1}}{n+1} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)$$

Et **(3)** donne :

$$\underline{\int_{b_n}^{1} x^n f(x)dx \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n\ln n}\right).}$$

Finalement :

$$-I_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)+\frac{1}{n\ln n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n\ln n}\right)+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n\ln n}\right)=\frac{1}{n\ln n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n\ln n}\right).$$

Soit :

$$\boxed{I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n\ln n}}$$

3) Comme la fonction $t\mapsto \dfrac{1}{t\ln t}$ est continue, positive et décroissante sur $[2,+\infty[$, on peut utiliser la comparaison série intégrale : $\sum \dfrac{1}{n\ln n}$ et $\left(\displaystyle\int_2^n \frac{dt}{t\ln t}\right)_{n\geq 2}$ sont de même nature. Or :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_2^n \frac{dt}{t\ln t} = \lim_{n\to+\infty}\left[\ln(\ln n)-\ln(\ln 2)\right]=+\infty .$$

Donc, la série $\sum \dfrac{1}{n\ln n}$ diverge et ainsi :

$$\boxed{\sum I_n \text{ diverge.}}$$