

Corrigés des TD du chapitre 15

Exercice 1

1) L'application $\varphi: (P, Q) \mapsto (P \mid Q) = \sum_{k=0}^n P(a_k)Q(a_k)$ est bien définie sur $(\mathbb{R}_n[X])^2$ et à valeurs dans \mathbb{R} .

Elle est clairement symétrique (commutativité du produit dans \mathbb{R}) et bilinéaire (distributivité du produit sur l'addition dans \mathbb{R}).

De plus, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $(P \mid P) = \sum_{k=0}^n P(a_k)^2 \geq 0$, donc φ est positive et donc, φ est produit scalaire si et seulement si φ est définie. Or, on a :

$$(P \mid P) = \sum_{k=0}^n P(a_k)^2 = 0 \iff P(a_0) = P(a_1) = \dots = P(a_n) = 0.$$

Donc, a_0, a_1, \dots, a_n sont racines de P . Si les a_k sont distincts deux à deux, alors $P \in \mathbb{R}_n[X]$ possède $n+1$ racines distincts, donc P est nul. Dans ce cas, φ est définie.

Par contre, si les a_k ne sont pas distincts deux à deux, quitte à renuméroter, on peut supposer que $a_0 = a_1$,

et dans ce cas, avec $P = \prod_{k=1}^n (X - a_k) \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $(P \mid P) = 0$ avec $P \neq 0$, donc φ n'est pas définie.

Finalement, φ est définie si et seulement si les a_k sont distincts deux à deux, et donc :

$$(P, Q) \mapsto (P \mid Q) = \sum_{k=0}^n P(a_k)Q(a_k) \text{ est produit scalaire si et seulement si les } a_k \text{ sont distincts deux à deux.}$$

2) Remarquons que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $L_i(a_k) = \delta_{i,k}$ (le symbole de Kronecker).

On a pour tous $i, j \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$(L_i \mid L_j) = \sum_{k=0}^n L_i(a_k)L_j(a_k) = \sum_{k=0}^n \delta_{i,k}\delta_{j,k} = \delta_{i,j}.$$

Donc, la famille (L_0, L_1, \dots, L_n) est orthonormée et comme elle contient $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ polynômes :

La famille (L_0, L_1, \dots, L_n) est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$.

3) Remarquons déjà que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\sum_{k=0}^n P(a_k)^2 = \|P\|^2$ (où $\|\cdot\|$ est la norme associée au produit scalaire utilisé ici), donc $\inf_{P \in F} \left(\sum_{k=0}^n P(a_k)^2 \right) = \inf_{P \in F} (\|P\|^2)$.

Par ailleurs, si on pose $L = L_0 + L_1 + \dots + L_n$, on a pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$:

$$\sum_{k=0}^n P(a_k) = \sum_{k=0}^n L(a_k)P(a_k) = (L \mid P).$$

Donc, $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid (L \mid P) = 1\}$. Mais, $(L \mid L) = n+1$, soit $\left(L \mid \frac{1}{n+1}L\right) = 1$ (donc $\frac{1}{n+1}L \in F$) et :

$$F = \left\{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid (L \mid P) = \left(L \mid \frac{1}{n+1}L\right)\right\} = \left\{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \left(L \mid P - \frac{1}{n+1}L\right) = 0\right\} = \left\{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid L \perp P - \frac{1}{n+1}L\right\}$$

Alors, pour tout $P \in F$, on a $L \perp P - \frac{1}{n+1}L$, donc $\frac{1}{n+1}L \perp P - \frac{1}{n+1}L$ et, d'après le théorème de Pythagore :

$$\|P\|^2 = \left\| \frac{1}{n+1}L + P - \frac{1}{n+1}L \right\|^2 = \left\| \frac{1}{n+1}L \right\|^2 + \left\| P - \frac{1}{n+1}L \right\|^2 \geq \left\| \frac{1}{n+1}L \right\|^2 = \frac{1}{n+1} \Rightarrow \inf_{P \in F} (\|P\|^2) \geq \frac{1}{n+1}.$$

Or, $\frac{1}{n+1}L \in F$, donc $\inf_{P \in F} (\|P\|^2) \leq \frac{1}{n+1}$ et finalement :

$$\boxed{\inf_{P \in F} \left(\sum_{k=0}^n P(a_k)^2 \right) = \inf_{P \in F} (\|P\|^2) = \min_{P \in F} (\|P\|^2) = \frac{1}{n+1}}$$

Exercice 2

1) On a :

- $(\cdot \mid \cdot)$ est clairement symétrique et bilinéaire du fait de la linéarité de l'intégrale.
- De plus, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $(P \mid P) = \int_{-1}^1 P^2 \varphi$.
Or, φ est à valeurs dans \mathbb{R}_+^* , donc $P^2 \varphi \geq 0$ sur $[-1;1]$ et par positivité de l'intégrale, on a $(P \mid P) \geq 0$ donc $(\cdot \mid \cdot)$ est positive.

- On a :

$$\begin{aligned} (P \mid P) = \int_{-1}^1 P^2 \varphi = 0 &\Leftrightarrow P^2 \varphi = 0 \text{ sur } [-1;1] \text{ (car } P^2 \varphi \text{ est continue et positive sur } [-1;1]) \\ &\Leftrightarrow P = 0 \text{ sur } [-1;1] \text{ (car } \varphi \text{ est à valeurs dans } \mathbb{R}_+^* \text{ donc ne s'annule pas)} \\ &\Leftrightarrow P = 0 \text{ (car } P \text{ admet une infinité de racines donc est nul)} \end{aligned}$$

Ainsi, $(\cdot \mid \cdot)$ est définie.

Finalement :

$$\boxed{(\cdot \mid \cdot) \text{ est un produit scalaire sur } E.}$$

2) Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt appliqué à la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ de E permet de construire une base orthonormée (P_0, P_1, \dots, P_n) telle que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P_k = \frac{R_k}{\|R_k\|}$ avec $R_0 = 1$ et pour tout $k \geq 1$, $R_k = X^k - (X^k \mid P_{k-1})P_{k-1} - \dots - (X^k \mid P_0)P_0$.

Alors, par construction, le terme de plus haut degré de R_k est X^k , donc pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\deg P_k = k$ et le coefficient dominant de P_k est $\frac{1}{\|R_k\|} > 0$ et ainsi, il existe bien une base orthonormée de E , échelonnée en degrés et constituée de polynômes de coefficients dominants strictement positifs.

Supposons maintenant que l'on ait deux telles bases : (P_0, P_1, \dots, P_n) et (Q_0, Q_1, \dots, Q_n) .

Notons pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $a_k > 0$ et $b_k > 0$ les coefficients dominants respectifs de P_k et Q_k .

Montrons par récurrence forte que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $Q_k = P_k$.

- Pour $k = 0$, P_0 et Q_0 sont tous deux degré 0, donc $Q_0 = \lambda P_0$ avec $b_0 = \lambda a_0$ donc $\lambda > 0$, et :

$$1 = (Q_0 | Q_0) = \lambda^2 (P_0 | P_0) = \lambda^2 \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = 1 \text{ (car } \lambda > 0 \text{)}.$$

Ainsi, $Q_0 = P_0$ et la propriété est au rang 0.

- Supposons la propriété vraie jusqu'à un certain rang $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

Alors, $R = \frac{Q_{k+1}}{b_{k+1}} - \frac{P_{k+1}}{a_{k+1}}$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à k donc $R = \sum_{i=0}^k \lambda_i P_i$.

Mais alors, pour tout $i \in \llbracket 0, k \rrbracket$, $Q_i = P_i$ et :

$$\lambda_i = (R | P_i) = \left(\frac{Q_{k+1}}{b_{k+1}} - \frac{P_{k+1}}{a_{k+1}} \mid P_i \right) = \frac{1}{b_{k+1}} (Q_{k+1} | P_i) - \frac{1}{a_{k+1}} (P_{k+1} | P_i) = \frac{1}{b_{k+1}} (Q_{k+1} | Q_i) - \frac{1}{a_{k+1}} (P_{k+1} | P_i) = 0.$$

Donc $R = 0$, soit $Q_{k+1} = \lambda P_{k+1}$ avec $\lambda = \frac{b_{k+1}}{a_{k+1}} > 0$. On obtient $\lambda = 1$ comme plus haut.

Ainsi, $Q_{k+1} = P_{k+1}$ et la propriété est donc vraie au rang $k+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc elle est vraie pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Ainsi :

Il existe une unique base orthonormée de E , échelonnée en degrés et constituée de polynômes de coefficients dominants strictement positifs.

3) a. Le terme de plus haut degré de $(X^2 - 1)^k$ est X^{2k} donc le terme de plus haut degré de Q_k est :

$$(X^{2k})^{(k)} = 2k(2k-1)\dots(k+1)X^k = \frac{(2k)!}{k!} X^k$$

Ainsi :

Q_k est de degré k et de coefficient dominant $\frac{(2k)!}{k!}$.

b. La famille $(Q_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est donc une famille échelonnée en degrés de $n+1$ polynômes de $E = \mathbb{R}_n[X]$, qui est de dimension $n+1$. Ainsi :

$(Q_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est une base de E .

c. Posons pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P_k = (X^2 - 1)^k$. On a alors, $Q_k = P_k^{(k)}$.

Remarquons que comme -1 et 1 sont racines de multiplicité k dans P_k , ces deux réels sont racines de $P_k^{(p)}$ pour tout entier compris entre 0 et $k-1$.

Alors, pour tout $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$, on a, en intégrant deux fois par parties :

$$\begin{aligned} (Q_i | Q_j) &= \int_{-1}^1 P_i^{(i)}(t) P_j^{(j)}(t) dt = \left[P_i^{(i)}(t) P_j^{(j-1)}(t) \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 P_i^{(i+1)}(t) P_j^{(j-1)}(t) dt = - \int_{-1}^1 P_i^{(i+1)}(t) P_j^{(j-1)}(t) dt \\ &= - \left[P_i^{(i+2)}(t) P_j^{(j-1)}(t) \right]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 P_i^{(i+2)}(t) P_j^{(j-2)}(t) dt = \int_{-1}^1 P_i^{(i+2)}(t) P_j^{(j-2)}(t) dt \end{aligned}$$

En continuant ainsi, on obtient pour tout $p \leq j$, $(Q_i | Q_j) = \int_{-1}^1 P_i^{(i+p)}(t) P_j^{(j-p)}(t) dt$ et en particulier pour $p = j$:

$$(Q_i | Q_j) = \int_{-1}^1 P_i^{(i+j)}(t) P_j(t) dt.$$

Mais, si $i < j$, alors $i + j > 2i = \deg P_i$, donc $P_i^{(i+j)} = 0$ et ainsi, $(Q_i | Q_j) = 0$.

Par symétrie du produit scalaire, on a aussi $(Q_i | Q_j) = 0$ pour $i > j$ et ainsi, $(Q_i | Q_j) = 0$ pour $i \neq j$ donc :

La famille $(Q_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est une base orthogonale de E .

Exercice 3

L'identité du parallélogramme est $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$, qui est donc vérifiée ici pour tout $(x, y) \in E^2$. Montrer que la norme est hilbertienne revient à montrer qu'elle dérive d'un produit scalaire et si tel est le cas, alors ce produit scalaire et la norme vérifient les identités de polarisation.

En particulier, pour tout $(x, y) \in E^2$, $\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 4(x | y)$, soit :

$$(x | y) = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2).$$

Il faut donc montrer que $(x, y) \mapsto (x | y) = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$ est un produit scalaire sur E .

Cette application va de E^2 dans \mathbb{R} et est symétrique ($\|x + y\| = \|y + x\|$ et $\|x - y\| = \|y - x\|$).

De plus, pour tout $x \in E$, $(x | x) = \frac{1}{4} (\|x + x\|^2 - \|x - x\|^2) = \|x\|^2 \geq 0$ et $(x | x) = \|x\|^2 = 0$ équivaut à $x = 0$ (séparation de la norme).

Reste à prouver la bilinéarité, donc la linéarité à gauche (la symétrie entrainera alors la linéarité à droite).

Nous allons procéder en deux temps.

Soient $(x, x', y) \in E^3$. On a :

$$4(x + x' | y) = \|x + x' + y\|^2 - \|x + x' - y\|^2 = \left\| x + \frac{1}{2}y + x' + \frac{1}{2}y \right\|^2 - \left\| x - \frac{1}{2}y + x' - \frac{1}{2}y \right\|^2.$$

Et, avec l'identité du parallélogramme :

$$\begin{aligned} \left\| x + \frac{1}{2}y + x' + \frac{1}{2}y \right\|^2 &= 2 \left(\left\| x + \frac{1}{2}y \right\|^2 + \left\| x' + \frac{1}{2}y \right\|^2 \right) - \left\| x + \frac{1}{2}y - x' - \frac{1}{2}y \right\|^2 = 2 \left(\left\| x + \frac{1}{2}y \right\|^2 + \left\| x' + \frac{1}{2}y \right\|^2 \right) - \|x - x'\|^2 \\ \left\| x - \frac{1}{2}y + x' - \frac{1}{2}y \right\|^2 &= 2 \left(\left\| x - \frac{1}{2}y \right\|^2 + \left\| x' - \frac{1}{2}y \right\|^2 \right) - \left\| x - \frac{1}{2}y - x' + \frac{1}{2}y \right\|^2 = 2 \left(\left\| x - \frac{1}{2}y \right\|^2 + \left\| x' - \frac{1}{2}y \right\|^2 \right) - \|x - x'\|^2 \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} 4(x+x'|y) &= 2\left(\left\|x+\frac{1}{2}y\right\|^2 + \left\|x'+\frac{1}{2}y\right\|^2\right) - 2\left(\left\|x-\frac{1}{2}y\right\|^2 + \left\|x'-\frac{1}{2}y\right\|^2\right) \\ &= 2\left(\left\|x+\frac{1}{2}y\right\|^2 - \left\|x-\frac{1}{2}y\right\|^2 + \left\|x'+\frac{1}{2}y\right\|^2 - \left\|x'-\frac{1}{2}y\right\|^2\right). \end{aligned}$$

Remarquons que l'identité du parallélogramme peut aussi s'écrire pour tout $(X, Y) \in E^2$:

$$\|X\|^2 + \|Y\|^2 = \frac{1}{2}(\|X+Y\|^2 + \|X-Y\|^2).$$

Donc :

$$\begin{cases} \left\|x+\frac{1}{2}y\right\|^2 + \left\|\frac{1}{2}y\right\|^2 = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 + \|x\|^2) \\ \left\|x-\frac{1}{2}y\right\|^2 + \left\|\frac{1}{2}y\right\|^2 = \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|x-y\|^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left\|x+\frac{1}{2}y\right\|^2 = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 + \|x\|^2) - \left\|\frac{1}{2}y\right\|^2 \\ \left\|x-\frac{1}{2}y\right\|^2 = \frac{1}{2}(\|x-y\|^2 + \|x\|^2) - \left\|\frac{1}{2}y\right\|^2 \end{cases}$$

Ainsi :

$$\left\|x+\frac{1}{2}y\right\|^2 - \left\|x-\frac{1}{2}y\right\|^2 = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) = 2(x|y).$$

On a bien sûr de même $\left\|x'+\frac{1}{2}y\right\|^2 - \left\|x'-\frac{1}{2}y\right\|^2 = 2(x'|y)$ et donc :

$$4(x+x'|y) = 2[2(x|y) + 2(x'|y)] = 4[(x|y) + (x'|y)].$$

Ainsi, pour tout $(x, x', y) \in E^3$:

$$(x+x'|y) = (x|y) + (x'|y) \quad \mathbf{(1)}.$$

Soit maintenant $(x, y) \in E^2$. Posons pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$f(\lambda) = (\lambda x|y) = \frac{1}{4}(\|\lambda x+y\|^2 - \|\lambda x-y\|^2).$$

L'application f est définie sur \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} .

De plus, comme $X \mapsto \|X\|$ est continue sur E (car 1-lipschizienne du fait de l'inégalité triangulaire), f est continue sur \mathbb{R} en tant que différences de telles fonctions.

Enfin, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on a d'après le résultat **(1)** :

$$f(\lambda+\mu) = ((\lambda+\mu)x|y) = (\lambda x + \mu x|y) = (\lambda x|y) + (\mu x|y) = f(\lambda) + f(\mu).$$

Ainsi, f est une application continue sur \mathbb{R} vérifiant $f(\lambda+\mu) = f(\lambda) + f(\mu)$ pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, donc f est linéaire (*exercice classique de première année* : on prouve que pour tout $(\lambda, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$, $f(n\lambda) = nf(\lambda)$, puis on évalue f sur \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , puis \mathbb{R} par continuité, grâce à densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R}).

Il existe donc un réel fixé a tel que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda) = a\lambda$ et $a = f(1) = (x|y)$, donc pour tout $(x, y) \in E^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$(\lambda x|y) = \lambda(x|y) \quad \mathbf{(2)}.$$

Les résultats (1) et (2) prouvent que $(x, y) \mapsto (x | y)$ est linéaire à gauche et ainsi, $(x, y) \mapsto (x | y)$ est un produit scalaire, donc :

Toute norme de E vérifiant l'identité du parallélogramme est hilbertienne.

Exercice 4

Si la famille (x_1, x_2, \dots, x_n) est liée, alors on a $|\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n)| = 0$ et l'inégalité est immédiate.

Supposons que la famille est libre, alors c'est une base de E (qui est de dimension n) et les x_k sont tous non nuls. Par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, on construit une nouvelle base orthonormée de E , $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ avec pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\varepsilon_{k+1} = x_{k+1} - (x_{k+1} | e_1)e_1 - (x_{k+1} | e_2)e_2 - \dots - (x_{k+1} | e_k)e_k \text{ et } e_{k+1} = \frac{1}{\|\varepsilon_{k+1}\|} \varepsilon_{k+1}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, \dots, e_n) &= \det_{\mathcal{B}} \left(e_1, e_2, \dots, \frac{1}{\|\varepsilon_n\|} [x_n - (x_n | e_1)e_1 - (x_n | e_2)e_2 - \dots - (x_n | e_{n-1})e_{n-1}] \right) \\ &= \det_{\mathcal{B}} \left(e_1, e_2, \dots, \frac{1}{\|\varepsilon_n\|} x_n \right) = \frac{1}{\|\varepsilon_n\|} \det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, x_n) \\ &= \frac{1}{\|\varepsilon_n\|} \det_{\mathcal{B}} \left(e_1, e_2, \dots, \frac{1}{\|\varepsilon_{n-1}\|} [x_{n-1} - (x_{n-1} | e_1)e_1 - (x_{n-1} | e_2)e_2 - \dots - (x_{n-1} | e_{n-2})e_{n-2}], x_n \right) \\ &= \frac{1}{\|\varepsilon_n\|} \det_{\mathcal{B}} \left(e_1, e_2, \dots, \frac{1}{\|\varepsilon_{n-1}\|} x_{n-1}, x_n \right) = \frac{1}{\|\varepsilon_{n-1}\| \cdot \|\varepsilon_n\|} \det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, \dots, x_{n-1}, x_n) \\ &\vdots \\ &= \frac{1}{\|\varepsilon_2\| \dots \|\varepsilon_{n-1}\| \cdot \|\varepsilon_n\|} \det_{\mathcal{B}}(e_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) \\ &= \frac{1}{\|\varepsilon_2\| \dots \|\varepsilon_{n-1}\| \cdot \|\varepsilon_n\|} \det_{\mathcal{B}} \left(\frac{1}{\|x_1\|} x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n \right) \\ &= \frac{1}{\|x_1\| \cdot \|\varepsilon_2\| \dots \|\varepsilon_{n-1}\| \cdot \|\varepsilon_n\|} \det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) \end{aligned}$$

Donc :

$$|\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n)| = \|x_1\| \cdot \|\varepsilon_2\| \dots \|\varepsilon_{n-1}\| \cdot \|\varepsilon_n\| \cdot |\det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, \dots, e_n)|$$

Or, $\det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, \dots, e_n) = \det P$ où $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ est la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' . On a $P^{-1} = {}^t P$, donc ${}^t P P = I_n$ et :

$$\det({}^t P P) = (\det {}^t P)(\det P) = (\det P)^2 = \det I_n = 1 \Rightarrow |\det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, \dots, e_n)| = |\det P| = 1.$$

Ainsi :

$$|\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n)| = \|x_1\| \cdot \|\varepsilon_2\| \dots \|\varepsilon_{n-1}\| \cdot \|\varepsilon_n\|.$$

Enfin, pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$:

$$x_k = \|\varepsilon_k\| e_k + (x_k | e_1)e_1 + (x_k | e_2)e_2 + \dots + (x_k | e_{k-1})e_{k-1}.$$

Et comme la famille (e_1, e_2, \dots, e_n) est orthonormée, on a :

$$\|x_k\|^2 = \|\varepsilon_k\|^2 + (x_k | e_1)^2 + (x_k | e_2)^2 + \dots + (x_k | e_{k-1})^2 \geq \|\varepsilon_k\|^2 \Rightarrow \|\varepsilon_k\| \leq \|x_k\|.$$

Donc, $\|\varepsilon_2\| \dots \|\varepsilon_{n-1}\| \cdot \|\varepsilon_n\| \leq \|x_2\| \dots \|x_{n-1}\| \cdot \|x_n\|$ et ainsi :

$$|\det_B(x_1, x_2, \dots, x_n)| \leq \|x_1\| \cdot \|x_2\| \dots \|x_n\|.$$

Finalement, on a bien dans tous les cas :

$$|\det_B(x_1, x_2, \dots, x_n)| \leq \|x_1\| \cdot \|x_2\| \dots \|x_n\|$$

Il est clair que si l'un des x_k est nul, alors $|\det_B(x_1, x_2, \dots, x_n)| = \|x_1\| \cdot \|x_2\| \dots \|x_n\| = 0$.

Si pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_k \neq 0$ et (x_1, x_2, \dots, x_n) est liée, alors on a $|\det_B(x_1, x_2, \dots, x_n)| = 0 < \|x_1\| \cdot \|x_2\| \dots \|x_n\|$.

Si pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_k \neq 0$ et (x_1, x_2, \dots, x_n) est libre, alors d'après ce qui précède, on a :

$$|\det_B(x_1, x_2, \dots, x_n)| = \|x_1\| \cdot \|x_2\| \dots \|x_n\| \Leftrightarrow \|x_2\| \dots \|x_n\| = \|\varepsilon_2\| \dots \|\varepsilon_{n-1}\| \cdot \|\varepsilon_n\|.$$

Comme pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $\|\varepsilon_k\| \leq \|x_k\|$, aucune de ces inégalité ne peut être stricte avec l'égalité ci-dessus.

Ainsi :

$$\begin{aligned} |\det_B(x_1, x_2, \dots, x_n)| = \|x_1\| \cdot \|x_2\| \dots \|x_n\| &\Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, \|x_k\| = \|\varepsilon_k\| \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, (x_k | e_1) = (x_k | e_2) = \dots = (x_k | e_{k-1}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, x_k \in (\text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_{k-1}))^\perp \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, x_k \in (\text{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}))^\perp \end{aligned}$$

Et ceci est vrai si et seulement si la famille (x_1, x_2, \dots, x_n) était initialement orthogonale.

Finalement :

$$|\det_B(x_1, x_2, \dots, x_n)| = \|x_1\| \cdot \|x_2\| \dots \|x_n\| \text{ si et seulement si l'un des } x_k \text{ est nul ou la famille } (x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ est orthogonale.}$$

Exercice 5

On a $f \in \mathcal{L}(E)$ et pour tout $(x, y) \in E^2$: $(x | y) = 0 \Rightarrow (f(x) | f(y)) = 0$.

Soit $(x, y) \in E^2$ tel que $\|x\| = \|y\| = 1$. On a alors :

$$\|x\|^2 = \|y\|^2 \Leftrightarrow \|x\|^2 - \|y\|^2 = 0 \Leftrightarrow (x + y | x - y) = 0.$$

Or :

$$(x + y | x - y) = 0 \Rightarrow (f(x + y) | f(x - y)) = 0.$$

Et :

$$(f(x + y) | f(x - y)) = 0 \Leftrightarrow (f(x) + f(y) | f(x) - f(y)) = 0 \Leftrightarrow \|f(x)\|^2 = \|f(y)\|^2.$$

Ainsi, pour tout $(x, y) \in E^2$ tel que $\|x\| = \|y\| = 1$, on a $\|f(x)\| = \|f(y)\|$, donc $x \mapsto \|f(x)\|$ est constante sur la sphère unité de centre 0_E .

Autrement dit, il existe un réel positif k tel que pour tout $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$, on a, $\|f(x)\| = k$.

Mais alors, pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$, on a :

$$\|f(x)\| = \left\| f\left(\|x\| \frac{x}{\|x\|}\right) \right\| = \|x\| \left\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| = \left\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \|x\| = k \|x\|.$$

Et bien sûr, $\|f(0_E)\| = \|0_E\| = 0 = k \|0_E\|$ et ainsi :

Il existe bien un réel positif k tel que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = k \|x\|$.

Réciproquement, supposons qu'il existe un réel positif k tel que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = k \|x\|$.

Soit $(x, y) \in E^2$ tel que $(x | y) = 0$. On a alors :

$$\begin{aligned} (f(x) | f(y)) &= \frac{1}{2} (\|f(x) + f(y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2) = \frac{1}{2} (\|f(x+y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2) \\ &= \frac{1}{2} (k^2 \|x+y\|^2 - k^2 \|x\|^2 - k^2 \|y\|^2) = \frac{k^2}{2} (\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) = k^2 (x | y) = 0 \end{aligned}$$

Et ainsi, f conserve l'orthogonalité :

La réciproque est vraie.

Exercice 6

1) L'application $(A, B) \mapsto \langle A, B \rangle$ définit un produit scalaire sur E : c'est du cours, c'est même le produit scalaire canonique sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2) Appelons S l'ensemble des solutions du problème, soit :

$$S = \{P \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \forall A \in E, \|A\| = \|P^{-1}AP\|\}.$$

Remarquons déjà que S est non vide car contient au moins I_n .

Soit $P \in S$. On a $\|A\| = \|P^{-1}AP\|$ pour toute A de E . Si on pose $B = P^{-1}A$ (donc $A = PB$), on a $\|PB\| = \|BP\|$ et comme B décrit E quand A décrit E , on peut écrire :

$$S = \{P \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \forall B \in E, \|PB\| = \|BP\|\}.$$

Alors, si $P \in S$, on a pour tout $(B_1, B_2) \in E^2$, $\|PB_1\| = \|B_1P\|$, $\|PB_2\| = \|B_2P\|$ et :

$$\begin{aligned} \|P(B_1 + B_2)\| = \|(B_1 + B_2)P\| &\Leftrightarrow \|PB_1 + PB_2\|^2 = \|B_1P + B_2P\|^2 \\ &\Leftrightarrow \|PB_1\|^2 + 2\langle PB_1, PB_2 \rangle + \|PB_2\|^2 = \|B_1P\|^2 + 2\langle B_1P, B_2P \rangle + \|B_2P\|^2 \\ &\Leftrightarrow \langle PB_1, PB_2 \rangle = \langle B_1P, B_2P \rangle \quad (\text{avec } \|PB_1\|^2 = \|B_1P\|^2 \text{ et } \|PB_2\|^2 = \|B_2P\|^2) \end{aligned}$$

Réciproquement, si pour tout $(B_1, B_2) \in E^2$, $\langle PB_1, PB_2 \rangle = \langle B_1P, B_2P \rangle$, alors pour toute matrice $B \in E$, on a $\|PB\|^2 = \|BP\|^2$ (avec $B = B_1 = B_2$). Ainsi :

$$S = \{P \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \forall (B_1, B_2) \in E^2, \langle PB_1, PB_2 \rangle = \langle B_1P, B_2P \rangle\}.$$

Notons $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, la base canonique de E . Si $P \in S$, on a alors $\langle PE_{i,j}, PE_{i',j'} \rangle = \langle E_{i,j}P, E_{i',j'}P \rangle$ pour tous i, j, i', j' de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Réciproquement, supposons qu'une matrice P de $GL_n(\mathbb{R})$ vérifie $\langle PE_{i,j}, PE_{i',j'} \rangle = \langle E_{i,j}P, E_{i',j'}P \rangle$ pour tous i, j, i', j' de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Alors, pour tout $(B_1, B_2) \in E^2$ telles que $B_1 = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \alpha_{i,j} E_{i,j}$ et $B_2 = \sum_{1 \leq i',j' \leq n} \beta_{i',j'} E_{i',j'}$, on a :

$$\begin{aligned} \langle PB_1, PB_2 \rangle &= \left\langle \sum_{1 \leq i,j \leq n} \alpha_{i,j} PE_{i,j}, \sum_{1 \leq i',j' \leq n} \beta_{i',j'} PE_{i',j'} \right\rangle = \sum_{1 \leq i,j,i',j' \leq n} \alpha_{i,j} \beta_{i',j'} \langle PE_{i,j}, PE_{i',j'} \rangle \\ &= \sum_{1 \leq i,j,i',j' \leq n} \alpha_{i,j} \beta_{i',j'} \langle E_{i,j}P, E_{i',j'}P \rangle = \left\langle \sum_{1 \leq i,j \leq n} \alpha_{i,j} E_{i,j}P, \sum_{1 \leq i',j' \leq n} \beta_{i',j'} E_{i',j'}P \right\rangle = \langle B_1P, B_2P \rangle \end{aligned}$$

Donc, $P \in S$. Ainsi :

$$S = \left\{ P \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \forall (i, j, i', j') \in \llbracket 1, n \rrbracket^4, \langle PE_{i,j}, PE_{i',j'} \rangle = \langle E_{i,j}P, E_{i',j'}P \rangle \right\}.$$

Soit maintenant une matrice P quelconque de E . Notons C_1, \dots, C_n ses colonnes et L_1, \dots, L_n ses lignes.

Pour tout $(i, j, i', j') \in \llbracket 1, n \rrbracket^4$, $PE_{i,j}$ (resp. $PE_{i',j'}$) est la matrice dont toutes les colonnes sont nulles sauf la $j^{\text{ième}}$ (resp. la $j'^{\text{ième}}$) qui est C_i (resp. $C_{i'}$), donc :

$$\langle PE_{i,j}, PE_{i',j'} \rangle = \delta_{j,j'} (C_i \mid C_{i'})$$

où $(\cdot \mid \cdot)$ est le produit scalaire canonique de \mathbb{R}^n .

De la même façon, pour tout $(i, j, i', j') \in \llbracket 1, n \rrbracket^4$, $E_{i,j}P$ (resp. $E_{i',j'}P$) est la matrice dont toutes les lignes sont nulles sauf la $i^{\text{ième}}$ (resp. la $i'^{\text{ième}}$) qui est L_j (resp. $L_{j'}$), donc :

$$\langle E_{i,j}P, E_{i',j'}P \rangle = \delta_{i,i'} (L_j \mid L_{j'}).$$

Alors :

$$\begin{aligned} P \in S &\Leftrightarrow \forall (i, j, i', j') \in \llbracket 1, n \rrbracket^4, \langle PE_{i,j}, PE_{i',j'} \rangle = \langle E_{i,j}P, E_{i',j'}P \rangle \\ &\Leftrightarrow \forall (i, j, i', j') \in \llbracket 1, n \rrbracket^4, \delta_{j,j'} (C_i \mid C_{i'}) = \delta_{i,i'} (L_j \mid L_{j'}) \end{aligned}$$

Or, si $i \neq i'$ et $j \neq j'$, $\delta_{j,j'} = \delta_{i,i'} = 0$, donc $\delta_{j,j'} (C_i \mid C_{i'}) = \delta_{i,i'} (L_j \mid L_{j'})$. D'où :

$$P \in S \Leftrightarrow \begin{cases} \forall (i, i') \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq i', (C_i \mid C_{i'}) = 0 \\ \forall (j, j') \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, j \neq j', (L_j \mid L_{j'}) = 0 \\ \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, (C_i \mid C_i) = (L_j \mid L_j) \end{cases}$$

Soit :

$$P \in S \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \begin{cases} \forall (i, i') \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq i', (C_i \mid C_{i'}) = \delta_{i,i'} \lambda^2 \\ \forall (j, j') \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, j \neq j', (L_j \mid L_{j'}) = \delta_{j,j'} \lambda^2 \end{cases}$$

Remarquons que :

$$\forall (i, i') \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq i', (C_i \mid C_{i'}) = \delta_{i,i'} \lambda^2 \Leftrightarrow {}^t P P = \lambda^2 I_n \Leftrightarrow \forall (j, j') \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, j \neq j', (L_j \mid L_{j'}) = \delta_{j,j'} \lambda^2$$

Finalement :

$$P \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}_+^*, {}^t P P = \lambda^2 I_n.$$

Enfin, si ${}^t P P = \lambda^2 I_n$ avec $\lambda \neq 0$ alors P est inversible et donc :

Les solutions du problème sont les matrices $P \in E$ telles qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que ${}^t P P = \lambda^2 I_n$.

Remarquons que ${}^t P P = \lambda^2 I_n$ revient à $\frac{1}{\lambda} P \in O_n(\mathbb{R})$.

Exercice 7

On a d'une part $x^2 f(x) = x^{3/2} (x^{1/2} f(x))$, donc, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left(\int_0^1 x^2 f(x) dx \right)^2 \leq \left(\int_0^1 x^3 dx \right) \left(\int_0^1 x f(x)^2 dx \right) = \frac{1}{4} \int_0^1 x f(x)^2 dx.$$

Et, comme f est positive sur $[0;1]$, on peut écrire $x f(x)^2 = x f(x)^{1/2} f(x)^{3/2}$, d'où, toujours d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left(\int_0^1 x f(x)^2 dx \right)^2 \leq \left(\int_0^1 x^2 f(x) dx \right) \left(\int_0^1 f(x)^3 dx \right).$$

Alors, comme f est positive sur $[0;1]$, on a $\int_0^1 x f(x)^2 dx \geq 0$ et :

$$4 \left(\int_0^1 x^2 f(x) dx \right)^2 \left(\int_0^1 x f(x)^2 dx \right) \leq \left(\int_0^1 x f(x)^2 dx \right)^2 \leq \left(\int_0^1 x^2 f(x) dx \right) \left(\int_0^1 f(x)^3 dx \right) \quad (*).$$

Enfin, comme f est positive et continue sur $[0;1]$, $x \mapsto x^2 f(x)$ est positive et continue sur $[0;1]$, donc $\int_0^1 x^2 f(x) dx \geq 0$ et si $\int_0^1 x^2 f(x) dx = 0$, alors $x \mapsto x^2 f(x)$ est nulle sur $[0;1]$, donc f l'est aussi et dans ce cas, l'inégalité recherchée est vérifiée (c'est même une égalité, les deux membres étant nuls).

Si f n'est pas nulle sur $[0;1]$, alors $\int_0^1 x^2 f(x) dx > 0$ et on peut simplifier (*), ce qui donne :

$$4 \left(\int_0^1 x^2 f(x) dx \right) \left(\int_0^1 x f(x)^2 dx \right) \leq \int_0^1 f(x)^3 dx$$

Exercice 8

1) Quels que soient P, Q de $\mathbb{R}[X]$, l'application $t \mapsto \sqrt{1-t} P(t) Q(t)$ est continue sur $[-1,1]$ et l'application $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t}}$ est continue sur $]-1,1]$ et intégrable sur $[-1,1]$, donc $t \mapsto \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} P(t) Q(t)$ est continue sur $]-1,1]$ et intégrable sur $[-1,1]$, et ainsi :

L'application $(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} P(t) Q(t) dt$ est bien définie sur $\mathbb{R}[X]^2$.

L'application $(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} P(t) Q(t) dt$ est symétrique (par commutativité du produit) et bilinéaire (par linéarité de l'intégrale). De plus, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ et tout $t \in]-1, 1[$, $\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} P(t)^2 \geq 0$, donc :

$$\langle P, P \rangle = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} P(t)^2 dt \geq 0.$$

Enfin, si $\langle P, P \rangle = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} P(t)^2 dt = 0$, alors comme l'application $t \mapsto \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} P(t)^2$ est continue et positive sur $]-1, 1[$, elle est nulle sur cet intervalle. Comme $\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$ ne s'annule qu'en 1, P s'annule en tout point de $]-1, 1[$, donc admet une infinité de racines, donc le polynôme P est nul.

Finalement, $(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle$ est une forme bilinéaire, symétrique, définie positive sur $\mathbb{R}[X]$, donc :

$$\boxed{(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}[X].}$$

2) Remarquons que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$\phi(P) = (X^2 - 1)P'' + (2X + 1)P' = (X^2 - 1)P'' + 2X P' + P' = [(X^2 - 1)P']' + P'.$$

Donc, pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, en posant $R = (X^2 - 1)P'$, on a :

$$\langle \phi(P), Q \rangle = \langle R' + P', Q \rangle = \langle R', Q \rangle + \langle P', Q \rangle.$$

Et, pour tout $[a, b] \subset]-1, 1[$, $t \mapsto R(t)$ et $t \mapsto \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} Q(t)$ sont C^1 sur $[a, b]$, et par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_a^b R'(t) \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} Q(t) dt &= \left[R(t) \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} Q(t) \right]_a^b - \int_a^b R(t) \left[\frac{-\frac{2}{(1+t)^2}}{2\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}} Q(t) + \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} Q'(t) \right] dt \\ &= \left[(t^2 - 1)P'(t) \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} Q(t) \right]_a^b - \int_a^b (t^2 - 1) \left[-\frac{1}{(1+t)^{3/2} \sqrt{1-t}} Q(t) + \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} Q'(t) \right] dt \\ &= \left[(t-1)\sqrt{1-t^2} P'(t) Q(t) \right]_a^b - \int_a^b \frac{(1-t^2)}{(1+t)^{3/2} \sqrt{1-t}} P'(t) Q(t) dt + \int_a^b (1-t)\sqrt{1-t^2} P'(t) Q'(t) dt \\ &= \left[(t-1)\sqrt{1-t^2} P'(t) Q(t) \right]_a^b - \int_a^b \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} P'(t) Q(t) dt + \int_a^b (1-t)\sqrt{1-t^2} P'(t) Q'(t) dt \end{aligned}$$

Et, en faisant tendre a vers -1 et b vers 1 , on obtient :

$$\int_{-1}^1 R'(t) \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} Q(t) dt = \left[(t-1)\sqrt{1-t^2} P'(t) Q(t) \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} P'(t) Q(t) dt + \int_{-1}^1 (1-t)\sqrt{1-t^2} P'(t) Q'(t) dt.$$

Soit :

$$\langle R', Q \rangle = -\langle P', Q \rangle + \int_{-1}^1 (1-t)\sqrt{1-t^2} P'(t) Q'(t) dt.$$

Et encore :

$$\langle \phi(P), Q \rangle = \langle R', Q \rangle + \langle P', Q \rangle = \int_{-1}^1 (1-t)\sqrt{1-t^2} P'(t) Q'(t) dt.$$

On a alors :

$$\langle P, \phi(Q) \rangle = \langle \phi(Q), P \rangle = \int_{-1}^1 (1-t)\sqrt{1-t^2} Q'(t) P'(t) dt = \int_{-1}^1 (1-t)\sqrt{1-t^2} P'(t) Q'(t) dt = \langle \phi(P), Q \rangle.$$

Ainsi, pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, $\langle P, \phi(Q) \rangle = \langle \phi(P), Q \rangle$, donc :

L'application ϕ est symétrique pour le produit scalaire considéré.

3) On a $\phi(1) = 0$, $\phi(X) = 2X + 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$:

$$\phi(X^n) = (X^2 - 1)n(n-1)X^{n-2} + (2X + 1)nX^{n-1} = n(n+1)X^n + nX^{n-1} - n(n-1)X^{n-2}.$$

Ainsi, $\phi(1) = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\deg(\phi(X^n)) = n$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par ϕ , d'où :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, ϕ induit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Notons ϕ_n cet endomorphisme induit. Comme ϕ est symétrique (pour le produit scalaire considéré), ϕ_n l'est aussi et donc, d'après le théorème spectral (on est dans un \mathbb{R} -espace vectoriel) :

L'endomorphisme induit ϕ_n est diagonalisable.

Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P_k \in \mathbb{R}[X]$ un éventuel polynôme unitaire (non nul) de degré k tel que $\phi(P_k) = \lambda P_k$.

- Si $k = 0$, alors $P_0 = 1$ et on a $\phi(P_0) = 0 = 0P_0$, donc 0 est valeur propre et 1 est un vecteur propre associé.
- Si $k = 1$, alors $P_1 = X + \alpha$ et on a $\phi(P_1) = \phi(X) = 2X + 1 = 2\left(X + \frac{1}{2}\right)$, donc 2 est valeur propre et $P_1 = X + \frac{1}{2}$ est un vecteur propre associé.
- Si $k \geq 2$, on peut poser $P_k = X^k + Q_k$ avec $\deg Q_k \leq k-1$ et :

$$\phi(P_k) = \phi(X^k) + \phi(Q_k) = k(k+1)X^k + kX^{k-1} - k(k-1)X^{k-2} + \phi(Q_k).$$

Comme $Q_k \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$, $\phi(Q_k) \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$, donc $\deg[kX^{k-1} - k(k-1)X^{k-2} + \phi(Q_k)] \leq k-1$. Alors :

$$\phi(P_k) = \lambda P_k \Leftrightarrow k(k+1)X^k + kX^{k-1} - k(k-1)X^{k-2} + \phi(Q_k) = \lambda X^k + \lambda Q_k \Rightarrow \lambda = k(k+1).$$

Remarquons que dans tous les cas, si un polynôme P_k de degré k est un vecteur propre de ϕ , alors la valeur propre associée est $k(k+1)$.

Réciproquement, soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

On a vu plus haut que $\phi(1) = 0$ et pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, $\deg(\phi(X^d)) = d$, donc pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $d \in \mathbb{N}$, on a :

- $\phi(P) = 0$ si $d = 0$;
- $\deg(\phi(P)) = d$ si $d > 0$.

Ceci prouve déjà que $\phi(P) = 0$ si et seulement si P est constant. Donc :

0 est valeur propre de ϕ_n , de sous-espace propre associé la droite $\text{Vect}(1) (= \ker \phi)$.

De plus, $k(k+1) = 0$ si et seulement si $k = 0$.

On suppose maintenant que $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ (donc $k(k+1) \neq 0$).

Cherchons alors un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire, de degré $d \in \mathbb{N}^*$ et tel que $\phi(P) = k(k+1)P$.

On a vu plus haut que le terme de plus haut degré de $\phi(P)$ est $d(d+1)X^d$, et celui de $k(k+1)P$ est $k(k+1)X^d$, donc $d(d+1) = k(k+1)$, qui implique immédiatement que $d = k$ (car $x \mapsto x(x+1)$ est strictement croissante donc injective sur \mathbb{R}_+). Ainsi, P est de degré k .

Si $k = 1$, alors, comme plus haut, $\phi(P) = 2P$ donne $P = X + \frac{1}{2}$. Donc :

$$1 \times (1+1) = 2 \text{ est valeur propre de } \phi_n, \text{ de sous-espace propre associé la droite } \text{Vect}\left(X + \frac{1}{2}\right).$$

Si $k = 2$, $P = X^2 + aX + b$ et :

$$\phi(P) = k(k+1)P \Leftrightarrow 6X^2 + 2X - 2 + a(2X + 1) = 6X^2 + 6aX + 6b \Leftrightarrow \begin{cases} 2(a+1) = 6a \\ a-2 = 6b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1/2 \\ b = -1/4 \end{cases}$$

Donc :

$$2 \times (2+1) = 6 \text{ est valeur propre de } \phi_n, \text{ de sous-espace propre associé la droite } \text{Vect}\left(X^2 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{4}\right).$$

Si $k \geq 3$, $P = X^k + \sum_{i=0}^{k-1} a_i X^i$ et :

$$\begin{aligned} \phi(P) = k(k+1)P &\Leftrightarrow \phi\left(X^k + \sum_{i=0}^{k-1} a_i X^i\right) = k(k+1)\left(X^k + \sum_{i=0}^{k-1} a_i X^i\right) \\ &\Leftrightarrow \phi(X^k) + \sum_{i=0}^{k-1} a_i \phi(X^i) = k(k+1)X^k + k(k+1) \sum_{i=0}^{k-1} a_i X^i \\ &\Leftrightarrow k(k+1)X^k + kX^{k-1} - k(k-1)X^{k-2} + \sum_{i=2}^{k-1} a_i [i(i+1)X^i + iX^{i-1} - i(i-1)X^{i-2}] \\ &\quad + a_1(2X + 1) = k(k+1)X^k + k(k+1) \sum_{i=0}^{k-1} a_i X^i \\ &\Leftrightarrow kX^{k-1} - k(k-1)X^{k-2} + \sum_{i=0}^{k-1} a_i [i(i+1)X^i + iX^{i-1} - i(i-1)X^{i-2}] = k(k+1) \sum_{i=0}^{k-1} a_i X^i \end{aligned}$$

Ceci équivaut au système :

$$\begin{cases} a_{k-1} = \frac{1}{2} \\ a_{k-2} = \frac{(k-1)[a_{k-1} - k]}{2(2k-1)} \\ a_i = \frac{(i+1)[a_{i+1} - (i+2)a_{i+2}]}{k(k+1) - i(i+1)} \quad \forall i \in \llbracket 2, k-3 \rrbracket \\ a_1 = \frac{2a_2 - 6a_3}{k(k+1)} \\ a_0 = -\frac{2a_2}{k(k+1)} \end{cases}$$

Ce système admet une et une seule solution et ainsi, il existe un unique polynôme unitaire P_k tel que $\phi(P_k) = k(k+1)P_k$, donc :

$k(k+1)$ est valeur propre de ϕ_n , de sous-espace propre associé la droite $\text{Vect}(P_k)$.

Finalement, les valeurs propres de ϕ_n sont les $k(k+1)$ avec $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et les sous-espaces propre associé sont droites $\text{Vect}(P_k)$ avec $\deg(P_k) = k$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Comme $\mathbb{R}_n[X] = \bigoplus_{k=0}^n \text{Vect}(P_k)$, la famille (P_0, P_1, \dots, P_n) est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ de vecteurs propres de ϕ , telle que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\deg P_k = k$.

Enfin, soient $i, j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tels que $i \neq j$. D'après ce que l'on a vu plus haut $i(i+1) \neq j(j+1)$ et :

$$\langle P_i, \phi(P_j) \rangle = \langle \phi(P_i), P_j \rangle \Leftrightarrow \langle P_i, j(j+1)P_j \rangle = \langle i(i+1)P_i, P_j \rangle \Leftrightarrow [j(j+1) - i(i+1)] \langle P_i, P_j \rangle = 0.$$

Et comme $j(j+1) - i(i+1) \neq 0$, on obtient $\langle P_i, P_j \rangle = 0$, donc les P_k sont orthogonaux deux à deux.

En définitive :

Il existe une base orthogonale de vecteurs propres (P_0, P_1, \dots, P_n) telle que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\deg P_k = k$.

Exercice 9

1) Soient $f, g \in E$. On a :

$$(|f| - |g|)^2 \geq 0 \Rightarrow |fg| \leq \frac{1}{2}(f^2 + g^2).$$

Comme f^2 et g^2 sont intégrables sur \mathbb{R} , fg l'est aussi par comparaison, donc $\langle f, g \rangle$ est défini :

L'application $(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t) dt$ est bien définie sur E^2 .

L'application $(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t) dt$ est symétrique (par commutativité du produit) et bilinéaire (par linéarité de l'intégrale). De plus, pour tout $f \in E$, $f^2 \geq 0$, donc $\langle f, f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)^2 dt \geq 0$.

Enfin, si $\langle f, f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)^2 dt = 0$, alors comme f est continue sur \mathbb{R} , f^2 est continue et positive sur \mathbb{R} , elle est donc nulle. Ainsi, $\langle f, f \rangle = 0$ implique $f = 0$.

Finalement, $(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle$ est une forme bilinéaire, symétrique, définie positive sur E , donc :

$(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle$ est un produit scalaire sur E .

2) Remarquons déjà que comme Q_r est inversible, 0 n'est pas valeur propre. De plus, par symétrie du produit scalaire, Q_r est symétrique (réelle), donc, d'après le théorème spectral, elle est diagonalisable et toutes ses valeurs propres sont réelles. Ainsi, prouver que la plus petite valeur propre de Q_r est strictement positive

revient à prouver que toutes les valeurs propres de Q_r sont positives (forcément strictement d'après ce qui précède). Soit donc $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de Q_r et $X = (x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{R}^r$ un vecteur propre associé (non nul).

On a alors, avec la linéarité à droite du produit scalaire et en posant $\varphi = \sum_{j=1}^r x_j \varphi_j$:

$$Q_r X = \lambda X \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, \sum_{j=1}^r \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle x_j = \left\langle \varphi_i, \sum_{j=1}^r x_j \varphi_j \right\rangle = \langle \varphi_i, \varphi \rangle = \lambda x_i.$$

Alors :

$$\sum_{i=1}^r x_i \langle \varphi_i, \varphi \rangle = \lambda \sum_{i=1}^r x_i^2 \Leftrightarrow \left\langle \sum_{i=1}^r x_i \varphi_i, \varphi \right\rangle = \lambda \sum_{i=1}^r x_i^2 \Leftrightarrow \langle \varphi, \varphi \rangle = \lambda \sum_{i=1}^r x_i^2.$$

Comme $X \neq 0$, on a $\sum_{i=1}^r x_i^2 > 0$ et, avec $\langle \varphi, \varphi \rangle \geq 0$, on obtient :

$$\lambda = \frac{\langle \varphi, \varphi \rangle}{\sum_{i=1}^r x_i^2} \geq 0.$$

Ainsi, toutes les valeurs propres de Q_r sont positives, donc strictement positives et :

La plus petite valeur propre de Q_r est strictement positive.

3) On suppose toujours Q_r inversible et on veut :

$$\varphi_{r+1} \in \text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_r) \Leftrightarrow Q_{r+1} \text{ est non inversible.}$$

Dans ce qui suit, notons C_1, \dots, C_r, C_{r+1} les colonnes Q_{r+1} et C_1', \dots, C_r' celles de Q_r .

(\Rightarrow) On suppose que $\varphi_{r+1} \in \text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$.

Il existe donc $(a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{R}^r$ tel que $\varphi_{r+1} = a_1 \varphi_1 + \dots + a_r \varphi_r$, et :

$$C_{r+1} = \begin{pmatrix} \langle \varphi_1, \varphi_{r+1} \rangle \\ \vdots \\ \langle \varphi_r, \varphi_{r+1} \rangle \\ \langle \varphi_{r+1}, \varphi_{r+1} \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \varphi_1, a_1 \varphi_1 + \dots + a_r \varphi_r \rangle \\ \vdots \\ \langle \varphi_r, a_1 \varphi_1 + \dots + a_r \varphi_r \rangle \\ \langle \varphi_{r+1}, a_1 \varphi_1 + \dots + a_r \varphi_r \rangle \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle \varphi_r, \varphi_1 \rangle \\ \langle \varphi_{r+1}, \varphi_1 \rangle \end{pmatrix} + \dots + a_r \begin{pmatrix} \langle \varphi_1, \varphi_r \rangle \\ \vdots \\ \langle \varphi_r, \varphi_r \rangle \\ \langle \varphi_{r+1}, \varphi_r \rangle \end{pmatrix} = a_1 C_1 + \dots + a_r C_r.$$

Donc, une colonne de Q_{r+1} est combinaison linéaire des autres, ce qui prouve que :

$$Q_{r+1} \text{ n'est pas inversible.}$$

(\Leftarrow) On suppose que Q_{r+1} n'est pas inversible.

Alors, les colonnes de Q_{r+1} sont liées, autrement dit, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_r, \lambda_{r+1}) \in \mathbb{R}^{r+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ tel que :

$$\lambda_1 C_1 + \dots + \lambda_r C_r + \lambda_{r+1} C_{r+1} = 0.$$

Si $\lambda_{r+1} = 0$, alors $\lambda_1 C_1 + \dots + \lambda_r C_r = 0$ et en supprimant la dernière coordonnée de chaque colonne, on obtient $\lambda_1 C_1' + \dots + \lambda_r C_r' = 0$. Or, Q_r est inversible, donc ses colonnes forment une famille libre et ainsi, on a $\lambda = \dots = \lambda_r = 0 = \lambda_{r+1}$, ce qui est absurde car les λ_k ne sont pas tous nuls.

Ainsi, $\lambda_{r+1} \neq 0$ et on peut écrire :

$$C_{r+1} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_{r+1}}C_1 - \dots - \frac{\lambda_r}{\lambda_{r+1}}C_r = a_1C_1 + \dots + a_rC_r.$$

En posant $\varphi = a_1\varphi_1 + \dots + a_r\varphi_r$, ceci implique que pour tout $i \in \llbracket 1, r+1 \rrbracket$:

$$\langle \varphi_i, \varphi_{r+1} \rangle = a_1 \langle \varphi_i, \varphi_1 \rangle + \dots + a_r \langle \varphi_i, \varphi_r \rangle = \langle \varphi_i, a_1\varphi_1 + \dots + a_r\varphi_r \rangle = \langle \varphi_i, \varphi \rangle.$$

En particulier $\langle \varphi_{r+1}, \varphi_{r+1} \rangle = \langle \varphi_{r+1}, \varphi \rangle$ et :

$$\sum_{i=1}^r a_i \langle \varphi_i, \varphi_{r+1} \rangle = \sum_{i=1}^r a_i \langle \varphi_i, \varphi \rangle \Leftrightarrow \left\langle \sum_{i=1}^r a_i \varphi_i, \varphi_{r+1} \right\rangle = \langle \varphi, \varphi_{r+1} \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^r a_i \varphi_i, \varphi \right\rangle = \langle \varphi, \varphi \rangle.$$

Alors :

$$\langle \varphi_{r+1} - \varphi, \varphi_{r+1} - \varphi \rangle = \langle \varphi_{r+1}, \varphi_{r+1} \rangle - 2\langle \varphi_{r+1}, \varphi \rangle + \langle \varphi, \varphi \rangle = 0.$$

Et donc $\varphi_{r+1} = \varphi = a_1\varphi_1 + \dots + a_r\varphi_r$, d'où :

$$\varphi_{r+1} \in \text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_r).$$

Finalement, on a bien :

$$\varphi_{r+1} \in \text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_r) \text{ si et seulement si } Q_{r+1} \text{ est non inversible.}$$

4) Pour tout $n \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $\varphi_n \in \text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$.

Prouvons par récurrence forte sur k que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

- Pour $k=1$, comme Q_r est inversible et Q_{r+1} ne l'est pas, on a $\varphi_{r+1} \in \text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$ d'après la question précédente, donc il existe $(a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{R}^r$ tel que $\varphi_{r+1} = a_1\varphi_1 + \dots + a_r\varphi_r$.

Ainsi, la propriété est vraie au rang 1.

- Supposons la propriété vraie jusqu'à un rang $k \in \mathbb{N}^*$.

Posons $\psi = a_1\varphi_{1+k} + \dots + a_r\varphi_{r+k} = \sum_{i=1}^r a_i\varphi_{i+k}$. On a :

$$\langle \psi, \varphi_{r+k+1} \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^r a_i \varphi_{i+k}, \varphi_{r+k+1} \right\rangle = \sum_{i=1}^r a_i \langle \varphi_{i+k}, \varphi_{r+k+1} \rangle = \sum_{i=1}^r a_i \langle \varphi_i, \varphi_{r+1} \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^r a_i \varphi_i, \varphi_{r+1} \right\rangle = \langle \varphi_{r+1}, \varphi_{r+1} \rangle$$

$$\langle \psi, \psi \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^r a_i \varphi_{i+k}, \sum_{j=1}^r a_j \varphi_{j+k} \right\rangle = \sum_{1 \leq i, j \leq r} a_i a_j \langle \varphi_{i+k}, \varphi_{j+k} \rangle = \sum_{1 \leq i, j \leq r} a_i a_j \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^r a_i \varphi_i, \sum_{j=1}^r a_j \varphi_j \right\rangle = \langle \varphi_{r+1}, \varphi_{r+1} \rangle$$

$$\langle \varphi_{r+k+1}, \varphi_{r+k+1} \rangle = \langle \varphi_{r+1}, \varphi_{r+1} \rangle$$

Ainsi, $\langle \psi, \psi \rangle = \langle \psi, \varphi_{r+k+1} \rangle = \langle \varphi_{r+k+1}, \varphi_{r+k+1} \rangle = \langle \varphi_{r+1}, \varphi_{r+1} \rangle$ et :

$$\langle \psi - \varphi_{r+k+1}, \psi - \varphi_{r+k+1} \rangle = \langle \psi, \psi \rangle - 2\langle \psi, \varphi_{r+k+1} \rangle + \langle \varphi_{r+k+1}, \varphi_{r+k+1} \rangle = 0.$$

Ceci prouve que $\psi - \varphi_{r+k+1} = 0$, donc que :

$$\varphi_{r+k+1} = \psi = a_1\varphi_{1+k} + \dots + a_r\varphi_{r+k}.$$

Or, par hypothèse de récurrence, $\varphi_{i+k} \in \text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$ pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, donc :

$$\varphi_{r+k+1} = \sum_{i=1}^r a_i \varphi_{i+k} \in \text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_r).$$

Ainsi, la propriété est vraie au rang $k+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Ceci permet de conclure que :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_n \in \text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$.