Corrigés des TD du chapitre 16

Exercice 1

L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique. On note $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\sum_{k=1}^n a_{i,k} a_{k,j} = \sum_{k=1}^n (\alpha_i \alpha_k \alpha_k \alpha_j) = \alpha_i \alpha_j \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k^2 \right) = \alpha_i \alpha_j = a_{i,j}.$$

Donc, $A^2 = A$ et A est une matrice de projecteur.

De plus, si on pose $e_1 = \alpha_1 \varepsilon_1 + \dots + \alpha_n \varepsilon_n$, on a pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$f(\varepsilon_j) = \sum_{k=1}^n a_{k,j} \varepsilon_k = \sum_{k=1}^n \alpha_k \alpha_j \varepsilon_k = \alpha_j \sum_{k=1}^n \alpha_k \varepsilon_k = \alpha_j e_1.$$

Comme $\sum_{k=1}^n \alpha_k^2 = 1$, les α_j ne sont pas tous nuls (et $e_1 \neq 0$), donc :

$$\text{Im } f = \text{Vect}(e_1).$$

Par le théorème du rang, on a $\dim \ker f = n - \text{rg}(f) = n - 1$.

Soit $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\alpha_p \neq 0$. Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$f(\alpha_p \varepsilon_j - \alpha_j \varepsilon_p) = \alpha_p f(\varepsilon_j) - \alpha_j f(\varepsilon_p) = \alpha_p \alpha_j e_1 - \alpha_j \alpha_p e_1 = 0.$$

Donc, $\alpha_p \varepsilon_j - \alpha_j \varepsilon_p \in \ker f$ et si $\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}, \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n$ sont des réels, on a :

$$\sum_{j=1, j \neq p}^n \lambda_j (\alpha_p \varepsilon_j - \alpha_j \varepsilon_p) = 0 \iff \sum_{j=1, j \neq p}^n \alpha_p \lambda_j \varepsilon_j - \left(\sum_{j=1, j \neq p}^n \lambda_j \alpha_j \right) \varepsilon_p = 0.$$

Comme $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est libre, ceci donne $\alpha_p \lambda_j = 0$, soit $\lambda_j = 0$ (car $\alpha_p \neq 0$) pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{p\}$.

Ainsi, la famille $(\alpha_p \varepsilon_j - \alpha_j \varepsilon_p)_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{p\}}$ est une famille libre de $n-1$ vecteurs de $\ker f$, qui est de dimension

$n-1$, donc $(\alpha_p \varepsilon_j - \alpha_j \varepsilon_p)_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{p\}}$ est une base de $\ker f$.

Enfin, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{p\}$, on a :

$$(\alpha_p \varepsilon_j - \alpha_j \varepsilon_p \mid e_1) = \alpha_p (\varepsilon_j \mid e_1) - \alpha_j (\varepsilon_p \mid e_1) = \alpha_p \alpha_j - \alpha_j \alpha_p = 0.$$

Donc, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{p\}$, $\alpha_p \varepsilon_j - \alpha_j \varepsilon_p \perp e_1$, ce qui prouve que :

$$\ker f \perp \text{Im } f.$$

Finalement :

L'endomorphisme canoniquement associé à A est le projecteur orthogonal sur $\text{Vect}(\alpha_1 \varepsilon_1 + \dots + \alpha_n \varepsilon_n)$.

Exercice 2

1) L'application $(f, g) \mapsto (f | g)$ est clairement symétrique et bilinéaire (du fait de la linéarité de la dérivation et de l'intégrale). De plus, pour tout $f \in E$, on a $(f | f) = \int_0^1 f(t)^2 dt + \int_0^1 f'(t)^2 dt \geq 0$ et, comme $\int_0^1 f(t)^2 dt \geq 0$ et $\int_0^1 f'(t)^2 dt \geq 0$, on a :

$$(f | f) = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f(t)^2 dt = \int_0^1 f'(t)^2 dt = 0.$$

Or, f^2 est positive et continue sur $[0;1]$, donc :

$$\int_0^1 f(t)^2 dt = 0 \Leftrightarrow f^2 = 0 \Leftrightarrow f = 0.$$

Ainsi, $(f | f) = 0$ si et seulement si $f = 0$, et finalement, $(f, g) \mapsto (f | g)$ est une forme bilinéaire, symétrique définie positive sur E , donc :

$$(f, g) \mapsto (f | g) \text{ définit un produit scalaire sur } E.$$

2) Remarquons que W est l'espace vectorielle des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 : $y'' - y = 0$.

Si on note $f_1 : [0;1] \rightarrow \mathbb{R} ; t \mapsto e^t$ et $f_2 : [0;1] \rightarrow \mathbb{R} ; t \mapsto e^{-t}$, on a $f_1, f_2 \in E$ et ces deux fonctions forment une base de l'espace des solutions de $y'' - y = 0$, donc :

$$W = \text{Vect}(f_1, f_2).$$

Ceci prouve entre autres que W est bien un sous-espace de E . On prouve facilement que V est non vide (il contient la fonction nulle) et stable par combinaisons linéaires, donc V est aussi un sous-espace de E .

Soit maintenant $f \in E$.

S'il existe $(f_v, f_w) \in V \times W$ tel que $f = f_v + f_w$, alors on a $f_w = af_1 + bf_2$ avec :

$$\begin{cases} f(0) = f_v(0) + f_w(0) = f_w(0) = a + b \\ f(1) = f_v(1) + f_w(1) = f_w(1) = ae + \frac{b}{e} \end{cases}$$

On obtient alors :

$$\begin{cases} a = \frac{f(0) - ef(1)}{1 - e^2} \\ b = \frac{e^2 f(0) - ef(1)}{e^2 - 1} \end{cases}$$

Donc :

$$f_w = \frac{f(0) - ef(1)}{1 - e^2} f_1 + \frac{e^2 f(0) - ef(1)}{e^2 - 1} f_2 \text{ et } f_v = f - f_w.$$

Ainsi, si f_v et f_w , elles sont uniques.

Réciproquement, si on pose $f_w = \frac{f(0) - ef(1)}{1 - e^2} f_1 + \frac{e^2 f(0) - ef(1)}{e^2 - 1} f_2$ et $f_v = f - f_w$, on a immédiatement :

$$f = f_v + f_w \text{ et } f_w \in W.$$

On montre facilement que $f_V(0) = f(0) - f_W(0) = 0$ et $f_V(1) = f(1) - f_W(1) = 0$, donc que $f_V \in V$.

Ceci prouve par analyse-synthèse que :

$$\underline{E = V \oplus W}.$$

Pour montrer que $V \perp W$, il suffit de prouver que f_1 et f_2 sont orthogonales à toute fonction de V .

Soit $f \in V$. On a $f(0) = f(1) = 0$ et :

$$(f \mid f_1) = \int_0^1 f(t)e^t dt + \int_0^1 f'(t)e^t dt = \int_0^1 [f(t)e^t + f'(t)e^t] dt = [f(t)e^t]_0^1 = f(1)e - f(0) = 0$$

$$(f \mid f_2) = \int_0^1 f(t)e^{-t} dt + \int_0^1 f'(t)(-e^{-t}) dt = - \int_0^1 [-f(t)e^{-t} + f'(t)e^{-t}] dt = - [f(t)e^{-t}]_0^1 = -\frac{f(1)}{e} + f(0) = 0$$

Donc, pour tout $f \in V$, on a $f \perp f_1$ et $f \perp f_2$, et ainsi :

$$\underline{V \perp W}.$$

Finalement, on obtient bien :

$$\boxed{E = V \overset{\perp}{\oplus} W}$$

4) Pour toute $f \in E_{\alpha,\beta}$, on a $f(0) = \alpha$ et $f(1) = \beta$. Avec ce qui précède, on peut écrire :

$$f = f_V + f_W$$

$$\text{avec } f_V \in V \text{ et } f_W = \frac{\alpha - e\beta}{1 - e^2} f_1 + \frac{e^2\alpha - e\beta}{e^2 - 1} f_2 \in W.$$

Alors, avec $f_V \perp f_W$, on a $\int_0^1 [f(t)^2 + f'(t)^2] dt = \|f\|^2 = \|f_V\|^2 + \|f_W\|^2$ et :

$$\|f_W\|^2 = \left\| \frac{\alpha - e\beta}{1 - e^2} f_1 + \frac{e^2\alpha - e\beta}{e^2 - 1} f_2 \right\|^2 = \left(\frac{\alpha - e\beta}{1 - e^2} \right)^2 \|f_1\|^2 + 2 \frac{\alpha - e\beta}{1 - e^2} \frac{e^2\alpha - e\beta}{e^2 - 1} (f_1 \mid f_2) + \left(\frac{e^2\alpha - e\beta}{e^2 - 1} \right)^2 \|f_2\|^2.$$

On a :

$$\|f_1\|^2 = \int_0^1 [f_1(t)^2 + f_1'(t)^2] dt = \int_0^1 2e^{2t} dt = e^2 - 1$$

$$(f_1 \mid f_2) = \int_0^1 f_1(t)f_2(t) dt + \int_0^1 f_1'(t)f_2'(t) dt = \int_0^1 e^t e^{-t} dt + \int_0^1 e^t (-e^{-t}) dt = 0$$

$$\|f_2\|^2 = \int_0^1 [f_2(t)^2 + f_2'(t)^2] dt = \int_0^1 2e^{-2t} dt = -e^{-2} + 1 = \frac{e^2 - 1}{e^2}$$

Donc :

$$\|f_W\|^2 = \left(\frac{\alpha - e\beta}{1 - e^2} \right)^2 (e^2 - 1) + \left(\frac{e^2\alpha - e\beta}{e^2 - 1} \right)^2 \frac{e^2 - 1}{e^2} = \frac{(\alpha - e\beta)^2 + (e\alpha - \beta)^2}{e^2 - 1} = \frac{(e^2 + 1)(\alpha^2 + \beta^2) - 4e\alpha\beta}{e^2 - 1}.$$

Enfin :

$$\inf_{f \in E_{\alpha,\beta}} \left(\int_0^1 [f(t)^2 + f'(t)^2] dt \right) = \inf_{f \in E_{\alpha,\beta}} (\|f\|^2) = \inf_{f \in E_{\alpha,\beta}} (\|f_V\|^2 + \|f_W\|^2) = \|f_W\|^2.$$

Donc :

$$\boxed{\inf_{f \in E_{\alpha,\beta}} \left(\int_0^1 [f(t)^2 + f'(t)^2] dt \right) = \frac{(e^2 + 1)(\alpha^2 + \beta^2) - 4e\alpha\beta}{e^2 - 1}}$$

Exercice 3

Soient $\mathcal{B}_F = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathcal{B}_G = (e_{p+1}, \dots, e_n)$ des bases orthonormées de F et G respectivement (avec $n = \dim E$, $p = \dim F$ et $n - p = \dim G$). La famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ est alors une base de E adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$.

On a alors $M_{\mathcal{B}}(s) = \text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$ où le 1 apparaît p fois et :

$$s(e_k) = \begin{cases} e_k & \text{si } 1 \leq k \leq p \\ -e_k & \text{si } p+1 \leq k \leq n \end{cases}$$

On a alors :

- pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$, $(s(e_i) | s(e_j)) = (e_i | e_j) = \delta_{i,j}$ (car $(e_1, \dots, e_p)$ est orthonormée) ;
- pour tout $(i, j) \in \llbracket p+1, n \rrbracket^2$, $(s(e_i) | s(e_j)) = (-e_i | -e_j) = (e_i | e_j) = \delta_{i,j}$ (car $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ est orthonormée) ;
- pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket p+1, n \rrbracket$, $(s(e_i) | s(e_j)) = (e_i | -e_j) = -(e_i | e_j)$.

On a alors :

$$\begin{aligned} G = F^\perp &\Leftrightarrow G \perp F \\ &\Leftrightarrow \mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n) \text{ est orthonormée} \\ &\Leftrightarrow \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, (e_i | e_j) = \delta_{i,j} \\ &\Leftrightarrow \forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket p+1, n \rrbracket, (e_i | e_j) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket p+1, n \rrbracket, (e_i | e_j) = -(e_i | e_j) \\ &\Leftrightarrow \forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket p+1, n \rrbracket, (e_i | e_j) = (s(e_i) | s(e_j)) \\ &\Leftrightarrow \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, (e_i | e_j) = (s(e_i) | s(e_j)) \end{aligned}$$

Ceci prouve que (i) équivaut à (ii).

De plus, comme $M_{\mathcal{B}}(s) = \text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$ est diagonale donc symétrique, s est un endomorphisme autoadjoint si et seulement si la base $\mathcal{B}$ est orthonormée, donc (iii) est équivalente à (i) et (ii) et ainsi :

Les assertions (i), (ii) et (iii) sont équivalentes.

Exercice 4

Notons $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ (muni du produit scalaire canonique) et $\mathcal{B}' = (c_1, \dots, c_n)$ où les c_k sont les vecteurs colonnes de A . Comme $A \in GL_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{B}'$ est une base et on a $A = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ (la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$).

Par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, il existe $\mathcal{B}'' = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E telle que, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(c_1, \dots, c_k)$. Ceci se traduit par pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$c_k \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) \Rightarrow c_k = \lambda_{1,k} e_1 + \dots + \lambda_{k,k} e_k.$$

$$\text{Alors } P_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \lambda_{1,1} & \lambda_{1,2} & \dots & \lambda_{1,n-1} & \lambda_{1,n} \\ 0 & \lambda_{2,2} & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \lambda_{n-2,n-1} & \lambda_{n-2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \lambda_{n-1,n-1} & \lambda_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_{n,n} \end{pmatrix}, \text{ donc } R = P_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}'} \text{ est triangulaire supérieure.}$$

Par ailleurs, comme $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique, la base canonique $\mathcal{B}$ est orthonormée. Comme la base $\mathcal{B}''$ l'est aussi, $Q = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''}$ est orthogonale.

Enfin, la relation de Chasles donne $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''} P_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}'}$, soit, avec $A = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, $R = P_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}'}$ et $Q = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''}$:

$$A = QR \text{ avec } Q \in O(n) \text{ et } R \text{ triangulaire supérieure.}$$

Exercice 5

1) On a par définition :

$$rg(A) = rg(\mathcal{F})$$

2) Pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, appelons $(x_{1,i}, x_{2,i}, \dots, x_{n,i})$ les coordonnées de x_i dans la base orthonormée $\mathcal{B}$.

On a alors, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$:

$$(x_i | x_j) = \sum_{k=1}^n x_{k,i} x_{k,j}.$$

Par ailleurs, $A = M_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = (x_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et ${}^t A = (x_{j,i}) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ donc $A^T A$ est définie et $A^T A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Si on pose $A^T A = (a_{i,j})$, on a pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$:

$$a_{i,j} = \sum_{k=1}^n x_{k,i} x_{k,j} = (x_i | x_j).$$

Ainsi :

$$G = A^T A$$

3) Soit $X \in \ker A$. On a :

$$(A^T A)X = A^T (AX) = A^T 0 = 0 \Rightarrow X \in \ker(A^T A).$$

Ainsi :

$$\underline{\ker A \subset \ker(A^T A)}.$$

Soit maintenant $X \in \ker(A^T A)$, on a :

$$\|AX\|^2 = (AX)^T (AX) = (X^T A^T)(AX) = X^T (A^T AX) = X^T 0 = 0.$$

Ainsi, $\|AX\| = 0$, donc $AX = 0$, soit $X \in \ker A$. Ceci permet de conclure que :

$$\underline{\ker(A^T A) \subset \ker A}.$$

Finalement :

$$\ker(A^T A) = \ker A$$

Par le théorème du rang, on a $rg(A) + \dim(\ker A) = p$ et $rg(A^T A) + \dim(\ker(A^T A)) = p$.

Or, comme $\ker(A^T A) = \ker A$, on a $\dim(\ker(A^T A)) = \dim(\ker A)$ et ainsi, $rg(A^T A) = rg(A)$.

Comme $G = A^T A$ et $rg(A) = rg(\mathcal{F})$, on a finalement :

$$\boxed{rg(\mathcal{F}) = rg(G)}$$

4) La matrice $G = A^T A$ est une matrice symétrique réelle de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, donc, d'après le théorème spectrale, elle est diagonalisable. Si ses valeurs propres (distinctes ou non) sont $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$, on a :

$$\det G = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_p.$$

Soit $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ et $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre de G associé à λ_k . On a $GX = A^T AX = \lambda_k X$, donc :

$$X^T A^T AX = \lambda_k X^T X \Leftrightarrow (AX)^T AX = \|AX\|^2 = \lambda_k \|X\|^2 \Leftrightarrow \lambda_k = \frac{\|AX\|^2}{\|X\|^2} \quad (\text{car } \|X\|^2 \neq 0).$$

Or, $\|AX\|^2 \geq 0$ et $\|X\|^2 > 0$, donc $\lambda_k \geq 0$. Ceci étant vrai pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on a $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_p \geq 0$, soit :

$$\boxed{\det G \geq 0}$$

On a $\det G = 0$ quand $rg(G) = rg(x_1, x_2, \dots, x_p) < p$, donc :

$$\boxed{\det G = 0 \text{ si et seulement si } \mathcal{F} = (x_1, x_2, \dots, x_p) \text{ est liée.}}$$

5) Si $x \in F$, alors $d(x, F) = 0$ et la famille $(e_1, e_2, \dots, e_p, x)$, donc $\det G(e_1, e_2, \dots, e_p, x) = 0$ et la formule désirée est vérifiée (les deux membres valent 0).

Si $x \notin F$, posons $e_{p+1} = x - p_F(x) \neq 0$, où $p_F(x)$ est le projeté orthogonal de x sur F .

On a alors $d^2 = d(x, F)^2 = \|e_{p+1}\|^2 = (e_{p+1} | e_{p+1})$ et $e_{p+1} \in F^\perp$, donc pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $(e_k | e_{p+1}) = 0$. Ainsi :

$$G(e_1, e_2, \dots, e_p, e_{p+1}) = \begin{pmatrix} (e_1 | e_1) & \dots & (e_1 | e_p) & (e_1 | e_{p+1}) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (e_p | e_p) & \dots & (e_p | e_p) & (e_p | e_{p+1}) \\ (e_1 | e_{p+1}) & \dots & (e_p | e_{p+1}) & (e_{p+1} | e_{p+1}) \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} G(e_1, e_2, \dots, e_p) & \vdots & & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & d^2 \end{array} \right).$$

Alors :

$$\det G(e_1, e_2, \dots, e_p, e_{p+1}) = \det \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & G(e_1, e_2, \dots, e_p) & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & d^2 \end{array} \right) = d^2 \det G(e_1, e_2, \dots, e_p).$$

Par ailleurs :

$$\det G(e_1, e_2, \dots, e_p, e_{p+1}) = \begin{vmatrix} (e_1 | e_1) & \cdots & (e_1 | e_p) & (e_1 | x - p_F(x)) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (e_1 | e_p) & \cdots & (e_p | e_p) & (e_p | x - p_F(x)) \\ (e_1 | e_{p+1}) & \cdots & (e_p | e_{p+1}) & (e_{p+1} | x - p_F(x)) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (e_1 | e_1) & \cdots & (e_1 | e_p) & (e_1 | x) - (e_1 | p_F(x)) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (e_1 | e_p) & \cdots & (e_p | e_p) & (e_p | x) - (e_p | p_F(x)) \\ (e_1 | e_{p+1}) & \cdots & (e_p | e_{p+1}) & (e_{p+1} | x) - (e_{p+1} | p_F(x)) \end{vmatrix}$$

Or, $p_F(x) \in F = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_p)$, donc $p_F(x) = \sum_{i=1}^p a_i e_i$ et :

$$\begin{pmatrix} (e_1 | p_F(x)) \\ \vdots \\ (e_p | p_F(x)) \\ (e_{p+1} | p_F(x)) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^p a_i \begin{pmatrix} (e_1 | e_i) \\ \vdots \\ (e_p | e_i) \\ (e_{p+1} | e_i) \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$\det G(e_1, e_2, \dots, e_p, e_{p+1}) = \begin{vmatrix} (e_1 | e_1) & \cdots & (e_1 | e_p) & (e_1 | x) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (e_1 | e_p) & \cdots & (e_p | e_p) & (e_p | x) \\ (e_1 | e_{p+1}) & \cdots & (e_p | e_{p+1}) & (e_{p+1} | x) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (e_1 | e_1) & \cdots & (e_1 | e_p) & (e_1 | x) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (e_1 | e_p) & \cdots & (e_p | e_p) & (e_p | x) \\ (e_1 | x) - (e_1 | p_F(x)) & \cdots & (e_p | x) - (e_p | p_F(x)) & (x | x) - (x | p_F(x)) \end{vmatrix}$$

Et comme plus haut, on a $\begin{pmatrix} (e_1 | p_F(x)) \\ \vdots \\ (e_p | p_F(x)) \\ (x | p_F(x)) \end{pmatrix}^T = \sum_{i=1}^p a_i \begin{pmatrix} (e_1 | e_i) \\ \vdots \\ (e_p | e_i) \\ (x | e_i) \end{pmatrix}^T$ donc :

$$\det G(e_1, e_2, \dots, e_p, e_{p+1}) = \begin{vmatrix} (e_1 | e_1) & \cdots & (e_1 | e_p) & (e_1 | x) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (e_1 | e_p) & \cdots & (e_p | e_p) & (e_p | x) \\ (e_1 | x) & \cdots & (e_p | x) & (x | x) \end{vmatrix} = \det G(e_1, e_2, \dots, e_p, x).$$

Ainsi, on a :

$$\det G(e_1, e_2, \dots, e_p, e_{p+1}) = d^2 \det G(e_1, e_2, \dots, e_p) = \det G(e_1, e_2, \dots, e_p, x).$$

Et comme la famille $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ est une base, elle est libre, donc $\det G(e_1, e_2, \dots, e_p) \neq 0$ et ainsi :

$$d^2 = d(x, F)^2 = \frac{\det G(e_1, e_2, \dots, e_p, x)}{\det G(e_1, e_2, \dots, e_p)}$$

Exercice 6

Comme la matrice A est symétrique réelle $A \in S_n(\mathbb{R})$, elle est diagonalisable dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ (muni du produit scalaire canonique). Donc, il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ tels que $D = P^T A P$ où $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ et P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ (qui est orthonormée) à la base $\mathcal{B}$ (donc $P \in O(n)$).

Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, notons $U_k \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la matrice colonne des coordonnées de u_k dans la base canonique. On a immédiatement $U_k^T U_k = \|u_k\|^2 = 1$ (en identifiant une matrice 1×1 et son coefficient).

De plus, si on note $E_{i,j}$ les matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \sum_{k=1}^n \lambda_k E_{k,k}.$$

Donc :

$$A = P D P^T = P \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k E_{k,k} \right) P^T = \sum_{k=1}^n \lambda_k P E_{k,k} P^T.$$

Enfin, si pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $U_k = \begin{pmatrix} u_{1,k} \\ u_{2,k} \\ \vdots \\ u_{n,k} \end{pmatrix}$, on a $P = (u_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ et :

$$P E_{k,k} P^T = \begin{pmatrix} u_{1,1} & \cdots & u_{1,k} & \cdots & u_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{k,1} & \cdots & u_{k,k} & \cdots & u_{k,n} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n,1} & \cdots & u_{n,k} & \cdots & u_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,1} & \cdots & u_{k,1} & \cdots & u_{n,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{1,k} & \cdots & u_{k,k} & \cdots & u_{n,k} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{1,n} & \cdots & u_{k,n} & \cdots & u_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{1,k} u_{1,k} & \cdots & u_{1,k} u_{k,k} & \cdots & u_{1,k} u_{n,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{k,k} u_{1,k} & \cdots & u_{k,k} u_{k,k} & \cdots & u_{k,k} u_{n,k} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n,k} u_{1,k} & \cdots & u_{n,k} u_{k,k} & \cdots & u_{n,k} u_{n,k} \end{pmatrix} = U_k U_k^T.$$

Donc, on a bien $A = \sum_{k=1}^n \lambda_k U_k U_k^T$ et ainsi :

Il existe bien $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(U_1, U_2, \dots, U_n) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^n$ tels que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $U_k^T U_k = 1$ et $A = \sum_{k=1}^n \lambda_k U_k U_k^T$.

Exercice 7

Dans tout l'exercice, on identifie $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, que l'on munit de sa structure euclidienne canonique.

1) Comme u est autoadjoint, il existe une base orthonormée de vecteurs propres de u ($e_1, e_2, \dots, e_n$), d'après le théorème spectral. Et quitte à réorganiser les vecteur, on peut supposer que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, λ_i soit la valeur propre (réelle) associée à e_i avec $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$.

Alors, pour tout $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ de E tel que $x \neq 0$, on a $u(x) = \sum_{i=1}^n x_i u(e_i) = \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i e_i$ et :

$$(x | u(x)) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2.$$

Comme pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda_1 \leq \lambda_i \leq \lambda_n$ et $x_i^2 \geq 0$, on a :

$$\lambda_1 \|x\|^2 = \lambda_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_1 x_i^2 \leq (x | u(x)) \geq \sum_{i=1}^n \lambda_n x_i^2 = \lambda_n \sum_{i=1}^n x_i^2 = \lambda_n \|x\|^2.$$

Et comme $\|x\|^2 > 0$, on obtient, pour tout vecteur x non nul de E :

$$\lambda_1 \leq \frac{(x | u(x))}{\|x\|^2} \leq \lambda_n$$

2) Soit $X = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^\top \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$X^\top H X = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{x_i x_j}{i+j-1}.$$

Si on pose $f(t) = \sum_{i=1}^n x_i t^{i-1}$, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$f(t)^2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i t^{i-1} \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i t^{i-1} \right) \left(\sum_{j=1}^n x_j t^{j-1} \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j t^{i+j-2}.$$

Comme f est une fonction polynômiale, f^2 est continue sur $\mathbb{R}$ et :

$$\int_0^1 f(t)^2 dt = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(x_i x_j \int_0^1 t^{i+j-2} dt \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(x_i x_j \left[\frac{t^{i+j-1}}{i+j-1} \right]_0^1 \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{x_i x_j}{i+j-1} = X^\top H X.$$

Ainsi, comme f^2 est continue et positive sur $[0,1]$, on a $X^\top H X = \int_0^1 f(t)^2 dt \geq 0$ avec :

$$X^\top H X = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f(t)^2 dt = 0 \Leftrightarrow \forall t \in [0,1], f(t) = 0.$$

Ceci veut dire que f est nulle sur $\mathbb{R}$ tout entier (elle est polynômiale et admet une infinité de racines), et donc que tous ses coefficients sont nuls, soit pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_i = 0$ et donc $X = 0$.

Ceci prouve que :

H est définie positive.

3) a. On a $S = A^\top A$, donc :

$$S^\top = (A^\top A)^\top = A^\top (A^\top)^\top = A^\top A = S.$$

Donc, S est symétrique.

De plus, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$X^\top S X = X^\top (A^\top A) X = (X^\top A^\top)(A X) = (A X)^\top (A X) = \|A X\|^2 \geq 0.$$

Donc, S est positive et ainsi :

S est une matrice symétrique positive.

b. Si S est une matrice symétrique positive, alors il existe deux matrices $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ avec $\lambda_k \in \mathbb{R}_+$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $P \in O(n)$ telles que $S = P^T D P$. Comme les λ_k sont positifs, on peut poser :

$$\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n}).$$

On a $D = \Delta^2$ et $\Delta^T = \Delta$ (car Δ est diagonale), donc :

$$S = P^T D P = P^T \Delta^2 P = P^T \Delta^T \Delta P = (\Delta P)^T (\Delta P) = A^T A \text{ avec } A = \Delta P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Ainsi :

Si S est une matrice symétrique positive, alors il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = A^T A$.

Comme $(-A)^T(-A) = A^T A$:

La matrice A n'est pas unique.

c. Nous revenons ici à $S = A^T A$. On a vu que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^T S X = \|AX\|^2$, donc :

$$X^T S X = 0 \Leftrightarrow \|AX\| = 0 \Leftrightarrow AX = 0 \Leftrightarrow X \in \ker A.$$

Alors :

$$S \text{ est définie positive} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) : \\ X^T S X = 0 \Leftrightarrow X = 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) : \\ X \in \ker A \Leftrightarrow X = 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \ker A = \{0\}.$$

Autrement dit :

S est définie positive si et seulement si A est inversible.

d. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On a d'une part :

$$X \in \ker S \Leftrightarrow SX = 0 \Rightarrow X^T S X = 0 \Leftrightarrow X \in \ker A.$$

Donc $\ker S \subset \ker A$.

Et d'autre part :

$$X \in \ker A \Leftrightarrow AX = 0 \Rightarrow SX = A^T A X = 0 \Leftrightarrow X \in \ker S.$$

Donc $\ker A \subset \ker S$.

Ainsi, $\ker A = \ker S$, donc, avec le théorème du rang, on obtient :

$$\text{rg}(A) = n - \dim(\ker A) = n - \dim(\ker S) = \text{rg}(S).$$

Ainsi, on a bien :

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(S)$$

4) Si S est une matrice symétrique positive, alors il existe deux matrices $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ avec $\lambda_k \in \mathbb{R}_+$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $P \in O(n)$ telles que $S = P^\top DP$. Comme les λ_k sont positifs, on peut poser :

$$\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n}).$$

On a alors $D = \Delta^2$ et, avec $PP^\top = I_n$:

$$S = P^\top DP = P^\top \Delta^2 P = P^\top \Delta \Delta P = P^\top \Delta (PP^\top) \Delta P = (P^\top \Delta P)(P^\top \Delta P) = R^2.$$

avec $R = P^\top \Delta P$. Comme $\sqrt{\lambda_k}$ sont positifs et $P \in O(n)$, R est bien une matrice symétrique positive.

Ainsi, il existe bien une matrice R symétrique positive telle que $R^2 = S$. Reste à prouver l'unicité.

Soit M une matrice symétrique positive telle que $M^2 = S$.

Comme M est symétrique réelle, elle est diagonalisable dans une base orthonormée. Soient $\mu_1, \dots, \mu_p$ ses valeurs propres distinctes deux à deux (toutes positives, car M est positive) et $E_1, \dots, E_p$ les sous-espaces propres associés.

Soit $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$. Pour tout $X \in E_k$, on a $MX = \mu_k X$, donc :

$$SX = M^2 X = M(MX) = M(\mu_k X) = \mu_k MX = \mu_k (\mu_k X) = \mu_k^2 X.$$

Ainsi, μ_k^2 est une valeur propre de S et $E_k \subset F_k$, où F_k est sous-espace propre associé à μ_k^2 .

Remarquons que comme les μ_k sont positives, on a : $\mu_k^2 = \mu_{k'}^2 \Leftrightarrow \mu_k = \mu_{k'} \Leftrightarrow k = k'$.

On a alors $\dim E_k \leq \dim F_k$, donc :

$$n = \dim E_1 + \dots + \dim E_p \leq \dim F_1 + \dots + \dim F_p \leq n.$$

Ainsi, $\dim F_1 + \dots + \dim F_p = n$ et, comme pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on a $\dim E_k \leq \dim F_k$, ceci implique que pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\dim E_k = \dim F_k$.

Finalement, pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $E_k \subset F_k$ et $\dim E_k = \dim F_k$, donc les sous-espaces propres de M et S sont les mêmes et les valeurs propres de S sont $\mu_1^2, \dots, \mu_p^2$.

Or, la matrice connue est S , donc ce qui précède se reformule en : les valeurs propres de M sont $\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_p}$ où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ sont les valeurs propres distinctes deux à deux (et positives) de S et le sous-espace propre de M associé à $\sqrt{\lambda_k}$ est le sous-espace propre de S associé à λ_k .

Ainsi, les valeurs propres et sous-espaces propres de M sont fixés, ce qui détermine complètement la matrice M et donc R est unique.

Finalement :

Il existe une et une seule matrice R symétrique positive telle que $R^2 = S$.

Remarquons que si on omet le caractère positif, il existe plusieurs matrices dont le carré est S .

5) Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres positives de A .

Pour tout $(\lambda, X) \in \mathbb{R} \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow X + AX = X + \lambda X \Leftrightarrow (I_n + A)X = (1 + \lambda)X.$$

Donc, les valeurs propres de $I_n + A$ sont $1 + \lambda_1, 1 + \lambda_2, \dots, 1 + \lambda_n$ et, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la valeur propre $1 + \lambda_k$ de $I_n + A$, $1 + \lambda_k$ est de même multiplicité que la valeur propre λ_k de A . Ainsi :

$$\det A = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \text{ et } \det(I_n + A) = (1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2) \dots (1 + \lambda_n).$$

On veut donc prouver que si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont n réels positifs (distincts ou pas), on a :

$$1 + \sqrt[n]{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n} \leq \sqrt[n]{(1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2) \dots (1 + \lambda_n)}.$$

Précédons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

- Pour $n = 1$, soit $\lambda_1 \in \mathbb{R}_+$. On a alors $1 + \sqrt{\lambda_1} = 1 + \lambda_1 = \sqrt{1 + \lambda_1}$, donc la relation est vérifiée.
- Supposons l'inégalité vraie à un rang $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$.

Posons $a = \sqrt[n]{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}$ et $b = \sqrt[n]{(1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2) \dots (1 + \lambda_n)}$. Par hypothèse de récurrence, on a $1 + a \leq b$.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(t) = \sqrt[n+1]{(1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2) \dots (1 + \lambda_n)(1 + t)} - \sqrt[n+1]{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n t} - 1 = b^{\frac{n}{n+1}}(1 + t)^{\frac{1}{n+1}} - a^{\frac{n}{n+1}}t^{\frac{1}{n+1}} - 1.$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, en tant que différence de telles fonctions et, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f'(t) = \frac{1}{n+1} b^{\frac{n}{n+1}} (1+t)^{\frac{1}{n+1}-1} - \frac{1}{n+1} a^{\frac{n}{n+1}} t^{\frac{1}{n+1}-1} = \frac{1}{n+1} \left[\left(\frac{b}{1+t} \right)^{\frac{n}{n+1}} - \left(\frac{a}{t} \right)^{\frac{n}{n+1}} \right].$$

On a donc :

$$f(t) \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{b}{1+t} \right)^{\frac{n}{n+1}} \geq \left(\frac{a}{t} \right)^{\frac{n}{n+1}} \Leftrightarrow \frac{b}{1+t} \geq \frac{a}{t} \Leftrightarrow (b-a)t \geq a.$$

Et comme $1 + a \leq b$, on a $b - a \geq 1 > 0$, donc $f(t) \geq 0$ quand $t \geq \frac{a}{b-a} \geq 0$.

Ceci prouve que f est décroissante sur $\left[0, \frac{a}{b-a} \right]$ et croissante sur $\left[\frac{a}{b-a}, +\infty \right[$ et donc que f admet un

minimum en $\frac{a}{b-a}$. Enfin, on a :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a}{b-a}\right) &= b^{\frac{n}{n+1}} \left(1 + \frac{a}{b-a}\right)^{\frac{1}{n+1}} - a^{\frac{n}{n+1}} \left(\frac{a}{b-a}\right)^{\frac{1}{n+1}} - 1 \\ &= b^{\frac{n}{n+1}} \frac{b^{\frac{1}{n+1}}}{(b-a)^{\frac{1}{n+1}}} - a^{\frac{n}{n+1}} \frac{a^{\frac{1}{n+1}}}{(b-a)^{\frac{1}{n+1}}} - 1 = \frac{b-a}{(b-a)^{\frac{1}{n+1}}} - 1 = (b-a)^{\frac{n}{n+1}} - 1 \end{aligned}$$

Or, on a vu que $b - a \geq 1$, donc $(b - a)^{\frac{n}{n+1}} \geq 1$ et $f\left(\frac{a}{b-a}\right) \geq 0$.

Ainsi, le minimum de f sur $\mathbb{R}_+$ est positif, donc f est positive sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $\lambda_{n+1} \in \mathbb{R}_+$, $f(\lambda_{n+1}) \geq 0$.

Finalement, on obtient pour tout $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}) \in (\mathbb{R}_+)^{n+1}$:

$$f(\lambda_{n+1}) = \sqrt[n+1]{(1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2) \dots (1 + \lambda_n)(1 + \lambda_{n+1})} - \sqrt[n+1]{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \lambda_{n+1}} - 1 \geq 0.$$

Soit :

$$1 + \sqrt[n+1]{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \lambda_{n+1}} \leq \sqrt[n+1]{(1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2) \dots (1 + \lambda_n)(1 + \lambda_{n+1})}.$$

La propriété est vraie au rang $n+1$.

Ainsi, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui prouve que l'on a bien :

$$1 + \sqrt[n]{\det A} \leq \sqrt[n]{\det (I_n + A)}$$

Exercice 8

1) On a $(M^T M)^T = M^T (M^T)^T = M^T M$, donc la matrice $M^T M$ est symétrique réelle, donc, d'après le théorème spectral, elle est diagonalisable dans une base orthonormale. Autrement dit, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $P^T M^T M P = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ où les μ_k sont les valeurs propres de $M^T M$.

Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé à μ_k . On a $M^T M X = \mu_k X$ avec $X \neq 0$.

En munissant $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique, on a :

$$\|MX\|^2 = X^T M^T M X = \mu_k X^T X = \mu_k \|X\|^2.$$

Comme $X \neq 0$, on a $\|X\| \neq 0$. Alors, $\mu_k = \frac{\|MX\|^2}{\|X\|^2} \geq 0$ et, comme M est inversible, $\mu_k \neq 0$, donc $\mu_k > 0$.

On peut alors écrire $\mu_k = \lambda_k^2$, avec $\lambda_k > 0$ et $P^T M^T M P = \text{diag}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2) = D^2$ où $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Finalement :

Il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $P^T M^T M P = D^2$ où $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $\lambda_k > 0$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

2) Montrer que Q est une matrice orthogonale revient à montrer que ses colonnes forment une famille orthonormée pour le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$:

$$\left(\frac{1}{\lambda_i} V_i \right)^T \left(\frac{1}{\lambda_j} V_j \right) = \delta_{i,j}.$$

Soit donc $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. On a :

$$\left(\frac{1}{\lambda_i} V_i \right)^T \left(\frac{1}{\lambda_j} V_j \right) = \frac{1}{\lambda_i \lambda_j} V_i^T V_j.$$

Et comme $MP = (V_1 \ \dots \ V_n)$, on a :

$$P^T M^T M P = (MP)^T MP = (V_i^T V_j)_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}.$$

Or, $P^T M^T M P = \text{diag}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2)$, donc :

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \text{ si } i \neq j, V_i^T V_j = 0 \\ \bullet \text{ si } i = j, V_i^T V_j = V_i^T V_i = \lambda_i^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{\lambda_i \lambda_j} V_i^T V_j = \delta_{i,j}$$

Et ainsi :

La matrice Q est orthogonale.

Notons $MP = (V_1 \ \dots \ V_n)$ et $Q = \left(\frac{1}{\lambda_1} V_1 \ \dots \ \frac{1}{\lambda_n} V_n \right)$. On a alors $Q = (MP)\Delta$ avec $\Delta = \text{diag} \left(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n} \right)$.

Comme $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, on a $\Delta = D^{-1}$, et donc $Q = (MP)D^{-1}$, soit :

$$MP = QD \Rightarrow MPP^T = M = QDP^T.$$

Ainsi, en posant $(A, B) = (Q, P^T) \in O_n(\mathbb{R})^2$

Il existe $A, B \in O_n(\mathbb{R})$ telles que $M = ADB$ où $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $\lambda_k > 0$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Exercice 9

1) Soit $f \in O(E)$ et F un sous-espace de E .

Comme $f \in O(E)$, f est bijective et, comme E est de dimension finie :

$$\dim f(F) = \dim F.$$

Si F est stable par f , soit $f(F) \subset F$, alors, avec l'égalité des dimensions ci-dessus, on a :

$$f(F) = F.$$

Soit alors $x \in F^\perp$.

D'après ce qui précède, pour tout $y \in F$, il existe $z \in F$, tel que $y = f(z)$ et :

$$\begin{aligned} (f(x) | y) &= (f(x) | f(z)) \\ &= (x | z) \quad \text{car } f \text{ est une isométrie} \\ &= 0 \quad \text{car } x \in F^\perp \text{ et } z \in F \end{aligned}$$

Donc, pour tout $x \in F^\perp$, on a $f(x) \in F^\perp$, ce qui prouve que :

$$F^\perp \text{ est stable par } f.$$

Réciproquement, si $F^\perp$ est stable par f , alors $(F^\perp)^\perp$ est stable par f et comme on est en dimension finie, $(F^\perp)^\perp = F$ et ainsi :

$F^\perp$ est stable par f si et seulement si F l'est.

2) Soit $f \in O(E)$.

Pour tout $(x, y) \in \ker(f - id_E) \times \text{Im}(f - id_E)$, on a $f(x) = x$ et il existe $z \in E$ tel que $y = f(z) - z$. Alors :

$$(x | y) = (x | f(z) - z) = (x | f(z)) - (x | z) = (f(x) | f(z)) - (x | z).$$

Et comme $f \in O(E)$, on a $(f(x) | f(z)) = (x | z)$, donc $(x | y) = 0$. Ainsi :

$$\text{Im}(f - id_E) \perp \ker(f - id_E).$$

Ceci implique immédiatement que :

$$\text{Im}(f - id_E) + \ker(f - id_E) = \text{Im}(f - id_E) \overset{\perp}{\oplus} \ker(f - id_E) \subset E.$$

Et d'après le théorème du rang :

$$\dim[\text{Im}(f - id_E) \overset{\perp}{\oplus} \ker(f - id_E)] = \dim[\text{Im}(f - id_E)] + \dim[\ker(f - id_E)] = \dim E.$$

Ainsi, on a bien :

$$\boxed{\text{Im}(f - id_E) \overset{\perp}{\oplus} \ker(f - id_E) = E}$$

3) Remarquons que :

- pour tout $f \in O(E)$, le résultat de la question précédente se reformule en :

$$(\text{Im}(f - id_E))^\perp = \ker(f - id_E)$$

$$(\ker(f - id_E))^\perp = \text{Im}(f - id_E)$$

- pour avoir une famille libre de p vecteurs, il faut que $p \leq n = \dim E$;
- pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, l'application s_{u_k} est une réflexion, donc $s_{u_k} \in O(E)$. Comme $O(E)$ est stable par composition, on a $s_{u_1} \circ \dots \circ s_{u_p} \in O(E)$. Ainsi, montrer que $\text{Im}(s_{u_1} \circ \dots \circ s_{u_p} - id_E) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ revient à montrer que $\ker(s_{u_1} \circ \dots \circ s_{u_p} - id_E) = (\text{Vect}(u_1, \dots, u_p))^\perp$.

Procédons par récurrence finie sur $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

- Pour $p = 1$, soit u_1 un vecteur non nul de E (donc la famille (u_1) est libre). Comme s_{u_1} est la réflexion par rapport à l'hyperplan $(\mathbb{R}u_1)^\perp$, on a :

$$\ker(s_{u_1} - id_E) = (\mathbb{R}u_1)^\perp = (\text{Vect}(u_1))^\perp.$$

Donc, la propriété est vraie au rang $p = 1$.

- Supposons la propriété vraie à un rang $p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

Soit $(u_1, \dots, u_p, u_{p+1})$ une famille libre de $p+1$ vecteurs de E .

Soit $x \in (\text{Vect}(u_1, \dots, u_p, u_{p+1}))^\perp$. Pour tout $k \in \llbracket 1, p+1 \rrbracket$, $x \perp u_k$ donc $x \in (\mathbb{R}u_k)^\perp$ et $s_{u_k}(x) = x$. Alors :

$$s_{u_1} \circ \dots \circ s_{u_p} \circ s_{u_{p+1}}(x) = s_{u_1} \circ \dots \circ s_{u_p}(s_{u_{p+1}}(x)) = s_{u_1} \circ \dots \circ s_{u_p}(x) = \dots = s_{u_1}(x) = x.$$

Donc, $x \in \ker(s_{u_1} \circ \dots \circ s_{u_p} \circ s_{u_{p+1}} - id_E)$ et ainsi :

$$\underline{(\text{Vect}(u_1, \dots, u_p, u_{p+1}))^\perp \subset \ker(s_{u_1} \circ \dots \circ s_{u_p} \circ s_{u_{p+1}} - id_E)}.$$

Réciproquement, pour tout $x \in \ker(s_{u_1} \circ \dots \circ s_{u_p} \circ s_{u_{p+1}} - id_E)$, on a :

$$s_{u_1} \circ \dots \circ s_{u_p} \circ s_{u_{p+1}}(x) = x \Rightarrow y = s_{u_1} \circ \dots \circ s_{u_p} \circ s_{u_{p+1}}(x) - s_{u_{p+1}}(x) = x - s_{u_{p+1}}(x).$$

Alors, on a d'une part :

$$y = s_{u_1} \circ \dots \circ s_{u_p} \circ s_{u_{p+1}}(x) - s_{u_{p+1}}(x) = (s_{u_1} \circ \dots \circ s_{u_p} - id_E)(s_{u_{p+1}}(x)) \in \text{Im}(s_{u_1} \circ \dots \circ s_{u_p} - id_E).$$

Et, par hypothèse de récurrence, $\text{Im}(s_{u_1} \circ \dots \circ s_{u_p} - id_E) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$, donc :

$$y \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_p).$$

D'autre part :

$$y = (s_{u_{p+1}} - id_E)(-x) \in \text{Im}(s_{u_{p+1}} - id_E).$$

Et, d'après l'initialisation, $\text{Im}(s_{u_{p+1}} - id_E) = \text{Vect}(u_{p+1})$, donc :

$$y \in \text{Vect}(u_{p+1}).$$

Ainsi, $y \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_p) \cap \text{Vect}(u_{p+1})$ et, comme la famille $(u_1, \dots, u_p, u_{p+1})$ est libre, ceci donne $y = 0$.

Alors :

$$\begin{aligned} s_{u_1} \circ \dots \circ s_{u_p} \circ s_{u_{p+1}}(x) - s_{u_{p+1}}(x) = x - s_{u_{p+1}}(x) = 0 &\Leftrightarrow s_{u_1} \circ \dots \circ s_{u_p} \circ s_{u_{p+1}}(x) = s_{u_{p+1}}(x) = x \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} s_{u_{p+1}}(x) = x \\ s_{u_1} \circ \dots \circ s_{u_p}(x) = s_{u_1} \circ \dots \circ s_{u_p}(s_{u_{p+1}}(x)) = x \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$x \in \ker(s_{u_1} \circ \dots \circ s_{u_p} - id_E) \cap \ker(s_{u_{p+1}} - id_E).$$

Or, par hypothèse de récurrence $\ker(s_{u_1} \circ \dots \circ s_{u_p} - id_E) = (\text{Vect}(u_1, \dots, u_p))^\perp$, et d'après l'initialisation, $\ker(s_{u_{p+1}} - id_E) = (\text{Vect}(u_{p+1}))^\perp$, donc :

$$x \in (\text{Vect}(u_1, \dots, u_p))^\perp \cap (\text{Vect}(u_{p+1}))^\perp.$$

Or, pour tout $x \in E$, on a :

$$\begin{aligned} x \in (\text{Vect}(u_1, \dots, u_p))^\perp \cap (\text{Vect}(u_{p+1}))^\perp &\Leftrightarrow x \in (\text{Vect}(u_1, \dots, u_p))^\perp \text{ et } x \in (\text{Vect}(u_{p+1}))^\perp \\ &\Leftrightarrow (\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, x \perp u_k) \text{ et } (x \perp u_{p+1}) \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, p+1 \rrbracket, x \perp u_k \\ &\Leftrightarrow x \in (\text{Vect}(u_1, \dots, u_p, u_{p+1}))^\perp \end{aligned}$$

Finalement, $x \in (\text{Vect}(u_1, \dots, u_p, u_{p+1}))^\perp$ et ceci, pour tout $x \in \ker(s_{u_1} \circ \dots \circ s_{u_p} \circ s_{u_{p+1}} - id_E)$, donc :

$$\ker(s_{u_1} \circ \dots \circ s_{u_p} \circ s_{u_{p+1}} - id_E) \subset (\text{Vect}(u_1, \dots, u_p, u_{p+1}))^\perp.$$

En définitive, on a bien $\ker(s_{u_1} \circ \dots \circ s_{u_p} \circ s_{u_{p+1}} - id_E) = (\text{Vect}(u_1, \dots, u_p, u_{p+1}))^\perp$: la propriété est donc vraie au rang $p+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire donc vraie pour tout $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$, soit :

$$\boxed{\text{Im}(s_{u_1} \circ \dots \circ s_{u_p} - id_E) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)}$$