Corrigés des TD du chapitre 18

Exercice 1

On se place dans un repère orthonormé du plan d'origine O et on appelle $\mathscr{C}$ la courbe que l'on étudie.

$$\mathscr{C} : M(t) \begin{cases} x(t) = \cos^2 t + \ln(\sin t) \\ y(t) = \sin t \cos t \end{cases}$$

Les fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sont définies, de classe C^∞ et 2π-périodiques sur $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]2k\pi, (2k+1)\pi[$.

La courbe $\mathscr{C}$ est entièrement décrite quand t décrit $]0,\pi[$.

Pour tout $t \in]0,\pi[$, $\pi - t \in]0,\pi[$, et on a $x(\pi - t) = x(t)$ et $y(\pi - t) = -y(t)$, donc $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à l'axe (Ox) et on peut l'étudier sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$.

On a alors pour tout $t \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right]$: $\begin{cases} x'(t) = -2\sin t \cos t + \dfrac{\cos t}{\sin t} = \dfrac{\cos t}{\sin t}\cos 2t \\ y'(t) = \cos 2t \end{cases}$

D'où le tableau :

t	0		$\pi/4$		$\pi/2$
$x'(t)$	$+\infty$	$+$	0		0
x	$-\infty$	$\nearrow$	$(1-\ln 2)/2$	$\searrow$	0
y	0	$\nearrow$	$1/2$	$\searrow$	0
$y'(t)$	1	$+$	0	$+$	-1

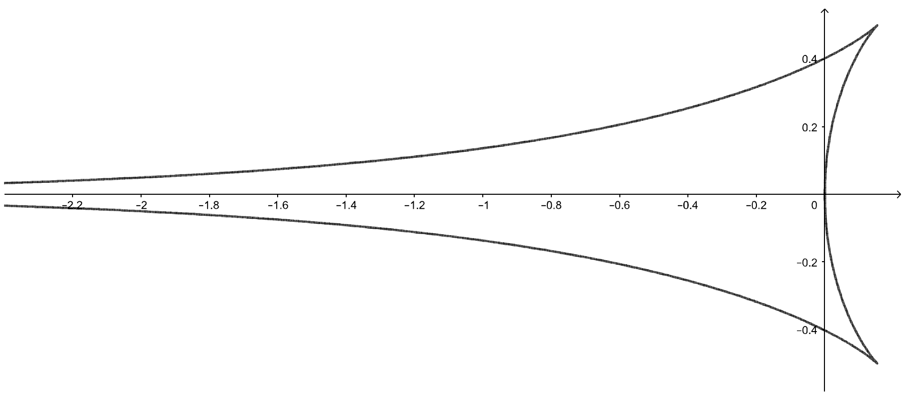
Tangentes particulières :

La tangente est toujours dirigée par $\vec{u}\begin{vmatrix}\cos t \\ \sin t\end{vmatrix}$. Il y a une tangente verticale quand $t = \dfrac{\pi}{2}$ et $M\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, de coordonnées $\left(\dfrac{1-\ln 2}{2};\dfrac{1}{2}\right)$, est un point de rebroussement, avec une demi-tangente dirigée par $\vec{u}(1;1)$.

Branche infinie :

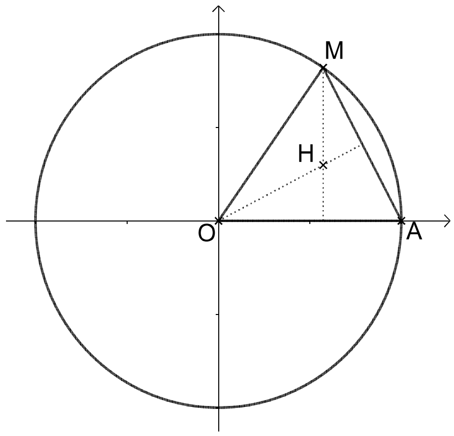
On a $\lim\limits_{t\to 0^+} x(t) = -\infty$ et $\lim\limits_{t\to 0^+} y(t) = 0$, donc l'axe (Ox) est asymptote à $\mathscr{C}$ quand $t \to 0^+$.

Courbe :



Exercice 2

Quitte à modifier le repère, on peut supposer que O est le centre et A le point de coordonnées $(a;0)$.



Posons $t=(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})$, donc $M\left(a\cos t, a\sin t\right)$ et notons $H\left(x(t),y(t)\right)$ l'orthocentre de OAM.

Remarquons que si $M=A$ ou A' (où A' est le point diamétralement opposé à A sur $\mathscr{C}$), le triangle est aplati et H n'est pas défini. Donc, on suppose $M\neq A$ et A', donc $t\neq 0\ [\pi]$ (et $\sin t\neq 0$).

On a alors :

- $(OH)\perp(AM)$ donc $\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{AM}=x(t)(a\cos t-a)+y(t)(a\sin t)=0$, soit : $x(t)\cos t+y(t)\sin t=x$.
- $(\mathrm{AH})\perp(\mathrm{OM})$ donc $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{OM}=(x(t)-a)\,a\cos t+y(t)\,a\sin t=0$, soit : $x(t)\cos t+y(t)\sin t=a\cos t$.

On obtient alors :

$$\begin{cases} x(t)\cos t+y(t)\sin t=x \\ x(t)\cos t+y(t)\sin t=a\cos t \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} x(t)=a\cos t \\ y(t)=\dfrac{a(1-\cos t)\cos t}{\sin t} \end{cases}\cdot$$

Les fonctions $t\mapsto x(t)$ et $t\mapsto y(t)$ sont définies, de classe C^∞ et 2π-périodiques sur $\mathbb{R}\setminus\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$.

La courbe est entièrement décrite quand t décrit $]-\pi,0[\cup]0,\pi[$.

Les fonctions $t\mapsto x(t)$ et $t\mapsto y(t)$ sont respectivement paire et impaire, donc la courbe est symétrique par rapport à l'axe (Ox) et on peut l'étudier sur $]0,\pi[$. Alors, pour tout $t\in]0,\pi[$, on a :

$$\begin{cases} x'(t)=-a\sin t \\ y'(t)=a(1-\cos t)\dfrac{\cos^2 t+\cos t-1}{\sin^2 t} \end{cases}$$

Les racines de X^2+X-1 sont $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\approx 0{,}6$ et $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\approx -1{,}6$.

En posant $t_0=\arccos\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$, on a :

$$y(t)=a\frac{1-\cos t}{\sin^2 t}\left(\cos t+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)(\cos t-\cos t_0).$$

On obtient le tableau :

t	0		t_0		π
$x'(t)$			$-$		
x	a		$\searrow$		$-a$
y	0	$\nearrow$	$y(t_0)$	$\searrow$	$-\infty$
$y'(t)$		$+$	0	$-$	

On a :

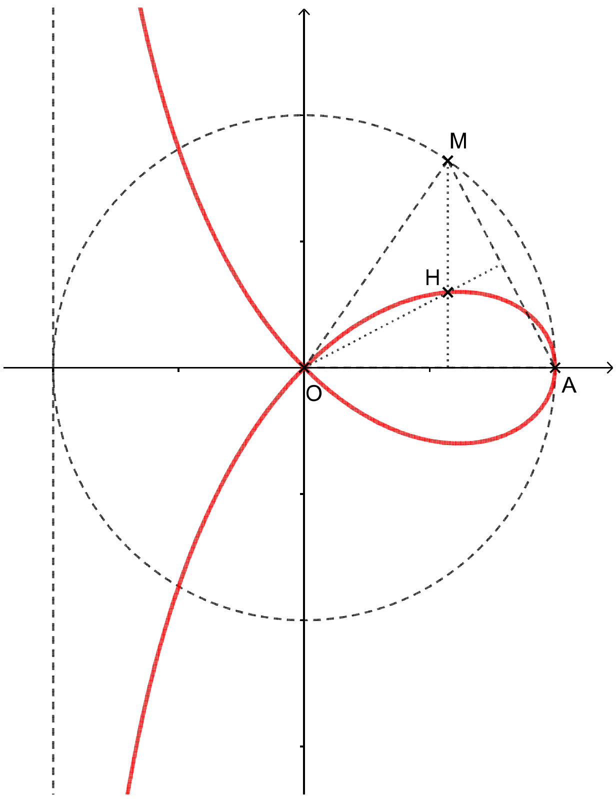
$$y(t) = a\cos t\,\frac{1-\cos t}{\sin t} = a\cos t\,\frac{t^2/2 + \underset{0}{o}(t^2)}{t + \underset{0}{o}(t^2)} = a\cos t\,\frac{t/2 + \underset{0}{o}(t)}{1 + \underset{0}{o}(t)} \quad \Rightarrow \quad \lim_{t\to 0} y(t) = 0\,.$$

Comme $x(0) = a$, la courbe peut être prolongée au point $(a,0)$ quand $t \to 0$.

Enfin :

- En $t = 0$, $x'(0) = 0$ et $\lim_{t\to 0} y'(t) = a\lim_{t\to 0}\dfrac{t^2/2 + \underset{0}{o}(t^2)}{t^2 + \underset{0}{o}(t^2)} = \dfrac{a}{2}$: il y une tangente verticale.
- En $t = t_0$, il y une tangente horizontale.
- Quand $t \to \pi$, il y a une asymptote verticale d'équation $x = -a$.

On obtient la courbe (en rouge sur la figure suivante).



Exercice 3

Remarquons que $O \in C$ et pour tout point $M(x, y)$ différent de *O*, on peut écrire de manière unique :

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases} \text{ avec } r \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } t \in [0, 2\pi[\,.$$

On a alors :

$$M(x, y) \in C \iff (x^2 + y^2)^3 = (x^2 - y^2)^2 \iff r^6 = r^4(\cos^2 t - \sin^2 t)^2 \iff r^2 = \cos^2 2t \iff r = |\cos 2t|\,.$$

Donc :

$$M(x, y) \in C \iff \begin{cases} x = |\cos 2t| \cos t \\ y = |\cos 2t| \sin t \end{cases}$$

Ainsi, un paramétrage de C est :

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = |\cos 2t| \cos t \\ y(t) = |\cos 2t| \sin t \end{cases}}$$

Si on pose $f(x, y) = (x^2 + y^2)^3 - (x^2 - y^2)^2$, *f* est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \iff \begin{cases} 6x(x^2 + y^2)^2 - 4x(x^2 - y^2) = 0 \\ 6y(x^2 + y^2)^2 + 4y(x^2 - y^2) = 0 \end{cases}$$

$$\iff x = y = 0 \text{ ou } \begin{cases} 3(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2) \\ 3(x^2 + y^2)^2 = -2(x^2 - y^2) \end{cases} \iff (x, y) = (0, 0)$$

Et, comme $O(0,0) \in C$:

$$\boxed{\text{Le seul point singulier de } C \text{ est l'origine } O.}$$

Exercice 4

Si on pose $f(x, y) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1$, *f* est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

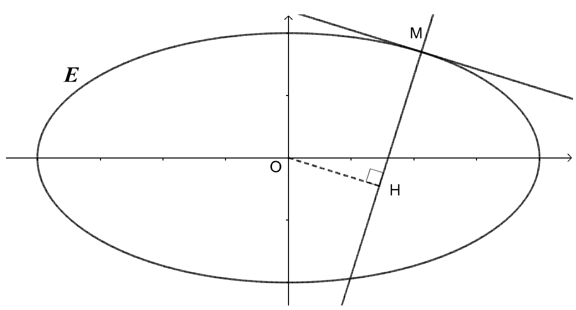
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2\frac{x}{a^2} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2\frac{y}{b^2}\,.$$

On a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y = 0$ et, comme $O(0,0) \notin \mathcal{E}$, la courbe est régulière.

Soit $M(x_0, y_0) \in \mathcal{E}$ et *H* le projeté orthogonal de *O* sur la normale $\mathcal{N}$ à $\mathcal{E}$ en *M*, comme sur la figure donnée plus loin. On a :

$$d(O, \mathcal{N}) = OH\,.$$

Figure :



La normale $\mathcal{N}$ à $\mathcal{E}$ en M est la droite dirigé par $\overrightarrow{grad}\, f\,(x_0, y_0) = 2\left(\frac{x_0}{a^2}\,\vec{i} + \frac{y_0}{b^2}\,\vec{j}\right)$ et passant par M, donc d'équation :

$$\frac{y_0}{b^2}(x - x_0) - \frac{x_0}{a^2}(y - y_0) = 0 .$$

On a alors :

$$\begin{cases} H(x_H, y_H) \in \mathcal{N} \\ \overrightarrow{OH}\,.\,\overrightarrow{grad}\, f\,(x_0, y_0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y_0}{b^2}(x_H - x_0) - \frac{x_0}{a^2}(y_H - y_0) = 0 \\ x_H\,\frac{x_0}{a^2} + y_H\,\frac{y_0}{b^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = \frac{a^2(a^2 - b^2)x_0 y_0^2}{b^4 x_0^2 + a^4 y_0^2} \\ y_H = \frac{b^2(b^2 - a^2)x_0^2 y_0}{b^4 x_0^2 + a^4 y_0^2} \end{cases}$$

Et :

$$OH^2 = x_H^2 + y_H^2 = \left(\frac{a^2(a^2 - b^2)x_0 y_0^2}{b^4 x_0^2 + a^4 y_0^2}\right)^2 + \left(\frac{b^2(b^2 - a^2)x_0^2 y_0}{b^4 x_0^2 + a^4 y_0^2}\right)^2 = (a^2 - b^2)^2\,\frac{x_0^2 y_0^2}{b^4 x_0^2 + a^4 y_0^2} .$$

Si on pose $t = \frac{x_0^2}{a^2} \in [0,1]$, on a $\frac{y_0^2}{b^2} = 1 - t$ car $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$, et $OH^2 = (a^2 - b^2)^2 h(t)$ avec :

$$h(t) = \frac{t(1-t)}{b^2 t + a^2(1-t)} .$$

La fonction h est définie et dérivable sur $[0,1]$ (car rationnelle) et :

$$h'(t) = \frac{a^2(1-t)^2 - b^2 t^2}{\left(b^2 t + a^2(1-t)\right)^2} = \frac{a(1-t) + bt}{\left(b^2 t + a^2(1-t)\right)^2}\left(a - (a+b)t\right) .$$

On a $h'(t) \geq 0$ pour $t \in \left[0, \frac{a}{a+b}\right]$ et $h'(t) \leq 0$ pour $t \in \left[\frac{a}{a+b}, 1\right]$, donc h est maximale quand $t = \frac{a}{a+b}$.

Ainsi, OH est maximale quand $x_0 = \pm\, a\sqrt{\frac{a}{a+b}}$ et $y_0 = \pm\, b\sqrt{\frac{b}{a+b}}$, et donc :

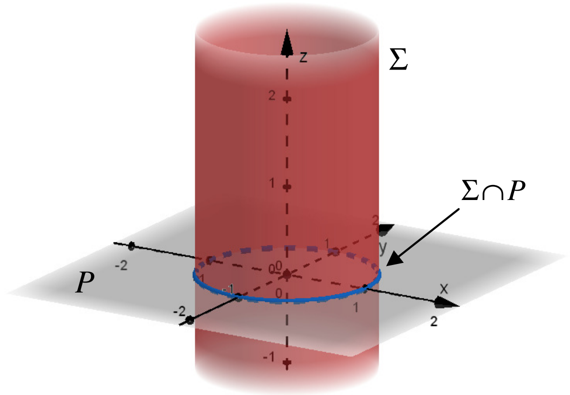
Les normales à $\mathcal{E}$ les plus éloignées de O sont les normales aux points :
$\left(a\sqrt{\frac{a}{a+b}}, b\sqrt{\frac{b}{a+b}}\right)$, $\left(a\sqrt{\frac{a}{a+b}}, -b\sqrt{\frac{b}{a+b}}\right)$, $\left(-a\sqrt{\frac{a}{a+b}}, b\sqrt{\frac{b}{a+b}}\right)$ et $\left(-a\sqrt{\frac{a}{a+b}}, -b\sqrt{\frac{b}{a+b}}\right)$

Exercice 5

1) On a $\Sigma = f^{-1}\left(\{1\}\right) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus f(x, y, z) = x^2 + y^2 = 1\right\}$, donc l'intersection de Σ et du plan P d'équation $z = 0$ est la courbe d'équation $x^2 + y^2 = 1$ dans ce plan :

$\Sigma \cap P$ est le cercle de centre O et de rayon 1 dans la plan P.

La surface Σ est un cylindre de révolution (autour de l'axe de z) et on obtient le graphique :



2) L'application f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ (polynomiale) avec pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=2x\,,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=2y \quad\text{et}\quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=0$$

Comme $f(x,y,z)=1$ est une équation de Σ, une équation du plan tangent à Σ en $M_0(x_0,y_0,z_0)$ est :

$$2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)=0\,.$$

Avec $x_0^2+y_0^2=1$, on obtient :

$$\boxed{x_0x+y_0y=1}$$

3) a. Les applications $h_1 : t\mapsto\big(\cos(t+\varphi),\sin(t+\varphi),z_0\big)$ et $h_2 : t\mapsto\big(x_0,y_0,z_0+t\big)$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, avec :

$$h_1' : t\mapsto\big(-\sin(t+\varphi),\cos(t+\varphi),0\big) \quad\text{et}\quad h_2' : t\mapsto\big(0,0,1\big).$$

L'application g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$, donc, d'après la règle de la chaîne, $G_1=g\circ h_1$ et $G_2=g\circ h_2$ sont de de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t\in\mathbb{R}$:

$$G_1'(t)=-\sin(t+\varphi)\frac{\partial g}{\partial x}\big(\cos(t+\varphi),\sin(t+\varphi),z_0\big)+\cos(t+\varphi)\frac{\partial g}{\partial y}\big(\cos(t+\varphi),\sin(t+\varphi),z_0\big)$$

$$G_2'(t)=\frac{\partial g}{\partial z}\big(x_0,y_0,z_0+t\big)$$

Finalement, avec $(x_0,y_0)=(\cos\varphi,\sin\varphi)$, on peut conclure que :

$$\boxed{G_1 \text{ et } G_2 \text{ sont dérivables en 0, avec } G_1'(0)=-\,y_0\frac{\partial g}{\partial x}\big(x_0,y_0,z_0\big)+x_0\frac{\partial g}{\partial y}\big(x_0,y_0,z_0\big) \text{ et } G_2'(0)=\frac{\partial g}{\partial z}\big(x_0,y_0,z_0\big).}$$

b. Remarquons que pour tout $t\in\mathbb{R}$, $\big(\cos(t+\varphi),\sin(t+\varphi),z_0\big)\in\Sigma$ (car $\cos^2(t+\varphi)+\sin^2(t+\varphi)=1$) et comme la restriction de g à Σ admet un extremum local en M_0 et $G_1(0)=g(x_0,y_0,z_0)$, G_1 admet un extremum local en 0, et comme G_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$G_1'(0)=-\,y_0\frac{\partial g}{\partial x}\big(x_0,y_0,z_0\big)+x_0\frac{\partial g}{\partial y}\big(x_0,y_0,z_0\big)=0\,.$$

De même, pour tout $t\in\mathbb{R}$, $(x_0, y_0, z_0+t)\in\Sigma$ (car $x_0^2+y_0^2=1$) et $G_2(0)=g(x_0,y_0,z_0)$, donc G_2 admet un extremum local en 0, et comme G_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$G_2'(0)=\frac{\partial g}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)=0.$$

On a donc :

$$\nabla f(M_0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0),\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0),\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\right)=2(x_0,\, y_0,\, 0)$$

$$\nabla g(M_0)=\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0,z_0),\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0,z_0),\frac{\partial g}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\right)=\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0,z_0),\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0,z_0),0\right)$$

Ainsi, $\nabla f(M_0)$ et $\nabla g(M_0)$ appartiennent tous les deux au plan vectoriel $\mathrm{Vect}(\vec{i},\vec{j})$ et :

$$\det_{(\vec{i},\vec{j})}\left(\nabla f(M_0),\nabla g(M_0)\right)=\begin{vmatrix} x_0 & \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) \\ y_0 & \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\end{vmatrix}=x_0\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)-y_0\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)=0.$$

Donc :

$$\boxed{\nabla f(M_0) \text{ et } \nabla g(M_0) \text{ sont colinéaires.}}$$

Exercice 6

1) Posons $f(x,y,z)=xyz-1$. Alors, $f(x,y,z)=0$ est une équation de Σ.

L'application *f* est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ (car polynomiale) et pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=yz,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=xz \text{ et } \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=xy.$$

Or, pour tout point de Σ, $xyz=1$, donc *x*, *y* et *z* sont tous les trois non nuls et ainsi, pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\neq 0,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\neq 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\neq 0.$$

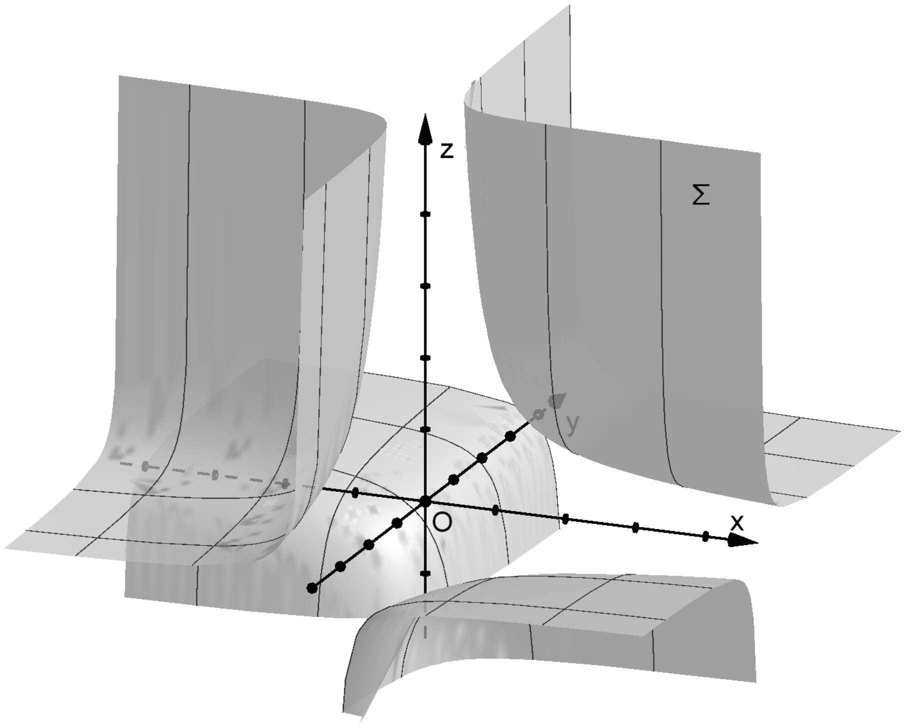
Ceci prouve que tous les points de Σ sont réguliers et donc que :

$$\boxed{\Sigma \text{ est une surface régulière.}}$$

2) Quand $x_0\neq 0$, l'intersection de Σ et du plan d'équation $x=x_0$ a pour équation $x_0yz=1$, soit $y=\frac{1}{x_0z}$: c'est une hyperbole. Quand $x_0=0$, l'intersection est vide.

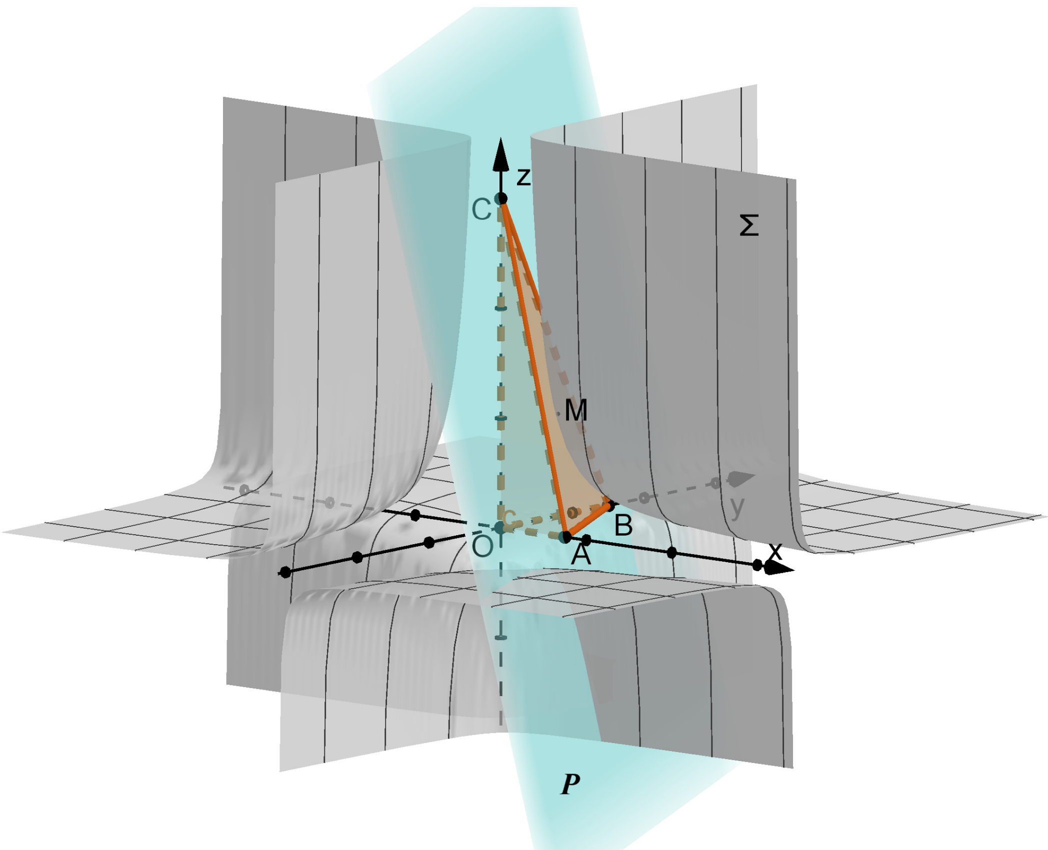
De même avec les plans d'équation $y=y_0$ ou $z=z_0$.

On obtient l'allure :



3) On cherche le volume V_{OABC} du tétraèdre OABC formé par un plan P tangent à Σ en un point $M(x_0, y_0, z_0)$, et les trois plans (xOy), (yOz) et (xOz) : A, B et C sont les points d'intersection de P avec les axes (Ox), (Oy) et (Oz) respectivement.

On a la figure :



Une équation de P est :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0.$$

Soit, avec les dérivées partielles vues plus haute et $x_0y_0z_0=1$:

$$y_0z_0x+x_0z_0y+x_0y_0z=3.$$

On a alors :

$$A=P\cap(Ox) \iff \begin{cases} y_0z_0x_A+x_0z_0y_A+x_0y_0z_A=3 \\ y_A=z_A=0 \end{cases} \iff A\left(\frac{3}{y_0z_0},0,0\right)$$

$$B=P\cap(Oy) \iff \begin{cases} y_0z_0x_A+x_0z_0y_A+x_0y_0z_A=3 \\ x_A=z_A=0 \end{cases} \iff B\left(0,\frac{3}{x_0z_0},0\right)$$

$$C=P\cap(Oz) \iff \begin{cases} y_0z_0x_A+x_0z_0y_A+x_0y_0z_A=3 \\ x_A=y_A=0 \end{cases} \iff C\left(0,0,\frac{3}{x_0y_0}\right)$$

Donc :

$$V_{OABC}=\frac{1}{6}\left|\det(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})\right|=\frac{1}{6}\left|\frac{3}{y_0z_0}\frac{3}{x_0z_0}\frac{3}{x_0y_0}\right|=\frac{1}{6}\frac{27}{(x_0y_0z_0)^2}=\frac{9}{2}.$$

Ainsi :

> Le volume du tétraèdre formé par un plan tangent à Σ et les trois plans (xOy), (yOz) et (xOz) est constant et vaut 4,5.

Exercice 7

1) Le plan (xOy) est le plan d'équation $z=0$. La projection de S sur le plan (xOy) a donc pour équation (dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ de ce plan) $x^2+y^2=1$ et donc :

> La projection de S sur le plan (xOy) est le cercle de centre O et de rayon 1.

2) Posons $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2xyz-1$. Alors, $f(x,y,z)=0$ est une équation de S.

L'application f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ (car polynomiale) et pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=2(x-yz),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=2(y-xz)\ \text{ et }\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=2(z-xy).$$

On a alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=0 \iff \begin{cases} x=yz \\ y=xz \\ z=xy \end{cases} \iff \begin{cases} x=yz \\ y=xz \\ z=x^2z \end{cases} \iff x=y=z=0 \text{ ou } \begin{cases} x^2=1 \\ yz=x \\ z^2=1 \end{cases}$$

Comme on a de plus, $x^2+y^2+z^2-2xyz=1$, ceci donne :

$$\begin{cases} x^2=y^2=z^2=1 \\ xyz=1 \end{cases}$$

Et on obtient quatre points singuliers :

$$\boxed{(1,1,1) \quad (-1,-1,1) \quad (-1,1,-1) \quad (1,-1,-1)}$$

3) Soit $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un point de S et $\vec{u}(a,b,c)$ un vecteur unitaire ($a^2+b^2+c^2=1$).

La droite D passant par M_0 et dirigée par $\vec{u}$ admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

Alors, $D \subset S$ si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$(at+x_0)^2 + (bt+y_0)^2 + (ct+z_0)^2 - 2(at+x_0)(bt+y_0)(ct+z_0) = 1.$$

Avec $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 2x_0y_0z_0 = 1$ et $a^2+b^2+c^2=1$, ceci revient à :

$$\begin{cases} abc = 0 \\ 2(x_0bc + abz_0 + acy_0) = 1 \\ ay_0z_0 + bx_0z_0 + cx_0y_0 = ax_0 + by_0 + cz_0 \end{cases}$$

Si $a=0$, on a $b^2+c^2=1$ et on peut écrire $b=\cos\alpha$ et $c=\sin\alpha$, et le système ci-dessus se récrit :

$$\begin{cases} 2bcx_0 = 1 \\ bx_0z_0 + cx_0y_0 = by_0 + cz_0 \end{cases}$$

Ceci implique (entre autres) que x_0, b et c (donc $\sin 2\alpha$) sont non nuls et :

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{1}{2bc} \\ \dfrac{1-2c^2}{2c} z_0 = \dfrac{2b^2-1}{2b} y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \dfrac{1}{\sin 2\alpha} \\ (\cos 2\alpha)\, z_0 = (\cos 2\alpha \tan\alpha)\, y_0 \end{cases}$$

Si $\cos 2\alpha = 0$, soit $b^2 = c^2 = \dfrac{1}{2}$, donc $|b| = |c| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (avec bc du signe de x_0), on obtient $\sin 2\alpha = \pm 1$, donc $x_0 = \pm 1$ et $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 2x_0y_0z_0 = 1$ donne :

$$\begin{cases} y_0 = z_0,\ b = c & \text{si } x_0 = 1 \\ y_0 = -z_0,\ b = -c & \text{si } x_0 = -1 \end{cases}$$

Soit :

$$(x_0, y_0, z_0) = (1, k, k) \ \text{ ou } \ (-1, -k, k) \ \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

On obtient alors les droites d'équations :

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = -z \end{cases}$$

Si $\cos 2\alpha \neq 0$ (soit $\alpha \neq 0 \left[\dfrac{\pi}{4}\right]$ avec aussi $\sin 2\alpha \neq 0$), on obtient :

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{1}{\sin 2\alpha} \\ z_0 = (\tan\alpha)\, y_0 \end{cases}$$

Et $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 2x_0y_0z_0 = 1$ donne $\sin^2 2\alpha = 1$, ce qui est absurde car $\cos 2\alpha \neq 0$.

Comme a, b et c jouent le même rôle, on obtient finalement les six droites d'équations cartésiennes :

$$\boxed{D_1 : \begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases} \text{ ou } D_2 : \begin{cases} x = -1 \\ y = -z \end{cases} \text{ ou } D_3 : \begin{cases} y = 1 \\ x = z \end{cases} \text{ ou } D_4 : \begin{cases} y = -1 \\ x = -z \end{cases} \text{ ou } D_5 : \begin{cases} z = 1 \\ x = y \end{cases} \text{ ou } D_6 : \begin{cases} z = -1 \\ x = -y \end{cases}}$$

4) Soit S_c la partie de S limitée au cube $[-1,1]^3$, soit :

$$S_c = \left\{ M(x,y,z) \in \mathscr{E} \setminus (x,y,z) \in [-1,1]^3 \text{ et } x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz = 1 \right\}$$

où $\mathscr{E}$ désigne l'espace. Notons par ailleurs :

$$\Sigma = \left\{ M\left(\cos u, \cos v, \cos(u+v)\right) \in \mathscr{E} \setminus (u,v) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

On veut prouver que $S_c = \Sigma$.

Pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, on a $\left(\cos u, \cos v, \cos(u+v)\right) \in [-1,1]^3$ et :

$$\begin{aligned}
&\cos^2 u + \cos^2 v + \cos^2(u+v) - 2\cos u \cos v \cos(u+v) \\
&\quad = \cos^2 u + \cos^2 v + \left(\cos u \cos v - \sin u \sin v\right)^2 - 2\cos u \cos v \left(\cos u \cos v - \sin u \sin v\right) \\
&\quad = \cos^2 u + \cos^2 v + \cos^2 u \cos^2 v + \sin^2 u \sin^2 v - 2\cos u \cos v \sin u \sin v \\
&\qquad\qquad - 2\cos u^2 \cos^2 v + 2\cos u \cos v \sin u \sin v \\
&\quad = \cos^2 u + \cos^2 v - \cos^2 u \cos^2 v + (1-\cos^2 u)(1-\cos^2 v) \\
&\quad = 1
\end{aligned}$$

Donc, $M\left(\cos u, \cos v, \cos(u+v)\right) \in S_c$ et ainsi : $\underline{\Sigma \subset S_c}$.

Soit $M(x,y,z) \in S_c$. On a $(x,y,z) \in [-1,1]^3$, donc il existe $(u,v,w) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$x = \cos u, \quad y = \cos v \quad \text{et} \quad z = \cos w.$$

On a de plus :

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad z^2 - 2xyz + x^2y^2 = 1 - x^2 - y^2 + x^2y^2 \\
&\Leftrightarrow \quad (z - yz)^2 = (1-x^2)(1-y^2)
\end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{aligned}
(\cos w - \cos u \cos v)^2 = (1-\cos^2 u)(1-\cos^2 v) \quad &\Leftrightarrow \quad (\cos w - \cos u \cos v)^2 = (\sin u \sin v)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \cos w - \cos u \cos v = \sin u \sin v \\ \quad ou \\ \cos w - \cos u \cos v = -\sin u \sin v \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \cos w = \cos(u-v) \\ \quad ou \\ \cos w = \cos(u+v) \end{cases}
\end{aligned}$$

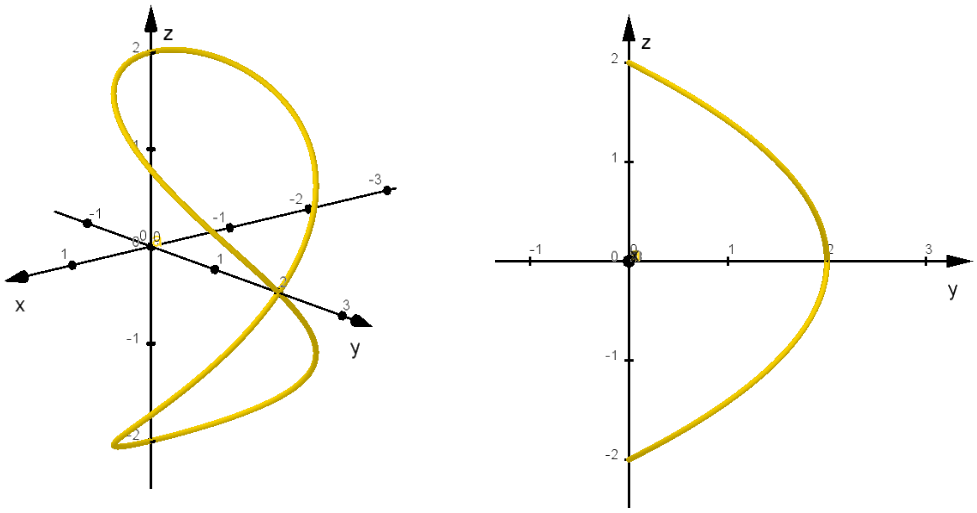
Ainsi, $(x,y,z)=\big(\cos u, \cos(-v), \cos(u-v)\big)$ ou $(x,y,z)=\big(\cos u, \cos v, \cos(u+v)\big)$ et dans les deux cas, on a $M\in\Sigma$, donc : $\underline{S_c\subset\Sigma}$.

Finalement, on a bien $S_c=\Sigma$, autrement dit :

$$\boxed{\text{La partie de } S \text{ limitée au cube } [-1,1]^3 \text{ admet le paramétrage } (u,v)\mapsto\big(\cos u, \cos v, \cos(u+v)\big).}$$

Exercice 8

Commençons par représenter la courbe C sous deux angles (avec ici $a=1$).



Remarquons que les fonctions $x:t\mapsto a\sin(2t)$, $y:t\mapsto a\big(1-\cos(2t)\big)$ et $z:t\mapsto 2a\cos t$ sont 2π-périodiques, donc la courbe est entièrement parcourue quand t décrit $[-\pi,\pi]$.

De plus, si $M(t)$ est le point de coordonnées $\big(a\sin(2t), a\big(1-\cos(2t)\big), 2a\cos t\big)$, $M(-t)$ est de coordonnées $\big(-a\sin(2t), a\big(1-\cos(2t)\big), 2a\cos t\big)$ donc symétrique par rapport au plan (yOz) et $M(t+\pi)$ est de coordonnées $\big(a\sin(2t), a\big(1-\cos(2t)\big), -2a\cos t\big)$ donc symétrique par rapport au plan (xOy).

Ainsi, C est symétrique par rapport aux plans (xOy) et (yOz).

Nous donc chercher une sphère, un cylindre parabolique et un cylindre de révolution symétriques par rapport à ces deux plans.

Soit S une sphère de centre $\Omega(0,\beta,0)$, d'équation $x^2+(y-\beta)^2+z^2=cste$.

On a alors pour tout $t\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
x(t)^2+\big(y(t)-\beta\big)^2+z(t)^2 &= a^2\sin^2(2t)+\big(a\big(1-\cos(2t)\big)-\beta\big)^2+4a^2\cos^2 t\\
&= a^2\sin^2(2t)+a^2\big(1-2\cos(2t)+\cos^2(2t)\big)-2a\beta\big(1-\cos(2t)\big)+\beta^2+4a^2\cos^2 t\\
&= 2a^2-2a^2\cos(2t)-2a\beta\big(1-\cos(2t)\big)+\beta^2+2a^2\big(1+\cos(2t)\big)\\
&= 4a^2+\beta^2-2a\beta+2a\beta\cos(2t)
\end{aligned}$$

Donc, en prenant $\beta=0$, on a $x(t)^2+y(t)+z(t)^2=(2a)^2$ et ainsi, $M(t)\in S$ pour tout $t\in\mathbb{R}$, donc :

$$\boxed{\text{La courbe } C \text{ est tracée sur la sphère de centre O et de rayon } 2a.}$$

D'après la seconde vue de C donnée plus haut, considérons le cylindre parabolique d'équation $y + pz^2 = cste$ avec $p > 0$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} y(t) + pz(t)^2 &= a\left(1-\cos(2t)\right) + p\left(4a^2\cos^2 t\right) \\ &= a\left(1-\cos(2t)\right) + 2a^2 p\left(1+\cos(2t)\right) \\ &= 2a^2 p + a + a\left(2ap-1\right)\cos(2t) \end{aligned}$$

Si on prend $2ap - 1 = 0$, soit $p = \dfrac{1}{2a}$, obtient pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$y(t) + \frac{1}{2a} z(t)^2 = 2a\,.$$

Donc :

$$\boxed{\text{La courbe } C \text{ est tracée sur le cylindre parabolique d'équation } y = 2a - \frac{1}{2a} z^2.}$$

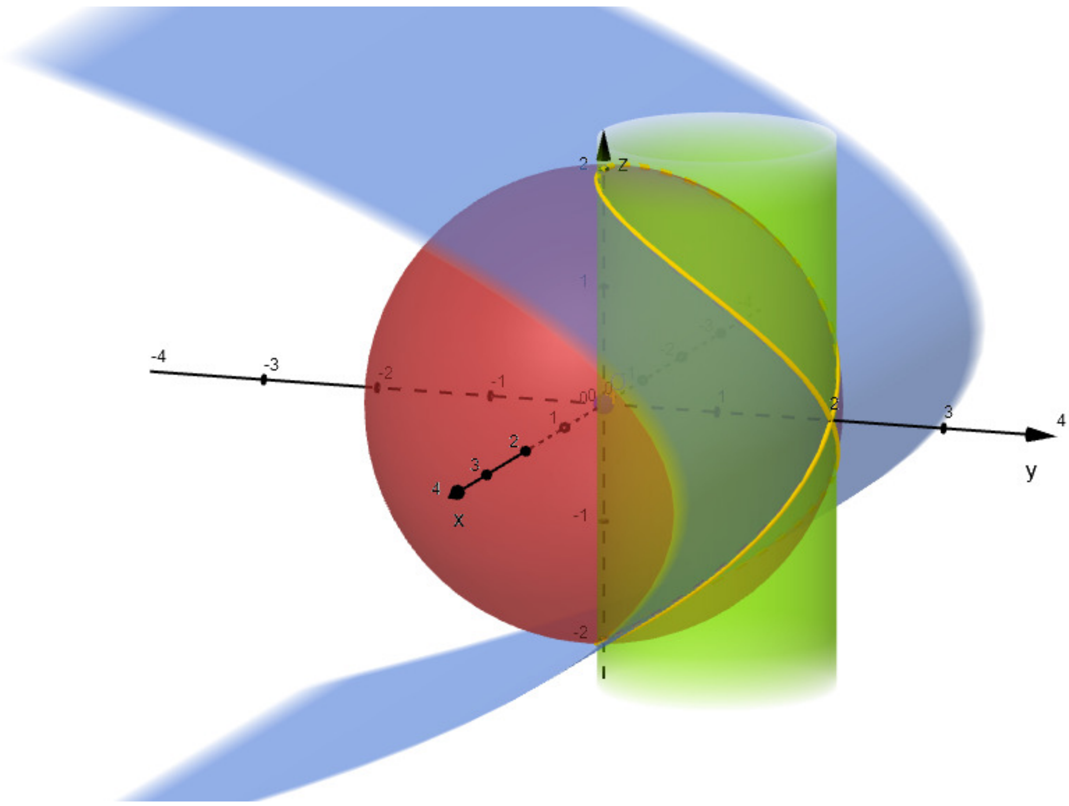
On peut remarquer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$x(t)^2 + \left(y(t) - a\right)^2 = a^2\sin^2(2t) + a^2\cos^2(2t) = a^2\,.$$

Donc :

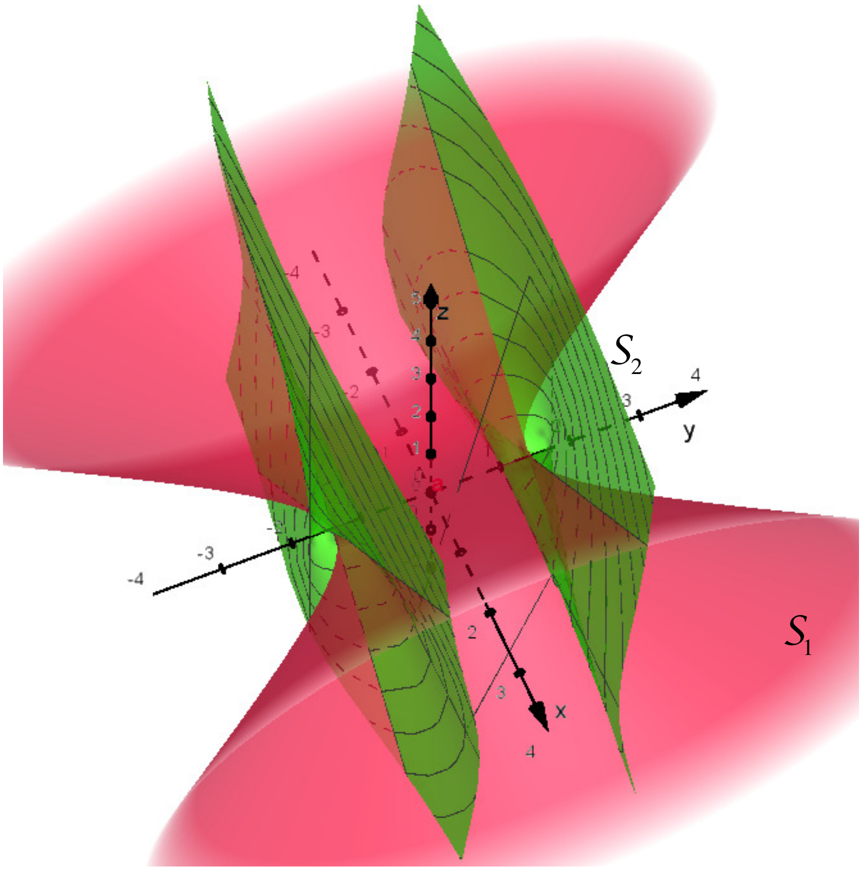
$$\boxed{\text{La courbe } C \text{ est tracée sur le cylindre de révolution d'équation } x^2 + (y-a)^2 = a^2.}$$

On obtient le schéma :



Exercice 9

On a le graphique :



Les applications $f_1:(x,y,z)\mapsto y^2(x^2+z^2)-x^2-3z^2$ et $f_2:(x,y,z)\mapsto -x^2+\dfrac{y^2}{2}+z^2-1$ sont polynômiales donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ et pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z)=2x(y^2-1)\\ \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z)=2y(x^2+z^2)\\ \dfrac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z)=2z(y^2-3)\end{cases}\quad \text{et}\quad \begin{cases}\dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z)=-2x\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z)=y\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z)=2z\end{cases}$$

Remarquons que si l'on remplace x (*resp.* y, *resp.* z) par $-x$ (*resp.* $-y$, *resp.* $-z$), les équations de S_1 et S_2 restent vérifiées, donc S_1 et S_2 sont symétriques par rapport aux trois plans (xOy), (yOz) et (xOz). On peut ainsi limiter l'étude à aux points des courbes dont les trois coordonnées sont positives.

Soit un point $M(x,y,z)$ de l'espace. On a :

$$M\in S_1\cap S_2 \iff \begin{cases}y^2(x^2+z^2)-x^2-3z^2=0\\ -x^2+\dfrac{y^2}{2}+z^2=1\end{cases} \iff \begin{cases}\left[2+2(x^2-z^2)\right](x^2+z^2)-x^2-3z^2=0\\ y^2=2+2(x^2-z^2)\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}(x^2-z^2)\left[1+2(x^2+z^2)\right]=0\\ y^2=2+2(x^2-z^2)\end{cases} \iff \begin{cases}x^2-z^2=0\\ y^2=2\end{cases}$$

Si de plus, on prend $x\geq 0$, $y\geq 0$ et $z\geq 0$, on obtient les points $M(x,\sqrt{2},x)$ avec $x\geq 0$.

On a alors :

$$\overrightarrow{grad}\, f_1(x,\sqrt{2},x) = 2x\vec{i} + 4\sqrt{2}x^2\vec{j} - 2x\vec{k} = 2x\,(\vec{i} + 2\sqrt{2}x\vec{j} - \vec{k})$$
$$\overrightarrow{grad}\, f_2(x,\sqrt{2},x) = -2x\vec{i} + \sqrt{2}\,\vec{j} + 2x\vec{k}$$

Notons $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ les plans tangents à S_1 et S_2 en $M(x,\sqrt{2},x)$.

Quel que soit $x \geq 0$:

- $\overrightarrow{grad}\, f_1(x,\sqrt{2},x)$ est colinéaire à $\vec{i} + 2\sqrt{2}x\vec{j} - \vec{k}$, qui est donc normal à $\mathcal{P}_1$ et non nul ;
- $\overrightarrow{grad}\, f_2(x,\sqrt{2},x) = -2x\vec{i} + \sqrt{2}\,\vec{j} + 2x\vec{k}$ est normal à $\mathcal{P}_1$ et non nul.

Les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont perpendiculaires si et seulement si un vecteur normal (non nul) à $\mathcal{P}_1$ est orthogonal à un vecteur normal à $\mathcal{P}_2$, donc si et seulement si $\vec{i} + 2\sqrt{2}x\vec{j} - \vec{k}$ et $-2x\vec{i} + \sqrt{2}\,\vec{j} + 2x\vec{k}$ sont orthogonaux.

Or, quel que soit $x \geq 0$:

$$\left(\vec{i} + 2\sqrt{2}x\vec{j} - \vec{k}\right).\left(-2x\vec{i} + \sqrt{2}\,\vec{j} + 2x\vec{k}\right) = -2x + 4x - 2x = 0\,.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{En chacun de leurs points communs, les plans tangents à } S_1 \text{ et } S_2 \text{ sont perpendiculaires.}}$$

Exercice 10

1) La fonction $f : (x,y,z) \mapsto (x+y+z+1)\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} + 1\right)$ est, elle aussi, rationnelle et définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^3$, donc de classe C^2 sur $(\mathbb{R}_+^*)^3$. Pour tout $(x,y,z) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$, on a :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} + 1 - \dfrac{1}{x^2}(x+y+z+1) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} + 1 - \dfrac{1}{y^2}(x+y+z+1) \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} + 1 - \dfrac{1}{z^2}(x+y+z+1) \end{cases}$$

Et :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = 2\dfrac{y+z+1}{x^3} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = 2\dfrac{x+z+1}{y^3} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = 2\dfrac{x+y+1}{z^3} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) = -\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{y^2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) = -\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{z^2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) = -\dfrac{1}{y^2} - \dfrac{1}{z^2} \end{cases}$$

Donc, pour tout $(x,y,z)\in(\mathbb{R}_+^*)^3$:

$$\boxed{H_f(x,y,z)=\begin{pmatrix} 2\dfrac{y+z+1}{x^3} & -\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2} & -\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{z^2} \\ -\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2} & 2\dfrac{x+z+1}{y^3} & -\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{1}{z^2} \\ -\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{z^2} & -\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{1}{z^2} & 2\dfrac{x+y+1}{z^3} \end{pmatrix}}$$

Remarquons que $(\mathbb{R}_+^*)^3$ est un ouvert de $\mathbb{R}^3$, donc si *f* admet un extremum (local ou global), il est atteint en un point critique. Cherchons alors les points critiques de *f*. Pour $(x,y,z)\in(\mathbb{R}_+^*)^3$, on a :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}+1-\dfrac{1}{x^2}(x+y+z+1)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}+1-\dfrac{1}{y^2}(x+y+z+1)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}+1-\dfrac{1}{z^2}(x+y+z+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x=y=z=1.$$

Alors :

$$H_f(1,1,1)=\begin{pmatrix} 6 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}=2A \text{ avec } A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Et :

$$\chi_A=\begin{vmatrix} X-3 & 1 & 1 \\ 1 & X-3 & 1 \\ 1 & 1 & X-3 \end{vmatrix} \underset{C_1\leftarrow C_1+C_2+C_3}{=} \begin{vmatrix} X-1 & 1 & 1 \\ X-1 & X-3 & 1 \\ X-1 & 1 & X-3 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}{=} \begin{vmatrix} X & 1 & 1 \\ 0 & X-4 & 0 \\ 0 & 0 & X-4 \end{vmatrix} =(X-1)(X-4)^2.$$

Ainsi, $Sp(A)=\{1,4\}\subset\mathbb{R}_+^*$, donc $A\in S_3^{++}(\mathbb{R})$. Ainsi, $H_f(1,1,1)=2A\in S_3^{++}(\mathbb{R})$ et donc, *f* admet un minimum local strict en $(1,1,1)$, qui vaut $f(1,1,1)=16$. Remarquons que pour tous $a,b\in\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{4}{a+b}=\frac{(a+b)^2-4ab}{(a+b)ab}=\frac{(a-b)^2}{(a+b)ab}\geq 0.$$

Donc, pour tous $a,b\in\mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\geq\dfrac{4}{a+b}$.

En appliquant ceci à $(a,b)=(x,y)$, $(a,b)=(z,1)$, puis $(a,b)=(x+y,z+1)$ avec $(x,y,z)\in(\mathbb{R}_+^*)^3$, on obtient :

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\geq\dfrac{4}{x+y} \\ \dfrac{1}{z}+1\geq\dfrac{4}{z+1} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+1\geq 4\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{z+1}\right)\geq 4\frac{4}{x+y+z+1} \quad \Rightarrow \quad f(x,y,z)\geq 16.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ admet 16 pour minimum global sur } (\mathbb{R}_+^*)^3 \text{, atteint en } (1,1,1).}$$

2) Sur le même principe que pour la précédente, la fonction $f:(x,y)\mapsto(x+y)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)$ est, elle aussi, rationnelle et définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, donc de classe C^2 sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ et pour tout $(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x^2}(x+y)=\dfrac{1}{y}-\dfrac{y}{x^2}\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{y^2}(x+y)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{y^2}\end{cases}$$

En redérivant comme plus haut, on obtient pour tout $(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$:

$$\boxed{H_f(x,y)=\begin{pmatrix}2\dfrac{y}{x^3} & -\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}\\ -\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2} & 2\dfrac{x}{y^3}\end{pmatrix}}$$

Remarquons que $(\mathbb{R}_+^*)^2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, donc si *f* admet un extremum (local ou global), il est atteint en un point critique. Cherchons alors les points critiques de *f*.

Pour $(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$, on a :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x^2}(x+y)=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{y^2}(x+y)=0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad x=y.$$

Alors, pour tout $a\in\mathbb{R}_+^*$, (a,a) est un point critique de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ et :

$$H_f(a,a)=\frac{2}{a^2}A \text{ avec } A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}.$$

On a $\chi_A=X(X-2)$, donc, $Sp(A)=\{0,2\}\subset\mathbb{R}_+^*$ et $A\in S_3^+(\mathbb{R})$. On ne peut alors utiliser le théorème du cours.

Mais, pour tout $a\in\mathbb{R}_+^*$, $f(a,a)=2a\dfrac{2}{a}=4$ et on a vu dans la question précédente que pour tout $(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{4}{x+y}\quad\Leftrightarrow\quad f(x,y)=(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\geq 4.$$

Ainsi :

La fonction *f* admet 4 pour minimum global sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, atteint en tout (a,a) avec $a\in\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 11

Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ et *D* la droite passant par $(0,0)$ et dirigée par (a,b). Alors, pour tout $t\in\mathbb{R}$:

$$g(t)=f(at,bt)=(a^2t^2-bt)(3a^2t^2-bt)=3a^4t^4-4a^2bt^3+b^2t^2.$$

Alors, la restriction de *f* à la droite *D* admet un minimum local strict en $(0,0)$ si et seulement si *g* admet un minimum local strict en 0.

La fonction *g* est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t\in\mathbb{R}$, $g'(t)=12a^4t^3-12a^2bt^2+2b^2t$.

- Si $b \neq 0$, on a $g'(t) \underset{t\to 0}{\sim} 2b^2 t$, donc $g'(t)$ s'annule en 0 en passant de négatif à positif : g admet un minimum local strict en 0.
- Si $b = 0$, alors $a \neq 0$ et on a $g'(t) = 12a^4 t^3$, donc, à nouveau, $g'(t)$ s'annule en 0 en passant de négatif à positif : g admet un minimum local strict en 0.

Finalement, dans les deux cas, g admet un minimum local strict en 0 et ainsi :

$$\boxed{\text{La restriction de } f \text{ à toutes les droites passant par } (0,0) \text{ admet un minimum local strict en } (0,0).}$$

On a $f(0,0) = 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f(x,0) = 3x^4 > 0$$
$$f(x,2x^2) = -x^4 < 0$$

Ceci prouve que 0 n'est pas un extremum local en $(0,0)$ et ainsi :

$$\boxed{f \text{ n'a pas d'extremum local en } (0,0).}$$

Exercice 12

1) On a :

$$\begin{aligned} L &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\,dt \\ &= 4\int_0^{\pi/4} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\,dt + 4\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\,dt \end{aligned}.$$

En posant $u = \dfrac{\pi}{2} - t$ dans la seconde intégrale, on obtient :

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\,dt = \int_0^{\pi/4} \sqrt{a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u}\,du.$$

Donc $L = 4\int_0^{\pi/4} g(t)\,dt$ avec :

$$g(t) = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} + \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}.$$

La fonction g est définie et dérivable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$, avec pour tout $t \in \left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$:

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{a^2 \cos t \sin t - b^2 \sin t \cos t}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} + \frac{-a^2 \sin t \cos t + b^2 \cos t \sin t}{\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}} \\ &= (a^2 - b^2)\sin t \cos t \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}} \right) \\ &= \frac{(a^2 - b^2)\sin 2t}{2\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}} \left(\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} - \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} \right) \end{aligned}$$

$$=\frac{(a^2-b^2)\sin 2t}{2\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}}\frac{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t-a^2\sin^2 t-b^2\cos^2 t}{\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}+\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}}$$

$$=\frac{(a^2-b^2)\sin 2t}{2\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}}\frac{(a^2-b^2)(\cos^2 t-\sin^2 t)}{\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}+\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}}$$

$$=\frac{(a^2-b^2)\sin 2t}{2\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}}\frac{(a^2-b^2)\cos 2t}{\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}+\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}}$$

$$=\frac{(a^2-b^2)^2\sin 4t}{4\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}\left(\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}+\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\right)}$$

Pour tout $t\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, $\sin 4t\geq 0$, donc $g'(t)\geq 0$ et g est croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.

Alors, pour tout $t\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, $g(0)\leq g(t)\leq g\left(\frac{\pi}{4}\right)$, soit :

$$a+b\leq g(t)\leq\sqrt{2(a^2+b^2)}\,.$$

On a alors $4\int_0^{\pi/4}(a+b)\,dt\leq 4\int_0^{\pi/4}g(t)\,dt\leq 4\int_0^{\pi/4}\sqrt{2(a^2+b^2)}\,dt$, soit :

$$\boxed{\pi(a+b)\leq L\leq\pi\sqrt{2(a^2+b^2)}}$$

2) On veut $L=2\pi a\left(1-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2n-1}\left[\binom{2n}{n}\frac{e^n}{2^{2n}}\right]^2\right)$. On a :

$$L=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\cos^2 t}\,dt=4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-(e\cos t)^2}\,dt\,.$$

Et $e^2=1-\left(\frac{b}{a}\right)^2\in\,]0,1[$, donc pour tout $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $0<e\cos t<1$ et :

$$\sqrt{1-(e\cos t)^2}=1-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n-1}\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}(e\cos t)^{2n}\,.$$

De plus, pour tout $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et tout $n\in\mathbb{N}^*$, si $f_n(t)=\frac{1}{2n-1}\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}(e\cos t)^{2n}$, on a :

$$|f_n(t)|\leq\frac{1}{2n-1}\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}e^{2n}.$$

Et la série $\sum\frac{1}{2n-1}\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}e^{2n}$ converge (avec $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2n-1}\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}e^{2n}=1-\sqrt{1-e^2}$), donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et :

$$\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-(e\cos t)^2}\,dt=\int_0^{\pi/2}\left[1-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n-1}\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}(e\cos t)^{2n}\right]dt=\frac{\pi}{2}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n-1}\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}e^{2n}\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}t\,dt\,.$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, si $I_n=\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}t\,dt$, on a par intégration par parties :

$$\begin{aligned}I_{n+1}&=\int_0^{\pi/2}\cos^{2(n+1)}t\,dt=\int_0^{\pi/2}\cos t\cos^{2n+1}t\,dt=\Big[\sin t\cos^{2n+1}t\Big]_0^{\pi/2}+\int_0^{\pi/2}(2n+1)\sin^2 t\cos^{2n}t\,dt\\&=(2n+1)\int_0^{\pi/2}(1-\cos^2 t)\cos^{2n}t\,dt=(2n+1)\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}t\,dt-(2n+1)\int_0^{\pi/2}\cos^{2(n+1)}t\,dt\\&=(2n+1)I_n-(2n+1)I_{n+1}\end{aligned}$$

Ainsi, $I_{n+1}=\dfrac{2n+1}{2n+2}I_n$ et $I_n=\dfrac{(2n-1)\times(2n-3)\times\ldots\times3\times1}{2n\times(2n-2)\times\ldots\times2}I_0=\dfrac{1}{2^{2n}}\dbinom{2n}{n}\dfrac{\pi}{2}$.

Alors :

$$\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-(e\cos t)^2}\,dt=\frac{\pi}{2}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n-1}\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}e^{2n}\,\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}\left(1-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n-1}\left[\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}e^{n}\right]^2\right).$$

Et finalement :

$$\boxed{L=2\pi a\left(1-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2n-1}\left[\binom{2n}{n}\frac{e^n}{2^{2n}}\right]^2\right)}$$

3) Du fait des symétries vues plus haut, l'aire A de la surface délimitée par $\mathscr{E}$ vaut 4 fois l'aire de la surface comprise entre (Ox), (Oy) et la partie de $\mathscr{E}$ située dans le quart de plan tel que $x\geq 0$ et $y\geq 0$.

Posons $x=a\cos t$ et $y=b\sin t$.

Pour tout $t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $0\leq x\leq a$, $0\leq y\leq b$ et $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2+\left(\dfrac{y}{b}\right)^2=1$, donc $y=b\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{a}\right)^2}$ et :

$$A=4\int_0^a b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\,dx.$$

En posant $x=a\cos t$ (donc $dx=(-a\sin t)dt$), on obtient :

$$A=4\int_{\pi/2}^0 b\sqrt{1-\cos^2 t}(-a\sin t)dt=4ab\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\,dt=4ab\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 2t}{2}dt=\pi ab-2ab\left[\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\pi/2}.$$

Soit :

$$\boxed{A=\pi ab}$$

Exercice 13

1) La fonction est nulle sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_-^*$ et rationnelle sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$, donc elle est continue sur ces deux ensembles.

De plus, pour $a\in\mathbb{R}$ et tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$\left|f(x,y)-f(a,0)\right|=\left|f(x,y)\right|=\begin{cases}\dfrac{y}{1+x^2}\leq y=|y| & \text{si } y\geq 0\\ 0\leq|y| & \text{sinon}\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\left|f(x,y)-f(x,0)\right|\leq|y|.$$

Donc, $\lim\limits_{(x,y)\to(a,0)}\left|f(x,y)-f(a,0)\right|=0$ et ainsi, f est continue sur $\mathbb{R}\times\{0\}$.

Finalement :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est continue sur } \mathbb{R}^2.}$$

Comme plus haut, la fonction est nulle sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_-^*$ et rationnelle sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$, donc elle est de classe C^1 sur ces deux ensembles, avec pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}-\dfrac{2xy}{(1+x^2)^2} & \text{si } y>0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x^2} & \text{si } y>0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

De plus, pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\lim_{y\to 0^+}\frac{f(x,y)-f(x,0)}{y}=\frac{1}{1+x^2}\neq 0=\lim_{y\to 0^-}\frac{f(x,y)-f(x,0)}{y}.$$

Donc f n'admet pas de dérivée partielle par rapport à y en tout point de la forme $(x,0)$, donc :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ n'est pas de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^2.}$$

Pour $k\in\mathbb{R}$, appelons $\mathscr{L}_k$ la ligne de niveau $\mathscr{L}_k=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \setminus f(x,y)=k\right\}$.

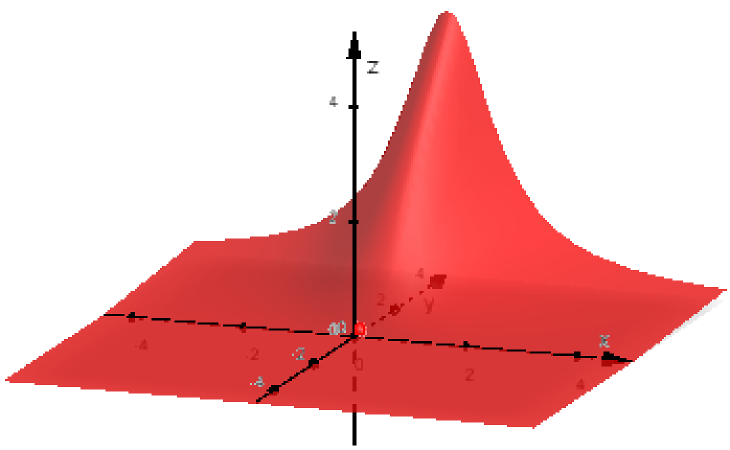
En remarquant que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(x,y)>0$ quand $y>0$ et $f(x,y)=0$ quand $y\leq 0$, on a $\mathscr{L}_0=\mathbb{R}\times\mathbb{R}_-$, $\mathscr{L}_k=\varnothing$ pour $k<0$ et, pour $k>0$:

$$\mathscr{L}_k=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^* \setminus \frac{y}{1+x^2}=k\right\}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^* \setminus y=k(1+x^2)\right\}.$$

Donc :

$$\boxed{\text{Pour tout } k\in\mathbb{R},\ \mathscr{L}_k=\begin{cases}\varnothing & \text{si } k<0\\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}_- & \text{si } k=0\\ \mathscr{P}_k & \text{si } k>0\end{cases} \text{ où } \mathscr{P}_k \text{ est la parabole d'équation } y=k(1+x^2).}$$

Voici l'allure de la surface S.



2) L'équation réduite de D_a est $y=a(x-1)+1$.

Le projeté orthogonal d'un point $M\left(x,y,f(x,y)\right)$ de S sur le plan d'équation $z=0$ est $N(x,y,0)$ et ce point appartient à D_a si et seulement si $y=a(x-1)+1$, donc C est la courbe paramétrée par :

$$\begin{cases} x(t)=t \\ y(t)=a(t-1)+1 \\ z(t)=f\left(t,a(t-1)+1\right) \end{cases}$$

Les deux fonctions x et y sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Pour z, distinguons trois cas.

<u>*1^er^ cas*</u> : $a=0$. Alors, le paramétrage ci-dessus devient :

$$\begin{cases} x(t)=t \\ y(t)=1 \\ z(t)=f(t,1)=(1+t^2)^{-1} \end{cases}$$

La fonction z est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc C admet une tangente en tout point $M\left(t,1,\dfrac{1}{1+t^2}\right)$, dirigée par la vecteur $\left(x'(t),y'(t),z'(t)\right)=\left(1,0,\dfrac{-2t}{(1+t^2)^2}\right)$.

<u>*2^ème^ cas*</u> : $a>0$. Alors :

$$a(t-1)+1\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad t\geq 1-\frac{1}{a}.$$

Le paramétrage de C devient :

$$\begin{aligned} &x(t)=t \\ &y(t)=a(t-1)+1 \\ &z(t)=\begin{cases} \dfrac{a(t-1)+1}{1+t^2} & \text{si } t\geq 1-\dfrac{1}{a} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

- Si $t<1-\dfrac{1}{a}$, alors C est confondue avec D_a, donc admet D_a pour tangente.
- Si $t=1-\dfrac{1}{a}$, z n'est dérivable en $t=1-\dfrac{1}{a}$, donc C n'admet pas de tangente en $\left(1-\dfrac{1}{a},0,0\right)$.
- Sur $\left]1-\dfrac{1}{a},+\infty\right[$, z est dérivable avec $z'(t)=\dfrac{-at^2+2(a-1)t+a}{(1+t^2)^2}$, donc C admet une tangente en $M\left(t,a(t-1)+1,\dfrac{a(t-1)+1}{1+t^2}\right)$, dirigée par la vecteur $\left(x'(t),y'(t),z'(t)\right)=\left(1,a,\dfrac{-at^2+2(a-1)t+a}{(1+t^2)^2}\right)$.

<u>*3^ème^ cas*</u> : $a<0$. Alors :

$$a(t-1)+1\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad t\leq 1-\frac{1}{a}.$$

Et on obtient de même :

- si $t>1-\dfrac{1}{a}$, alors C est confondue avec D_a, donc admet D_a pour tangente ;
- si $t=1-\dfrac{1}{a}$, z n'est dérivable en $t=1-\dfrac{1}{a}$, donc C n'admet pas de tangente en $\left(1-\dfrac{1}{a},0,0\right)$;

- sur $\left]-\infty, 1-\dfrac{1}{a}\right[$, z est dérivable avec $z'(t)=\dfrac{-at^2+2(a-1)t+a}{(1+t^2)^2}$, donc C admet une tangente en $M\left(t, a(t-1)+1, \dfrac{a(t-1)+1}{1+t^2}\right)$, dirigée par la vecteur $(x'(t), y'(t), z'(t))=\left(1, a, \dfrac{-at^2+2(a-1)t+a}{(1+t^2)^2}\right)$.

Exercice 14

1) Posons $h=f-g$. La fonction h est C^1 sur $\mathbb{R}^2$ comme différence de telles fonctions.

Si $\vec{a}\in\mathcal{F}$, alors $h(\vec{a})>0$. Comme h est continue en $\vec{a}$, elle reste strictement positive au voisinage de $\vec{a}$. Ainsi, $f(x,y)>g(x,y)$ et donc $m=f$ au voisinage de $\vec{a}$. Ainsi, f réalise un minimum local en $\vec{a}$.

De même, si $\vec{a}\in\mathcal{G}$, $m=g$ au voisinage de $\vec{a}$ et g réalise un minimum local en $\vec{a}$.

Finalement :

Si $\vec{a}\in\mathcal{F}\cup\mathcal{G}$, m reste égale à f ou g au voisinage de $\vec{a}$ et f ou g réalise un minimum local en $\vec{a}$.

2) Si $\vec{a}\in\mathcal{E}$, alors $f(\vec{a})=g(\vec{a})=m(\vec{a})$.

Supposons que $(\nabla f(\vec{a}), \nabla g(\vec{a}))$ soit libre, autrement que les vecteurs $\nabla f(\vec{a})$ et $\nabla g(\vec{a})$ ne soient pas colinéaires (donc entre autres, non nuls).

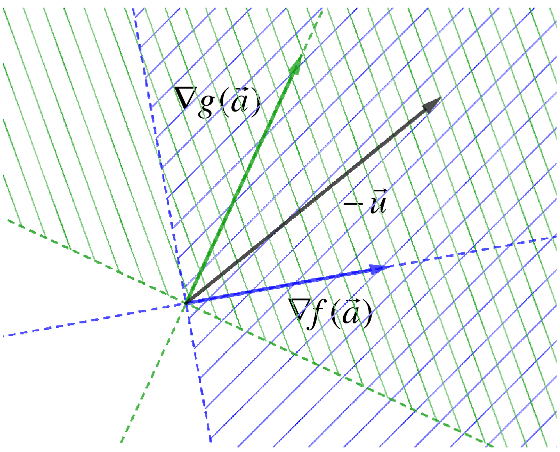
Pour tout vecteur $\vec{h}\in\mathbb{R}^2$ non orthogonal à $\nabla f(\vec{a})$ (soit $(\nabla f(\vec{a})\mid\vec{h})\neq 0$), on a :

$$f(\vec{a}+\vec{h})=f(\vec{a})+(\nabla f(\vec{a})\mid\vec{h})+\underset{\vec{h}\to\vec{0}}{o}(\vec{h}) \quad\Rightarrow\quad f(\vec{a}+\vec{h})-f(\vec{a})\underset{\vec{h}\to\vec{0}}{\sim}(\nabla f(\vec{a})\mid\vec{h}).$$

Et, $f(\vec{a}+\vec{h})-f(\vec{a})$ est du signe strict de $(\nabla f(\vec{a})\mid\vec{h})$.

De même, pour tout vecteur $\vec{h}\in\mathbb{R}^2$ tel que $(\nabla g(\vec{a})\mid\vec{h})\neq 0$, $g(\vec{a}+\vec{h})-g(\vec{a})$ est du signe strict de $(\nabla g(\vec{a})\mid\vec{h})$.

Or, comme $\nabla f(\vec{a})$ et $\nabla g(\vec{a})$ ne sont pas colinéaires, il existe $\vec{u}\in\mathbb{R}^2$, unitaire et tel que $(\nabla f(\vec{a})\mid\vec{u})<0$ et $(\nabla g(\vec{a})\mid\vec{u})<0$ tel que sur la figure suivante :



La zone hachurée en bleu correspond aux vecteurs $\vec{h}$ de $\mathbb{R}^2$ tels que $(\nabla f(\vec{a})\mid\vec{h})>0$.

La zone hachurée en vert correspond aux vecteurs $\vec{h}$ de $\mathbb{R}^2$ tels que $(\nabla g(\vec{a})\mid\vec{h})>0$.

L'intersection (quadrillée) correspond aux vecteurs $\vec{h}$ de $\mathbb{R}^2$ tels que $(\nabla f(\vec{a})\mid\vec{h})>0$ *et* $(\nabla g(\vec{a})\mid\vec{h})>0$ ($-\vec{u}$ est dans cette zone).

Alors, pour $h \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\left(\nabla f(\vec{a}) \mid h\vec{u}\right) < 0$ et $\left(\nabla g(\vec{a}) \mid h\vec{u}\right) < 0$, donc :

$$\begin{cases} f(\vec{a}+h\vec{u}) - f(\vec{a}) < 0 \\ g(\vec{a}+h\vec{u}) - g(\vec{a}) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(\vec{a}+h\vec{u}) < m(\vec{a}) \\ g(\vec{a}+h\vec{u}) < m(\vec{a}) \end{cases} \Rightarrow m(\vec{a}+h\vec{u}) < m(\vec{a}) \quad \textbf{(1)}.$$

Or, $m(\vec{a})$ est un minimum local de *m*, donc il existe $R \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $\vec{U} \in B(\vec{a}, R)$, $m(\vec{U}) \geq m(\vec{a})$.

Mais, en prenant $\vec{U} = \vec{a} + \dfrac{R}{2}\vec{u} \in B(\vec{a}, R)$ dans **(1)**, on obtient $m(\vec{U}) < m(\vec{a})$, ce qui est absurde.

Ainsi, supposer que la famille $\left(\nabla f(\vec{a}), \nabla g(\vec{a})\right)$ est libre mène à une absurdité, donc :

$$\boxed{\text{La famille } \left(\nabla f(\vec{a}), \nabla g(\vec{a})\right) \text{ est liée.}}$$