Corrigés des TD du chapitre 13

Exercice 1

1) Chaque appel téléphonique est une expérience aléatoire ayant deux issues : on obtient le correspondant (probabilité p) ou pas (probabilité $1-p$). Cette expérience de Bernoulli est répétée n fois de manière indépendante : on a un schéma de Bernoulli. Le nombre X de succès, autrement dit le nombre de correspondants obtenus, suit donc une loi binomiale de paramètres n et p.

$$\boxed{\text{La variable } X \text{ suit la loi binomiale } \mathscr{B}(n,p).}$$

2) a. Si l'évènement $(X=i)$ est réalisé, la secrétaire a joint i correspondants lors de la première vague d'appels. Elle va donc en rappeler $n-i$ lors de la seconde vague.

Comme X, la variable Y représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels suit une loi binomiale de paramètres $n-i$ et p, et donc pour tout $k\in[\![0,n-i]\!]$:

$$\boxed{P_{(X=i)}(Y=k)=\binom{n-i}{k}p^k(1-p)^{n-i-k}}$$

b. La variable aléatoire $Z=X+Y$ représente le nombre total de correspondants obtenus après les deux séries d'appels. On a adonc $Z(\Omega)=[\![0,n]\!]$ et, avec la loi des probabilités totales, on a pour tout $k\in[\![0,n]\!]$:

$$\begin{aligned}
P(Z=k)&=\sum_{i=0}^{k}P(X=i)P_{(X=i)}(Z=k)=\sum_{i=0}^{k}P(X=i)P_{(X=i)}(Y=k-i)\\
&=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}\binom{n-i}{k-i}p^{k-i}(1-p)^{n-i-(k-i)}=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i}p^k(1-p)^{2n-k-i}\\
&=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{2n-k-i}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{2n-k}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\left(\frac{1}{1-p}\right)^i\\
&=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{2n-k}\left(1+\frac{1}{1-p}\right)^k=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{2(n-k)}(2-p)^k
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient :

$$P(Z=k)=\binom{n}{k}(2p-p^2)^k\left[1-(2p-p^2)\right]^{n-k}.$$

Et donc :

$$\boxed{Z=X+Y \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n \text{ et } 2p-p^2.}$$

Exercice 2

1) Remarquons que N est entier et Np aussi car c'est le nombre de boules blanches.

La variable X représente le nombre de boules blanches obtenues à l'issue d'un tirage donné, donc :

$$X(\Omega)=[\![0,Np]\!].$$

Les tirages possibles sont équiprobables, donc pour tout $k \in [\![0, Np]\!]$:

$$P(X=k) = \frac{\text{Nombre de tirages contenant } k \text{ boules blanches}}{\text{Nombre total de tirages possibles}}.$$

Enfin, on choisit sans remise de n boules distinctes parmi les N de l'urne, donc le modèle est celui des combinaisons. Il y a $\binom{N}{n}$ tirages possibles et pour obtenir exactement k boules blanches (donc $n-k$ boules noires), il faut choisir ces k boules blanches parmi les Np dans l'urne $\binom{Np}{k}$ possibilités et pour chacune de ces possibilités, il y a $\binom{N(1-p)}{n-k}$ possibilités de choisir les $n-k$ boules noires parmi les $N - Np = N(1-p)$ de l'urne. Il y a donc $\binom{Np}{k}\binom{N(1-p)}{n-k}$ tirages contenant k boules blanches et ainsi, pour tout $k \in [\![0, Np]\!]$:

$$\boxed{P(X=k) = \frac{\binom{Np}{k}\binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}}}$$

On a $a! \underset{a\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi a}\left(\frac{a}{e}\right)^a$, donc pour tout entier b fixé :

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!} \underset{a\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi a}\left(\frac{a}{e}\right)^a}{b!\sqrt{2\pi(a-b)}\left(\frac{a-b}{e}\right)^{a-b}}.$$

Et :

$$\frac{\sqrt{2\pi a}\left(\frac{a}{e}\right)^a}{b!\sqrt{2\pi(a-b)}\left(\frac{a-b}{e}\right)^{a-b}} = \frac{e^{-b}}{b!}\sqrt{\frac{a}{a-b}}e^{-a\ln\left(1-\frac{b}{a}\right)}(a-b)^b \underset{a\to+\infty}{\sim} \frac{a^b}{b!}$$

Donc, à b fixé, $\binom{a}{b} \underset{a\to+\infty}{\sim} \frac{a^b}{b!}$ et, à n, p et k fixés :

$$P(X=k) = \frac{\binom{Np}{k}\binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}} \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{(Np)^k}{k!}\,\frac{N^{n-k}(1-p)^{n-k}}{(n-k)!}}{\frac{N^n}{n!}} = \frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}.$$

Ainsi :

$$\lim_{N\to+\infty} P(X=k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.$$

Donc :

$$\boxed{\text{Lorsque } N \text{ tend vers l'infini, la loi hypergéométrique tend vers la loi binomiale } \mathscr{B}(n,p).}$$

2) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$ et $S = X+Y$.

On a $S(\Omega) = [\![2,2n]\!]$ et, avec la loi des probabilités totales, on a pour tout $k \in [\![2,2n]\!]$:

$$P(S=k) = \sum_{\substack{i+j=k \\ 1\le i,j\le n}} P(X=i, Y=j).$$

Comme X et Y sont indépendantes et suivent une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$, on a, pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$:

$$P(X=i,Y=j) = P(X=i)P(Y=j) = \frac{1}{n}\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} P(S=k) &= \sum_{\substack{i+j=k \\ 1\le i,j\le n}} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2}\mathrm{Card}\left\{(i,j)\in [\![1,n]\!]^2, i+j=k\right\} = \frac{1}{n^2}\mathrm{Card}\left\{(i,k-i)\in [\![1,n]\!]^2\right\} \\ &= \frac{1}{n^2}\mathrm{Card}\left\{i\in[\![1,n]\!], 1\le k-i\le n\right\} = \frac{1}{n^2}\mathrm{Card}\left\{i\in[\![1,n]\!], k-n\le i\le k-1\right\} \\ &= \frac{1}{n^2}\mathrm{Card}[\![\max(1,k-n),\min(k-1,n)]\!] = \frac{\min(k-1,n)-\max(1,k-n)+1}{n^2} \end{aligned}$$

Or :

$$k-1\le n \quad \Leftrightarrow \quad k-n\le 1.$$

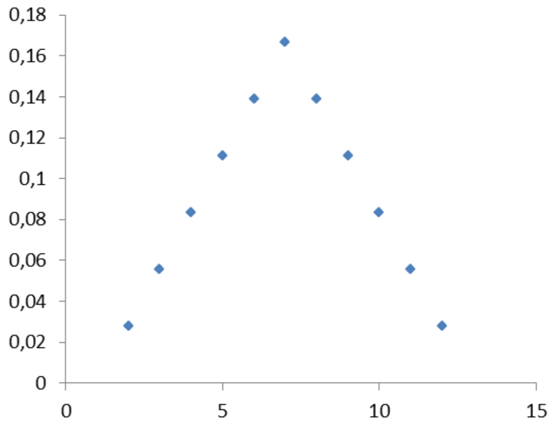
Donc :

$$\min(k-1,n) = k-1 \quad \Leftrightarrow \quad \max(1,k-n) = 1.$$

Et ainsi, on a :

$$\boxed{P(S=k) = \begin{cases} \dfrac{k-1}{n^2} & \text{quand } 2\le k\le n+1 \\ \dfrac{2n+1-k}{n^2} & \text{quand } n+1\le k\le 2n \end{cases}}$$

Si on représente cette loi pour $n=6$ (ce qui correspond à l'expérience : lancer de deux dés standards et non pipés, S est la somme des deux chiffres obtenus), on obtient :



Ceci illustre bien l'aspect « *triangulaire* » de la loi. Numériquement, ceci correspond à pour tout $k\in[\![2,2n]\!]$:

$$P(S=2n+2-k) = P(S=k).$$

Exercice 3

L'expression de la fonction génératrice d'une variable aléatoire X suivant une loi uniforme sur $[\![2,2n]\!]$ est :

$$G_X(t)=\sum_{k=2}^{2n}P(X=k)t^k=\sum_{k=2}^{2n}\frac{1}{2n-2+1}t^k\ .$$

Soit :

$$\boxed{G_X(t)=\frac{1}{2n-1}\sum_{k=2}^{2n}t^k}$$

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $[\![1,n]\!]$. On a alors :

$$G_{X_1+X_2}=G_{X_1}G_{X_2}$$

Comme X_1 et X_2 suivent la même loi de probabilité, on a $G_{X_1}=G_{X_2}$, donc pour tout $t\in\mathbb{R}$:

$$G_{X_1+X_2}(t)=\left(G_{X_1}(t)\right)^2=\left(\sum_{k=1}^{n}P(X_1=k)t^k\right)^2.$$

Ceci permet de conclure que toutes les racines de $G_{X_1+X_2}$ sont au moins doubles.

Or, si X_1+X_2 suit une loi uniforme sur $[\![2,2n]\!]$, on a $G_{X_1+X_2}(t)=\frac{1}{2n-1}\sum_{k=2}^{2n}t^k$, donc :

$$G_{X_1+X_2}(t)=0\iff\sum_{k=2}^{2n}t^k=0\iff t^2(t-1)\sum_{k=0}^{2n-2}t^k=0\ \text{avec } t\neq1\iff t^2(t^{2n-1}-1)=0\ \text{avec } t\neq1\,.$$

Comme $n\geq2$, on a $2n-1\geq3$, donc $X^{2n-1}-1$ admet au moins une racine et toutes ses racines sont simples (ce sont les racines $(2n-1)^{\text{ièmes}}$ de l'unité). Ainsi, toutes les racines de $G_{X_1+X_2}$, hormis 0, sont simples. D'après ce qui précède, ceci est absurde et ainsi :

$$\boxed{X_1+X_2\ \text{ne peut suivre une loi uniforme sur } [\![2,2n]\!].}$$

Exercice 4

1) a. On a $N(\Omega)=\mathbb{N}$ et $0\leq X\leq N$, donc :

$$\boxed{X(\Omega)=\mathbb{N}}$$

b. Comme il choisit au hasard son entrée, chaque visiteur à 1 chance sur 4 de choisir l'entrée n° 1 (épreuve de Bernoulli, probabilité de succès = 1/4). Les k visiteurs se présentent successivement et leur choix est indépendant de celui des autres. Nous sommes en présence d'un schéma de Bernoulli et donc :

$$\boxed{\text{Quand } N=k\text{, le nombre } X \text{ de visiteurs qui entrent par l'entrée 1 suit une loi binomiale de paramètres } k \text{ et } \frac{1}{4}.}$$

c. On a $(X=n)=\bigcup_{k=n}^{+\infty}(N=k,X=n)$ et pour $k\neq k'$, $(N=k,X=n)\cap(N=k',X=n)=\varnothing$, donc la famille $\left((N=k,X=n)\right)_{n\geq k}$ forme une partition de l'évènement $(X=n)$.

La loi des probabilités totales donne alors $P(X=n)=\sum_{k=n}^{+\infty} P(N=k, X=n)$, soit :

$$\boxed{P(X=n)=\sum_{k=n}^{+\infty} P(N=k) P_{(N=k)}(X=n)}$$

Comme N suit une loi de Poisson de paramètre λ, on a $P(N=k)=e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$. Or, d'après la question b, sachant $N=k$, X suit une loi binomiale de paramètres k et $\frac{1}{4}$, soit $P_{(N=k)}(X=n)=\binom{k}{n}\left(\frac{1}{4}\right)^n\left(\frac{3}{4}\right)^{k-n}$, on a :

$$\begin{aligned} P(X=n) &= \sum_{k=n}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}\binom{k}{n}\left(\frac{1}{4}\right)^n\left(\frac{3}{4}\right)^{k-n} = \sum_{k=n}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{k!}{n!(k-n)!}\left(\frac{1}{4}\right)^n\left(\frac{3}{4}\right)^{k-n} \\ &= e^{-\lambda} \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{4}\right)^n \lambda^n \sum_{k=n}^{+\infty} \lambda^{k-n} \frac{1}{(k-n)!}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-n} = e^{-\lambda} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{4}\right)^n \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{3\lambda}{4}\right)^k = e^{-\lambda} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{4}\right)^n e^{\frac{3\lambda}{4}} \end{aligned}$$

Ainsi, $P(X=n)=e^{-\frac{\lambda}{4}} \frac{(\lambda/4)^n}{n!}$, donc :

$$\boxed{\text{La variable } X \text{ suit une loi de Poisson de paramètre } \frac{\lambda}{4}.}$$

2) a. Comme le joueur réussit de façon certaine le premier lancer ($P(S_1)=1$) mais peut ratier le deuxième, Z vaut au minimum 1 et peut valoir n'importe quel entier supérieur ou égal à 1 (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'évènement $(Z=n)$ est l'évènement : « les n premiers lancers sont réussis et le $(n+1)^{\text{ième}}$ est raté »). Ainsi :

$$\boxed{Z(\Omega)=\mathbb{N}^*}$$

b. On vient de voir que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'évènement $(Z=n)$ est l'évènement : « les lancers 1 et 2 et … et n sont réussis et le $(n+1)^{\text{ième}}$ est raté », donc :

$$\boxed{(Z=n)=S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_n \cap \overline{S}_{n+1}}$$

On a alors :

$$P(Z=n)=P\left(S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_n \cap \overline{S}_{n+1}\right)=P\left(S_1\right) P_{S_1}\left(S_2\right) P_{S_1 \cap S_2}\left(S_3\right) \ldots P_{S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_{n-1}}\left(S_n\right) P_{S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_n}\left(\overline{S}_{n+1}\right).$$

Par hypothèse, $P\left(S_1\right)=1$ et pour tout $i \geq 2$, $P_{S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_{i-1}}\left(S_i\right)=\frac{1}{i}$, donc $P_{S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_{i-1}}\left(\overline{S}_i\right)=1-\frac{1}{i}=\frac{i-1}{i}$. Alors :

$$P(Z=n)=1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \ldots \times \frac{1}{n} \times \frac{n}{n+1}.$$

Soit :

$$\boxed{P(Z=n)=\frac{n}{(n+1)!}}$$

c. On a :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} P(Z=n)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{(n+1)!}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+1-1}{(n+1)!}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\right)=\frac{1}{1!}\quad \text{(par télescopage).}$$

Ainsi, on a bien :

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} P(Z=n)=1}$$

Exercice 5

1) On a pour tout $m\in\mathbb{N}^*$:

$$P(X\geq m)=\sum_{k=m}^{+\infty}P(X=k)=\sum_{k=m}^{+\infty}(1-p)^{k-1}p=(1-p)^{m-1}p\sum_{k=m}^{+\infty}(1-p)^{k-m}$$
$$=(1-p)^{m-1}p\sum_{k=0}^{+\infty}(1-p)^{k}=(1-p)^{m-1}p\frac{1}{1-(1-p)}$$

Soit :

$$\boxed{P(X\geq m)=(1-p)^{m-1}}$$

2) On a $X(\Omega)=Y(\Omega)=\mathbb{N}^*$, donc si $Z=\min(X,Y)$, on a aussi $Z(\Omega)=\mathbb{N}^*$.

Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
P\left(Z=k\right)&=P\left(\min(X,Y)=k\right)=P\left(X=k,Y\geq k\right)+P\left(X\geq k+1,Y=k\right)\\
&=\sum_{i=k}^{+\infty}P\left(X=k,Y=i\right)+\sum_{i=k+1}^{+\infty}P\left(X=i,Y=k\right)\\
&=\sum_{i=k}^{+\infty}P\left(X=k\right)P\left(Y=i\right)+\sum_{i=k+1}^{+\infty}P\left(X=i\right)P\left(Y=k\right)\\
&=\sum_{i=k}^{+\infty}(1-p)^{k-1}p(1-p)^{i-1}p+\sum_{i=k+1}^{+\infty}(1-p)^{i-1}p(1-p)^{k-1}p\\
&=(1-p)^{2(k-1)}p^2+2(1-p)^{k-1}p^2\sum_{i=k+1}^{+\infty}(1-p)^{i-1}\\
&=(1-p)^{2(k-1)}p^2+2(1-p)^{k-1}p^2(1-p)^k\sum_{i=0}^{+\infty}(1-p)^{i}\\
&=(1-p)^{2(k-1)}p^2+2(1-p)^{2(k-1)}p^2(1-p)\frac{1}{1-(1-p)}\\
&=(1-p)^{2(k-1)}p^2+2(1-p)^{2(k-1)}p(1-p)\\
&=(2-p)(1-p)^{2(k-1)}p
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$:

$$\boxed{P\left(Z=k\right)=(2-p)p(1-p)^{2(k-1)}}$$

On a $X(\Omega)=Y(\Omega)=\mathbb{N}^*$, donc si $W=X-Y$, on a aussi $W(\Omega)=\mathbb{Z}$.

Pour tout $k\in\mathbb{Z}$:

$$P\left(W=k\right)=P\left(X-Y=k\right)=P\left(X=Y+k\right)=\sum_{i=\max(1-k,1)}^{+\infty}P\left(X=i+k,Y=i\right)$$

$$=\sum_{i=\max(1-k,1)}^{+\infty}P\left(X=i+k\right)P\left(Y=i\right)=\sum_{i=\max(1-k,1)}^{+\infty}(1-p)^{i+k-1}p(1-p)^{i-1}p$$

$$=p^2(1-p)^{k-2}\sum_{i=\max(1-k,1)}^{+\infty}\left[(1-p)^2\right]^i=p^2(1-p)^{k-2}\left[(1-p)^2\right]^{\max(1-k,1)}\frac{1}{1-(1-p)^2}$$

$$=\frac{p(1-p)^{k-2+2\max(1-k,1)}}{2-p}$$

Et :

- si $k\geq 0$, $k-2+2\max(1-k,1)=k-2+2=k$;
- si $k<0$, $k-2+2\max(1-k,1)=-k$.

Soit, pour tout $k\in\mathbb{Z}$, $k-2+2\max(1-k,1)=|k|$ et :

$$\boxed{P\left(W=k\right)=\frac{p(1-p)^{|k|}}{2-p}}$$

3) Soit $(i,j)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{Z}$. On a :

$$P\left(Z=i,W=j\right)=P\left(\min(X,Y)=i,X-Y=j\right)=P\left(\min(Y+j,Y)=i,X=Y+j\right)$$

Si $j\geq 0$, $\min(Y+j,Y)=Y$, donc :

$$P\left(Z=i,W=j\right)=P\left(Y=i,X=i+j\right)=p(1-p)^{i-1}p(1-p)^{i+j-1}=p^2(1-p)^{2i+j-2}$$

Si $j<0$, $\min(Y+j,Y)=Y+j$, donc :

$$P\left(Z=i,W=j\right)=P\left(Y+j=i,X=Y+j\right)=P\left(Y=i-j,X=i\right)=p(1-p)^{i-j-1}p(1-p)^{i-1}=p^2(1-p)^{2i-j-2}$$

Donc :

$$P\left(Z=i,W=j\right)=p^2(1-p)^{2i+|j|-2}=p^2(1-p)^{2(i-1)+|j|}.$$

Or :

$$P\left(Z=i\right)P\left(W=j\right)=(2-p)p(1-p)^{2(i-1)}\frac{p(1-p)^{|j|}}{2-p}=p^2(1-p)^{2(i-1)+|j|}.$$

Ainsi, pour tout $(i,j)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{Z}$, on a $P\left(Z=i,W=j\right)=P\left(Z=i\right)P\left(W=j\right)$, donc :

$$\boxed{\text{Les variables aléatoires } W \text{ et } Z \text{ sont indépendantes.}}$$

Exercice 6

1) Remarquons déjà que quel que soit $n\in\mathbb{N}$, on a $x^ne^{-x}\underset{+\infty}{=}o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, donc $\int_a^{+\infty}x^ne^{-x}dx$ converge, pour tout réel a. Ainsi, $u_n=\int_\lambda^{+\infty}x^ne^{-x}dx$ est bien défini. De plus, on a déjà vu que $\int_0^{+\infty}x^ne^{-x}dx=n!$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$P(X \leq n) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k) = \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Or, la formule de Taylor avec reste intégrale à l'ordre n appliquée à la fonction exponentielle (qui est C^∞ sur $\mathbb{R}$) entre 0 et λ donne :

$$e^\lambda = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} + \int_0^\lambda \frac{(\lambda - t)^n}{n!} e^t \, dt.$$

Et en posant $x = \lambda - t$ dans l'intégrale, on obtient :

$$\begin{aligned} e^\lambda &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} + \int_0^\lambda \frac{x^n}{n!} e^{\lambda - x} \, dx = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} + \frac{1}{n!} e^\lambda \int_0^\lambda x^n e^{-x} \, dx \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} + \frac{1}{n!} e^\lambda \left(\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} \, dx - \int_\lambda^{+\infty} x^n e^{-x} \, dx \right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} + \frac{1}{n!} e^\lambda (n! - u_n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} + e^\lambda \left(1 - \frac{1}{n!} u_n \right) \end{aligned}.$$

Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} = e^\lambda \frac{1}{n!} u_n$ et ainsi :

$$\boxed{P(X \leq n) = \frac{1}{n!} u_n}$$

2) Si pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = (X \leq n)$, on a $A_n \subset A_{n+1}$ et $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \Omega$. Par continuité croissante, on a alors :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n!} u_n = \lim_{n \to +\infty} P(X \leq n) = \lim_{n \to +\infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = P(\Omega) = 1.$$

Donc :

$$\boxed{u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} n!}$$

3) Comme X suit une loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$, on a $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$, donc :

$$\boxed{G_X(1) = 1 \quad \text{et} \quad G_X(-1) = e^{-2\lambda}.}$$

4) Si B est l'évènement « X prend une valeur paire », on a :

$$P(B) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{+\infty} P(X = k).$$

Or, pour tout réel t, $G_X(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) t^k$, donc :

$$G_X(1) + G_X(-1) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) + \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k)(-1)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k)\left[1 + (-1)^k\right] = 2 \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{+\infty} P(X = k).$$

Ainsi :

$$P(B) = \frac{G_X(1) + G_X(-1)}{2}.$$

Donc :

$$\boxed{\text{La probabilité que } X \text{ prenne une valeur paire est } \frac{1+e^{-2\lambda}}{2}.}$$

5) Si B' est l'évènement « X prend une valeur divisible par 4 », on a :

$$P(B') = \sum_{\substack{k=0 \\ 4|k}}^{+\infty} P(X=k).$$

Et :

$$\begin{aligned} G_X(1)+G_X(-1)+G_X(i)+G_X(-i) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) + \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)(-1)^k + \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)i^k + \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)(-i)^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)\left[1+(-1)^k+i^k+(-i)^k\right] = 4\sum_{\substack{k=0 \\ 4|k}}^{+\infty} P(X=k) \end{aligned}$$

Donc :

$$P(B') = \frac{G_X(1)+G_X(-1)+G_X(i)+G_X(-i)}{4} = \frac{1+e^{-2\lambda}+e^{\lambda(i-1)}+e^{\lambda(-i-1)}}{4} = \frac{1+e^{-2\lambda}+e^{-\lambda}(e^{\lambda i}+e^{-\lambda i})}{4}.$$

Et finalement :

$$\boxed{\text{La probabilité que } X \text{ prenne une valeur divisible par 4 est } \frac{1+e^{-2\lambda}+2e^{-\lambda}\cos\lambda}{4}.}$$

6) Appelons C l'évènement « XY est un entier pair ».

Comme $X(\Omega)=\mathbb{N}$ et $Y(\Omega)=\{1;2\}$, XY est toujours entier et :

$$C = \text{« } X \text{ est pair » ou « } Y \text{ est pair »} = B \text{ ou } (Y=2) = B \cup (Y=2).$$

On a donc :

$$P(C) = P\big(B\cup(Y=2)\big) = P(B)+P(Y=2)-P\big(B\cap(Y=2)\big).$$

Et comme X et Y sont indépendantes, on a $P\big(B\cap(Y=2)\big) = P(B)P(Y=2)$. Ainsi :

$$P(C) = P(B)+P(Y=2)-P(B)P(Y=2) = \frac{1+e^{-2\lambda}}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1+e^{-2\lambda}}{2}\frac{1}{2} = \frac{3+e^{-2\lambda}}{4}.$$

Finalement :

$$\boxed{\text{La probabilité pour que } XY \text{ soit un entier pair est } \frac{3+e^{-2\lambda}}{4}.}$$

Exercice 7

Soient $a,b\in\mathbb{N}^*$.

L'équation caractéristique associée à (E): $y''+(a-1)y'+by=0$ est $r^2+(a-1)r+b=0$, de discriminant $\Delta=(a-1)^2-4b$. La forme des solutions de (E) dépend du signe de Δ, mais dans tous les cas, l'ensemble des solutions est un plan vectoriel $\mathrm{Vect}(f_1,f_2)$ où f_1 et f_2 sont deux solutions de (E) non proportionnelles.

Remarquons que comme $a,b\in\mathbb{N}^*$, on a $a-1\geq 0$, $b>0$ et $\Delta=(a-1)^2-4b<(a-1)^2$.

- Si $a-1>2\sqrt{b}>0$, soit $\Delta>0$, on a $f_1 : t\mapsto e^{-\frac{a-1-\sqrt{\Delta}}{2}t}$ et $f_2 : t\mapsto e^{-\frac{a-1+\sqrt{\Delta}}{2}t}$.

  Comme $0<\sqrt{\Delta}<a-1$, on a $a-1+\sqrt{\Delta}>a-1-\sqrt{\Delta}>0$, donc $\lim\limits_{+\infty} f_1=\lim\limits_{+\infty} f_2=0$.

- Si $a-1=2\sqrt{b}>0$, soit $\Delta=0$, on a $f_1 : t\mapsto e^{-\frac{a-1}{2}t}$ et $f_2 : t\mapsto t\,e^{-\frac{a-1}{2}t}$.

  Comme $a-1>0$, on a $\lim\limits_{+\infty} f_1=\lim\limits_{+\infty} f_2=0$.

- Si $a-1<2\sqrt{b}$, soit $\Delta<0$, $f_1 : t\mapsto e^{-\frac{a-1}{2}t}\cos\left(\sqrt{|\Delta|}\,t\right)$ et $f_2 : t\mapsto e^{-\frac{a-1}{2}t}\sin\left(\sqrt{|\Delta|}\,t\right)$.
  - Si $a>1$, on a $\lim\limits_{+\infty} f_1=\lim\limits_{+\infty} f_2=0$.
  - Si $a=1$, alors $f_1 : t\mapsto\cos\left(2\sqrt{b}\,t\right)$ et $f_2 : t\mapsto\sin\left(2\sqrt{b}\,t\right)$, qui n'ont pas de limite en + ∞.

Finalement :

$$\lim_{+\infty} f_1=\lim_{+\infty} f_2=0 \quad\Leftrightarrow\quad a\neq 1.$$

Or, toutes les solutions de (E) tendent vers 0 en + ∞ si et seulement c'est le cas pour f_1 et f_2, donc :

Toutes les solutions de l'équation (E) tendent vers 0 en + ∞ $\quad\Leftrightarrow\quad a\neq 1$

Ainsi, la probabilité pour que toutes les solutions de l'équation $y''+(A-1)y'+By=0$ tendent vers 0 en + ∞ est la probabilité que $A\neq 1$, soit $P(A\neq 1)=P(A>1)=1-P(A=1)$.

Si *p* est le paramètre de la loi géométrique suivie par *A*, on a $P(A=1)=p$, donc :

> La probabilité pour que toutes les solutions de l'équation $y''+(A-1)y'+By=0$ tendent vers 0 en + ∞ est $1-p$ où est le paramètre de la loi géométrique suivie par *A*.

Exercice 8

1) Notons $Y=aX+b$ et g_Y sa fonction génératrice.

On a $X(\Omega)=\mathbb{N}$, donc $Y(\Omega)=\{an+b, n\in\mathbb{N}\}$ et $g_Y : t\mapsto\sum\limits_{n=0}^{+\infty}P(Y=an+b)\,t^{an+b}$.

Comme $a>0$, on a $P(Y=an+b)=P(X=n)$, et :

$$g_Y(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}P(Y=an+b)\,t^{an+b}=t^b\sum_{n=0}^{+\infty}P(X=n)\,(t^a)^n=t^b g_X(t^a).$$

Et $g_Y(t)$ est défini quand $g_X(t^a)$ est défini, donc quand $\left|t^a\right|<R_X$, soit $t<R_X^{1/a}=R_Y$. Ainsi :

$$\boxed{g_Y : t\mapsto t^b g_X(t^a) \text{ sur }]-R_Y, R_Y[\text{ avec } R_Y=R_X^{1/a}.}$$

2) On a $g_X(1)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}P(X=n)=1$, donc $1\in\,]-R_X, R_X[$ et par symétrie, – 1 aussi. Ainsi :

$$\boxed{g_X \text{ est définie en } -1 \text{ et } 1.}$$

3) On a :

$$\begin{cases} P\big(X \text{ pair}\big) = \displaystyle\sum_{\substack{n=0\\ n \text{ pair}}}^{+\infty} P(X=n) \\ P\big(X \text{ impair}\big) = \displaystyle\sum_{\substack{n=0\\ n \text{ impair}}}^{+\infty} P(X=n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P\big(X \text{ pair}\big) + P\big(X \text{ impair}\big) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) = g_X(1) \\ P\big(X \text{ pair}\big) - P\big(X \text{ impair}\big) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)(-1)^n = g_X(-1) \end{cases}$$

Soit :

$$\boxed{\begin{cases} P\big(X \text{ pair}\big) = \dfrac{g_X(1)+g_X(-1)}{2} \\ P\big(X \text{ impair}\big) = \dfrac{g_X(1)-g_X(-1)}{2} \end{cases}}$$

4) Si X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, alors $g_X : t \mapsto e^{\lambda(t-1)}$ sur $\mathbb{R}$, donc :

$$\begin{cases} g_X(1) = e^{\lambda(1-1)} = 1 \\ g_X(-1) = e^{\lambda(-1-1)} = e^{-2\lambda} \end{cases}$$

Et :

$$\boxed{\begin{cases} P\big(X \text{ pair}\big) = \dfrac{1+e^{-2\lambda}}{2} = e^{-\lambda}\operatorname{ch}\lambda \\ P\big(X \text{ impair}\big) = \dfrac{1-e^{-2\lambda}}{2} = e^{-\lambda}\operatorname{sh}\lambda \end{cases}}$$

Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p, alors $g_X : t \mapsto (pt+1-p)^n$ sur $\mathbb{R}$, donc :

$$\begin{cases} g_X(1) = 1 \\ g_X(-1) = (1-2p)^n \end{cases}$$

Et :

$$\boxed{\begin{cases} P\big(X \text{ pair}\big) = \dfrac{1+(1-2p)^n}{2} \\ P\big(X \text{ impair}\big) = \dfrac{1-(1-2p)^n}{2} \end{cases}}$$

Exercice 9

1) Soit $B \in \mathcal{A}$. Posons :

$$\begin{cases} A_1 = \big(X \in B\big) \cap \big(X' \in B\big) \cap \big(X \neq X'\big) \\ A_2 = \big(X \in B\big) \cap \big(X' \in B\big) \cap \big(X = X'\big) \\ A_3 = \big(X \in B\big) \cap \big(X' \notin B\big) \cap \big(X \neq X'\big) \\ A_4 = \big(X \in B\big) \cap \big(X' \notin B\big) \cap \big(X = X'\big) = \varnothing \end{cases}$$

On a $\big(X \in B\big) = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ et l'union est disjointe.

Alors :

$$P\left(X\in B\right)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3).$$

Et :

$$\begin{cases} A_1=\left(X\in B\right)\cap\left(X'\in B\right)\cap\left(X\neq X'\right)\subset\left(X\neq X'\right) \\ A_2=\left(X\in B\right)\cap\left(X'\in B\right)\cap\left(X=X'\right)\subset\left(X'\in B\right) \\ A_3=\left(X\in B\right)\cap\left(X'\notin B\right)\cap\left(X\neq X'\right)\subset\left(X\neq X'\right)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(A_1)\leq P\left(X\neq X'\right) \\ P(A_2)\leq P\left(X'\in B\right) \\ P(A_3)\leq P\left(X\neq X'\right)\end{cases}$$

Donc :

$$P\left(X\in B\right)\leq P\left(X\neq X'\right)+P\left(X'\in B\right)+P\left(X\neq X'\right).$$

Soit :

$$P\left(X\in B\right)-P\left(X'\in B\right)\leq 2P\left(X\neq X'\right).$$

Le variables X et X' jouant des rôles similaires, on obtient de même $P\left(X'\in B\right)-P\left(X\in B\right)\leq 2P\left(X\neq X'\right)$ et ainsi :

$$\boxed{\left|P\left(X\in B\right)-P\left(X'\in B\right)\right|\leq 2P\left(X\neq X'\right)}$$

2) On a :

$$\sum_{(i,i')\in\mathbb{N}^2}P\left((Y_m,Y_m')=(i,i')\right)=\sum_{(i,i')\in\mathbb{N}^2,i<2}P\left((Y_m,Y_m')=(i,i')\right)+\sum_{(i,i')\in\mathbb{N}^2,i\geq 2}P\left((Y_m,Y_m')=(i,i')\right)\geq\sum_{(i,i')\in\mathbb{N}^2,i\geq 2}a$$

Or, si $a\neq 0$, la somme $\displaystyle\sum_{(i,i')\in\mathbb{N}^2,i\geq 2}a$ est infinie, ce qui est absurde car $\displaystyle\sum_{(i,i')\in\mathbb{N}^2}P\left((Y_m,Y_m')=(i,i')\right)=1$, donc :

$$\boxed{a=0}$$

On a :

$$P\left(Y_m=0\right)=\sum_{i'\in\mathbb{N}}P\left((Y_m,Y_m')=(0,i')\right)=P\left((Y_m,Y_m')=(0,0)\right)+\sum_{i'\in\mathbb{N}^*}P\left((Y_m,Y_m')=(0,i')\right)=1-p_m$$

$$\begin{aligned}P\left(Y_m=1\right)&=\sum_{i'\in\mathbb{N}}P\left((Y_m,Y_m')=(1,i')\right)=P\left((Y_m,Y_m')=(1,0)\right)+\sum_{i'\in\mathbb{N}^*}P\left((Y_m,Y_m')=(1,i')\right)\\ &=e^{-p_m}-(1-p_m)+\sum_{i'\in\mathbb{N}^*}\frac{e^{-p_m}p_m^{i'}}{i'!}=e^{-p_m}\sum_{i'\in\mathbb{N}}\frac{p_m^{i'}}{i'!}-1+p_m=e^{-p_m}e^{p_m}-1+p_m=p_m\end{aligned}$$

Et pour tout entier $i\geq 2$:

$$P\left(Y_m=i\right)=\sum_{i'\in\mathbb{N}}P\left((Y_m,Y_m')=(i,i')\right)=0.$$

Soit $i'\in\mathbb{N}$. Comme $P\left((Y_m,Y_m')=(i,i')\right)=0$ pour tout entier $i\geq 2$, on a :

$$\begin{aligned}P\left(Y_m'=i'\right)&=\sum_{i\in\mathbb{N}}P\left((Y_m,Y_m')=(i,i')\right)=P\left((Y_m,Y_m')=(0,i')\right)+P\left((Y_m,Y_m')=(1,i')\right)\\ &=\begin{cases}1-p_m+e^{-p_m}-(1-p_m) & \text{si } i'=0\\ 0+\dfrac{e^{-p_m}p_m^{i'}}{i'!} & \text{si } i'\in\mathbb{N}^*\end{cases} = \frac{e^{-p_m}p_m^{i'}}{i'!}\end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{Y_m \hookrightarrow \mathscr{B}(p_m) \quad \text{et} \quad Y_m' \hookrightarrow \mathscr{P}(p_m)}$$

Soit $m \in [\![1,n]\!]$. Par définition de la loi conjointe de Y_m et Y_m', on a pour tout $i' \in \mathbb{N}^*$, $P\big((Y_m, Y_m') = (0, i')\big) = 0$.

Or, d'après ce qui précède, $P(Y_m = 0)P(Y_m' = i') = (1 - p_m)\dfrac{e^{-p_m} p_m^{i'}}{i'!}$, donc :

$$P\big((Y_m, Y_m') = (0, i')\big) \neq P(Y_m = 0)P(Y_m' = i').$$

Ainsi, pour tout $m \in [\![1,n]\!]$:

$$\boxed{Y_m \text{ et } Y_m' \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

3) Prouvons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $P(X_n \neq X_n') \leq \sum_{m=1}^{n} p_m^2$ avec $X_n = \sum_{m=1}^{n} Y_m$ et $X_n' = \sum_{m=1}^{n} Y_m'$.

- Pour $n = 1$, on a :

  $$P(Y_1 = Y_1') = P\big((Y_1, Y_1') = (0,0)\big) + P\big((Y_1, Y_1') = (1,1)\big) = 1 - p_1 + e^{-p_1} p_1.$$

  Donc :

  $$P(Y_1 \neq Y_1') = 1 - P(Y_1 = Y_1') = p_1 - e^{-p_1} p_1 = p_1(1 - e^{-p_1}).$$

  Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1 + x$, soit $1 - e^x \leq -x$, donc $1 - e^{-p_1} \leq p_1$ et ainsi :

  $$P(Y_1 \neq Y_1') \leq p_1^2.$$

  La propriété est vraie au rang 1.

- Supposons la propriété vraie à un rang $n \in \mathbb{N}^*$.

  On considère $(p_1, p_2, \dots, p_n, p_{n+1}) \in [0,1]^{n+1}$ et $(Y_m, Y_m')_{m \in [\![1,n+1]\!]}$ des couples de variables aléatoires vérifiant les hypothèses de l'énoncé. On a :

  $$(X_{n+1} \neq X_{n+1}') = \big[(X_n = X_n') \cap (X_{n+1} \neq X_{n+1}')\big] \cup \big[(X_n \neq X_n') \cap (X_{n+1} \neq X_{n+1}')\big].$$

  L'union est disjointe donc :

  $$P(X_{n+1} \neq X_{n+1}') = P\big[(X_n = X_n') \cap (X_{n+1} \neq X_{n+1}')\big] + P\big[(X_n \neq X_n') \cap (X_{n+1} \neq X_{n+1}')\big].$$

  Et :

  $$\big[(X_n = X_n') \cap (X_{n+1} \neq X_{n+1}')\big] = \big[(X_n = X_n') \cap (Y_{n+1} \neq Y_{n+1}')\big] \subset (Y_{n+1} \neq Y_{n+1}')$$
  $$\big[(X_n \neq X_n') \cap (X_{n+1} \neq X_{n+1}')\big] \subset (X_n \neq X_n')$$

  Donc :

  $$P\big[(X_n = X_n') \cap (X_{n+1} \neq X_{n+1}')\big] \leq P(Y_{n+1} \neq Y_{n+1}')$$
  $$P\big[(X_n \neq X_n') \cap (X_{n+1} \neq X_{n+1}')\big] \leq P(X_n \neq X_n')$$

  Et ainsi :

  $$P(X_{n+1} \neq X_{n+1}') \leq P(Y_{n+1} \neq Y_{n+1}') + P(X_n \neq X_n').$$

Par hypothèse de récurrence, $P(X_n \neq X_n') \leq \sum_{m=1}^{n} p_m^2$ et comme pour $n=1$, on a $P(Y_{n+1} \neq Y_{n+1}') \leq p_{n+1}^2$, donc :

$$P(X_{n+1} \neq X_{n+1}') \leq \sum_{m=1}^{n} p_m^2 + p_{n+1}^2 = \sum_{m=1}^{n+1} p_m^2 .$$

Ainsi, la propriété est vraie au rang $n+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit :

$$\boxed{P\left(\sum_{m=1}^{n} Y_m \neq \sum_{m=1}^{n} Y_m'\right) \leq \sum_{m=1}^{n} p_m^2}$$