

Corrigés des TD du chapitre 3
Exercice 1

Pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = \left\| \frac{1}{1+\|x\|} x \right\| = \frac{\|x\|}{1+\|x\|} < 1$, donc $f(x) \in B(0,1)$ et ainsi, f est à images dans $B(0,1)$.

Par ailleurs, l'application $x \mapsto \|x\|$ est continue sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc $x \mapsto \frac{1}{1+\|x\|}$ est continue sur E en tant que composée d'applications continues.

Enfin, $x \mapsto x$ est continue sur E , donc f est continue sur E en tant que produit de fonctions continues (l'une scalaire, l'autre vectorielle).

Soit $y \in B(0,1)$. On a :

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{1}{1+\|x\|} x = y \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\|x\|}{1+\|x\|} = \|y\| < 1 \\ x = (1+\|x\|) y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \|x\| = \frac{\|y\|}{1-\|y\|} \\ x = (1+\|x\|) y \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{1-\|y\|} y$$

Ceci prouve que f est bijective de réciproque $y \mapsto \frac{1}{1-\|y\|} y$, définie sur $B(0,1)$.

La fonction $t \mapsto \frac{1}{1-t}$ est continue sur $[0,1[$, donc on prouve comme plus haut que $y \mapsto \frac{1}{1-\|y\|} y$ est continue sur $B(0,1)$. Finalement :

L'application f est continue sur E , bijective de E dans $B(0,1)$ et f^{-1} est continue sur $B(0,1)$.

Exercice 2

L'application ϕ est linéaire (par linéarité de l'intégrale). Soient $f, g \in E$. On a :

$$|\phi(f) - \phi(g)| = |\phi(f - g)| = \left| \int_0^1 (f(t) - g(t)) dt \right| \leq \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt = \|f - g\|.$$

Donc, pour tout $(f, g) \in E^2$, $|\phi(f) - \phi(g)| \leq \|f - g\|$, autrement dit, ϕ est 1-lipschitzienne, donc :

ϕ est continue sur E .

Exercice 3

1) a. Comme α et β sont positifs, les fonctions $x \mapsto x^\alpha$ et $y \mapsto y^\beta$ (éventuellement prolongées par continuité en 0) sont définies et continues sur $\mathbb{R}_+$. La fonction polynômiale $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ est définie sur $\mathbb{R}^2$ et ne s'annule qu'en $(0,0)$, donc :

La fonction f est définie sur $D = \mathbb{R}_+^2 \setminus \{(0,0)\}$.

b. On a vu que les fonctions $x \mapsto x^\alpha$ et $y \mapsto y^\beta$ (prolongées par continuité en 0) sont continues sur $\mathbb{R}_+$, donc $(x, y) \mapsto x^\alpha y^\beta$ est continue sur $\mathbb{R}_+^2$, donc sur D .

Il en va de même pour la fonction polynomiale $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$.

Ainsi, f est un quotient de fonctions continues sur D , donc :

La fonction f est continue sur D .

c. Pour tout $(\theta, r) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \mathbb{R}_+^*$, $|f(r \cos \theta, r \sin \theta)| = \frac{r^{\alpha+\beta} |\cos^\alpha \theta \sin^\beta \theta|}{r^2} \leq \frac{r^{\alpha+\beta}}{r^2}$, donc pour tout $(x, y) \in D$:

$$|f(x, y)| \leq (x^2 + y^2)^{\frac{\alpha+\beta-2}{2}}.$$

Distinguons plusieurs cas selon α et β .

- Pour $\alpha + \beta < 2$, on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x, x) = \frac{x^{\alpha+\beta-2}}{2} = +\infty$, donc f n'est pas prolongeable par continuité en $(0, 0)$.
- Pour $\alpha + \beta = 2$, on $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x, x) = \frac{1}{2}$ et :
 - $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x, 0) = 0 \neq \frac{1}{2}$ quand $\beta > 0$;
 - $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x, 0) = 1 \neq \frac{1}{2}$ quand $\beta = 0$ (donc $\alpha = 2$).

Donc, f n'est pas prolongeable par continuité en $(0, 0)$.

- Pour $\alpha + \beta > 2$, on a $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2)^{\frac{\alpha+\beta-2}{2}} = 0$, donc $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$ et f est prolongeable par continuité en $(0, 0)$ en posant $f(0, 0) = 0$.

Ainsi :

f est prolongeable par continuité en $(0, 0)$ si et seulement si $\alpha + \beta > 2$.

Comme la fonction f est définie sur $D = \mathbb{R}_+^2 \setminus \{(0, 0)\}$, elle est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}_+^2$ si et seulement elle l'est en $(0, 0)$, donc :

f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}_+^2$ si et seulement si $\alpha + \beta > 2$.

Pour prolonger par continuité la fonction f sur $\mathbb{R}^2$, il faut au moins la prolonger par continuité en $(0, 0)$, en posant $f(0, 0) = 0$. Il faut donc que $\alpha + \beta > 2$. Cette condition étant remplie, si on pose $\tilde{f} : (x, y) \mapsto f(|x|, |y|)$, (où $f(0, 0) = 0$), les fonctions $\tilde{f}$ et f coïncident sur $(\mathbb{R}_+)^2$ et $\tilde{f}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ en tant que composée de $(x, y) \mapsto (|x|, |y|)$, continue sur $\mathbb{R}^2$ et à images dans $(\mathbb{R}_+)^2$, par f , continue sur $(\mathbb{R}_+)^2$. Ainsi :

f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $\alpha + \beta > 2$.

Remarque : N'importe quelle fonction $\tilde{f}$, continue sur $\mathbb{R}^2$ et coïncidant avec f sur $(\mathbb{R}_+)^2$ fait l'affaire.

2) Notons $B = B((0,0),1)$, $\bar{B} = \bar{B}((0,0),1)$ et $S = S((0,0),1)$, respectivement la boule ouverte, la boule fermée et la sphère de centre $(0,0)$ et de rayon 1. On a alors :

$$g : (x, y) \mapsto \begin{cases} 2x^2 + y^2 - 1 & \text{si } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{B} \\ x^2 & \text{si } (x, y) \in \bar{B} \end{cases}$$

Sur les ouverts B et $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{B}$, g est polynomiale, donc continue. Reste à prouver la continuité de g sur S .

Soit $(\cos \alpha, \sin \alpha) \in S$ avec $\alpha \in [0, 2\pi[$.

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, il existe un unique couple $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[$ tel que $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ et $(x, y) \rightarrow (\cos \alpha, \sin \alpha)$ revient à $(r, \theta) \rightarrow (1, \alpha)$. On a :

$$g(x, y) = g(r \cos \theta, r \sin \theta) = \begin{cases} 2r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta - 1 & \text{si } r > 1 \\ r^2 \cos^2 \theta & \text{si } r \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} r^2 \cos^2 \theta + r^2 - 1 & \text{si } r > 1 \\ r^2 \cos^2 \theta & \text{si } r \leq 1 \end{cases}$$

Et :

$$\begin{aligned} \lim_{(r, \theta) \rightarrow (1^+, \alpha)} g(r \cos \theta, r \sin \theta) &= \lim_{(r, \theta) \rightarrow (1^+, \alpha)} (r^2 \cos^2 \theta + r^2 - 1) = \cos^2 \alpha = g(\cos \alpha, \sin \alpha) \\ \lim_{(r, \theta) \rightarrow (1^-, \alpha)} g(r \cos \theta, r \sin \theta) &= \lim_{(r, \theta) \rightarrow (1^-, \alpha)} (r^2 \cos^2 \theta) = \cos^2 \alpha = g(\cos \alpha, \sin \alpha) \end{aligned}$$

Ainsi, $\lim_{(x, y) \rightarrow (\cos \alpha, \sin \alpha)} g(x, y) = \lim_{(r, \theta) \rightarrow (1, \alpha)} g(r \cos \theta, r \sin \theta) = g(\cos \alpha, \sin \alpha)$, et g est continue en $(\cos \alpha, \sin \alpha)$.

Finalement, g est continue sur B , S et $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{B}$, donc, sur $B \cup S \cup (\mathbb{R}^2 \setminus \bar{B}) = \mathbb{R}^2$ et ainsi :

La fonction g est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4

1) Supposons qu'il existe $(a, b) \in F^2$ tel que $f(a) = a$ et $f(b) = b$.

Comme f est λ -lipschitzienne pour la norme infinie, on a : $\|f(a) - f(b)\|_\infty \leq \lambda \|a - b\|_\infty$, soit :

$$\|a - b\|_\infty \leq \lambda \|a - b\|_\infty.$$

Or, si $\|a - b\|_\infty \neq 0$, on obtient $1 \leq \lambda$, ce qui est absurde car $\lambda \in]0, 1[$, donc $\|a - b\|_\infty = 0$, soit $a = b$. Ainsi :

Si f possède un point fixe alors il est unique.

2) Prouvons les deux résultats par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n = 0$, on a $x_0 \in F$ par hypothèse et $\|x_1 - x_0\|_\infty = \lambda^0 \|x_1 - x_0\|_\infty$, donc la propriété est vraie au rang 0.

Supposons la propriété vraie à un rang $n \in \mathbb{N}$. On a alors :

- $x_n \in F \Rightarrow f(x_n) \in F$ (car $f(F) \subset F$) $\Rightarrow x_{n+1} \in F$.
- On a $\|x_{n+1} - x_n\|_\infty \leq \lambda^n \|x_1 - x_0\|_\infty$ et :

$$\|x_{n+2} - x_{n+1}\|_\infty = \|f(x_{n+1}) - f(x_n)\|_\infty \leq \lambda \|x_{n+1} - x_n\|_\infty \leq \lambda (\lambda^n \|x_1 - x_0\|_\infty) = \lambda^{n+1} \|x_1 - x_0\|_\infty.$$

Ainsi, la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit :

$$x_n \in F \text{ et } \|x_{n+1} - x_n\|_\infty \leq \lambda^n \|x_1 - x_0\|_\infty.$$

3) Soit $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|x_{i,n+1} - x_{i,n}| \leq \|x_{n+1} - x_n\|_\infty \leq \lambda^n \|x_1 - x_0\|_\infty.$$

Or, $\lambda \in]0, 1[$, donc la série géométrique $\sum \lambda^n \|x_1 - x_0\|_\infty$ est convergente et par comparaison :

$$\text{La série } \sum (x_{i,n+1} - x_{i,n}) \text{ est absolument convergente.}$$

4) Pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, la série $\sum (x_{i,n+1} - x_{i,n})$ est absolument convergente, donc elle est convergente. Ceci implique que la suite $(x_{i,n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge. La suite de vecteurs $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge coordonnée par coordonnée, donc :

$$\text{La suite } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers un vecteur } a.$$

On a vu que pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|x_{i,n+1} - x_{i,n}| \leq \lambda^n \|x_1 - x_0\|_\infty \Leftrightarrow -\lambda^n \|x_1 - x_0\|_\infty \leq x_{i,n+1} - x_{i,n} \leq \lambda^n \|x_1 - x_0\|_\infty.$$

Comme les séries $\sum (x_{i,n+1} - x_{i,n})$ et $\sum \lambda^n$ convergent, on a pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$-\|x_1 - x_0\|_\infty \sum_{k=n}^{+\infty} \lambda^k \leq \sum_{k=n}^{+\infty} (x_{i,k+1} - x_{i,k}) \leq \|x_1 - x_0\|_\infty \sum_{k=n}^{+\infty} \lambda^k.$$

Si pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $(x_{i,n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers a_i , on a $\sum_{k=n}^{+\infty} (x_{i,k+1} - x_{i,k}) = a_i - x_{i,n}$.

Et comme $\sum_{k=n}^{+\infty} \lambda^k = \frac{\lambda^n}{1-\lambda}$, on obtient pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$-\|x_1 - x_0\|_\infty \frac{\lambda^n}{1-\lambda} \leq a_i - x_{i,n} \leq \|x_1 - x_0\|_\infty \frac{\lambda^n}{1-\lambda} \Leftrightarrow |x_{i,n} - a_i| \leq \frac{\|x_1 - x_0\|_\infty}{1-\lambda} \lambda^n.$$

L'inégalité ci-dessus étant vraie pour toutes les composantes de $x_n - a$, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\|x_n - a\|_\infty \leq \frac{\|x_1 - x_0\|_\infty}{1-\lambda} \lambda^n$$

5) La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente de F , qui est fermé, donc sa limite a appartient à F .

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n)$.

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} = a$ et f est continue sur F (car lipschitzienne), donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n) = f(a)$.

Ainsi :

$$f(a) = a$$

Nous venons donc de trouver un vecteur a de F tel que $f(a) = a$, autrement f admet un point fixe dans F .
Finalement, avec le résultat de la première question, on peut conclure que :

f possède un unique point fixe dans F .

Exercice 5

1) Commençons par reformuler la continuité de f sur E . f est continue sur E si et seulement si :

$$\forall a \in E, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in E, \|x - a\| \leq \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| \leq \varepsilon.$$

On peut rendre stricte les inégalités sans altérer l'équivalence :

$$\forall a \in E, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in E, \|x - a\| < \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon.$$

Ceci se reformule alors en :

$$\begin{aligned} & \left[\forall a \in E, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, x \in B(a, \alpha) \Rightarrow f(x) \in B(f(a), \varepsilon) \right] \\ \Leftrightarrow & \left[\forall a \in E, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, x \in B(a, \alpha) \Rightarrow x \in f^{-1}(B(f(a), \varepsilon)) \right] \\ \Leftrightarrow & \left[\forall a \in E, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, B(a, \alpha) \subset f^{-1}(B(f(a), \varepsilon)) \right] \end{aligned}$$

Ainsi :

$$f \text{ est continue sur } E \Leftrightarrow \left[\forall a \in E, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, B(a, \alpha) \subset f^{-1}(B(f(a), \varepsilon)) \right].$$

($\Rightarrow$) Supposons f continue sur E .

Soit O une partie ouverte de F . Si $f^{-1}(O)$ est vide alors elle est ouverte. Sinon, pour tout $a \in f^{-1}(O)$, on a $f(a) \in O$. Comme O est ouverte, il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B(f(a), \varepsilon) \subset O$ et donc, $f^{-1}(B(f(a), \varepsilon)) \subset f^{-1}(O)$.

Or, d'après ce qui précède, il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B(a, \alpha) \subset f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$, donc $B(a, \alpha) \subset f^{-1}(O)$.

Ainsi, pour tout $a \in f^{-1}(O)$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B(a, \alpha) \subset f^{-1}(O)$, ce qui prouve que $f^{-1}(O)$ est ouverte.

($\Leftarrow$) Supposons que l'image réciproque de toute partie ouverte de F est une partie ouverte de E .

Soient $a \in E$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Comme $B(f(a), \varepsilon)$ est une partie ouverte de F , $f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$ est une partie ouverte de E .

Or, $f(a) \in B(f(a), \varepsilon)$, donc $a \in f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$ et ainsi, il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B(a, \alpha) \subset f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$.

Ainsi, pour tout $a \in E$ et pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B(a, \alpha) \subset f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$, ce qui prouve que f est continue sur E .

Finalement, on a bien :

f est continue sur E si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert de F est un ouvert de E .

2) ($\Rightarrow$) Supposons f continue sur E .

Soit A une partie fermée de F . Si $f^{-1}(A)$ est vide alors elle est fermée. Sinon, soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $f^{-1}(A)$ convergeant vers $a \in E$. On a $a_n \rightarrow a$ et f continue en a , donc $f(a_n) \rightarrow f(a)$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in f^{-1}(A)$, donc $f(a_n) \in A$ et comme A est fermée et $f(a_n) \rightarrow f(a)$, on a $f(a) \in A$.

Ainsi, $a \in f^{-1}(A)$ et donc toute suite convergente de $f^{-1}(A)$ converge dans $f^{-1}(A)$, ce qui prouve que $f^{-1}(A)$ est fermée.

($\Leftarrow$) Supposons que l'image réciproque de toute partie fermée de F est une partie fermée de E .

Soit A une partie ouverte de F . On a $f^{-1}(F \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A)$. En effet :

$$x \in f^{-1}(F \setminus A) \Leftrightarrow f(x) \in F \setminus A \Leftrightarrow f(x) \notin A \Leftrightarrow x \notin f^{-1}(A) \Leftrightarrow x \in E \setminus f^{-1}(A).$$

Comme A est ouverte, $F \setminus A$ est fermée, donc $f^{-1}(F \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A)$ est fermée, ce qui prouve que $f^{-1}(A)$ est ouverte. Ainsi, l'image réciproque de toute partie ouverte de F est une partie ouverte de E , donc f est continue sur E d'après la question précédente.

Finalement, on a bien :

f est continue sur E si et seulement si l'image réciproque de tout fermé de F est un fermé de E .

3) Posons $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. La fonction f est définie et continue (car rationnelle) sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On a $f(\mathbb{R}) =]0, 1[$ qui n'est ni ouvert, ni fermé. Or, $\mathbb{R}$ est un fermé et un ouvert de $\mathbb{R}$, donc :

L'image d'un ouvert (*resp.* fermé) par une application continue n'est pas forcément ouverte (*resp.* fermée).

Exercice 6

Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det M$ est polynomiale (et même affine) en chacun des coefficients de M , donc l'application $\det : M \mapsto \det M$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Or, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \setminus GL_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \det M = 0\} = \det^{-1}(\{0\})$.

Comme $\{0\}$ est fermé dans $\mathbb{K}$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \setminus GL_n(\mathbb{K})$ est l'image réciproque d'une partie fermée de $\mathbb{K}$ par une application continue, donc est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, d'après l'exercice précédent.

Finalement, comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \setminus GL_n(\mathbb{K})$ est fermé :

$GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On veut montrer que $\overline{GL_n(\mathbb{K})} = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, donc que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \subset \overline{GL_n(\mathbb{K})}$, autrement dit que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est limite d'une suite de matrices de $GL_n(\mathbb{K})$.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang $r \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Il existe deux matrices inversibles P et Q telles que $M = PJQ$ où :

$$J = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r, n-r} \\ 0_{n-r, r} & 0_{n-r} \end{pmatrix}.$$

Posons alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $M_k = PJ_kQ$ avec $J_k = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r, n-r} \\ 0_{n-r, r} & \frac{1}{k}I_{n-r} \end{pmatrix}$.

On a immédiatement $J_k \rightarrow J$ quand $k \rightarrow +\infty$ (car $\|J_k - J\|_\infty = \frac{1}{k}$) et, comme l'application $X \mapsto PXQ$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a : $M_k \rightarrow PJQ = M$.

Enfin, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\det J = \frac{1}{k^{n-r}} \neq 0$ donc $\det M_k = \det P \times \det J_k \times \det Q \neq 0$ et $M_k \in GL_n(\mathbb{K})$.

Finalement, on a trouvé une suite $(M_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de matrices inversibles qui converge vers M , donc $M \in \overline{GL_n(\mathbb{K})}$.

Ceci prouve que :

$$\overline{GL_n(\mathbb{K})} = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Exercice 7

D'après l'exercice 7 du TD sur les espaces vectoriels normés, $\mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$ est une partie fermée, bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (pour n'importe quelle norme). De plus, l'application $M \mapsto \|M - B\|$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc elle admet un minimum sur $\mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$, atteint en $A \in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$. Comme $\|A - B\|$ est le minimum de $M \mapsto \|M - B\|$ sur $\mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$, on a alors immédiatement $\|A - B\| \leq \|M - B\|$ pour tout $M \in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$.

Supposons qu'il existe une deuxième matrice A' de $\mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $M \in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$,

Comme A et A' appartiennent toutes deux à $\mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$, on a $\|A' - B\| \leq \|A - B\|$ et $\|A - B\| \leq \|A' - B\|$, donc :

$$\|A' - B\| = \|A - B\|.$$

Toujours d'après l'exercice 7 du TD sur les espaces vectoriels normés, $\mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$ est une partie convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc pour tout $t \in [0, 1]$, $tA + (1-t)A' \in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$ et $\|A - B\| \leq \|tA + (1-t)A' - B\|$. Or :

$$\|tA + (1-t)A' - B\| = \|t(A - B) + (1-t)(A' - B)\| \leq t\|A - B\| + (1-t)\|A' - B\| = \|A - B\|.$$

Ainsi :

$$\|tA + (1-t)A' - B\| = \|A - B\|.$$

Or, ici $\|\cdot\|$ est une norme euclidienne donc dérive d'un produit scalaire et :

$$\|tA + (1-t)A' - B\|^2 = \|t(A - A') + A' - B\|^2 = t^2\|A - A'\|^2 + 2t(A - A' | A' - B) + \|A' - B\|^2.$$

Avec $\|A' - B\| = \|A - B\|$, on obtient, pour tout $t \in [0, 1]$:

$$t^2\|A - A'\|^2 + 2t(A - A' | A' - B) = 0.$$

Or, l'application polynôme $t \mapsto t^2\|A - A'\|^2 + 2t(A - A' | A' - B) = 0$ est nulle sur $[0, 1]$ si et seulement si ses coefficients sont nuls, donc $\|A - A'\|^2 = 0$, ce qui entraîne immédiatement $A = A'$.

Finalement :

$$\text{Il existe une unique matrice } A \in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R}) \text{ telle que pour tout } M \in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R}), \|A - B\| \leq \|M - B\|.$$



Exercice 8

On veut montrer : $\exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in E, N(f(x)) \leq k\|x\|$.

Raisonnons par l'absurde en supposant le contraire, c'est-à-dire : $\forall k \in \mathbb{R}, \exists x \in E, N(f(x)) > k\|x\|$.

En particulier ceci est vrai pour k entier, donc : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in E, N(f(x_n)) > n\|x_n\|$.

Comme f est linéaire, si $x_n = 0$, on a $f(x_n) = 0$ et donc $N(f(x_n)) = n\|x_n\| = 0$, qui est exclu, donc $x_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on peut poser $u_n = \frac{1}{\|x_n\|} x_n$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|u_n\| = 1$, donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et :

$$N(f(u_n)) = N\left(f\left(\frac{1}{\|x_n\|} x_n\right)\right) = N\left(\frac{1}{\|x_n\|} f(x_n)\right) = \frac{N(f(x_n))}{\|x_n\|} > n.$$

Donc, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée mais pas $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$, ce qui contredit les hypothèses.

Ainsi, il existe bien un réel k tel que pour tout $x \in E$, $N(f(x)) \leq k\|x\|$. Ceci veut dire que f est lipchitzienne et donc :

f est continue sur E .

Exercice 9

1) En assimilant $\mathcal{M}_1(\mathbb{C})$ et $\mathbb{C}$, on a $E_p = \{z \in \mathbb{C}, P(z) = 0\}$, autrement dit :

Pour $n=1$, E_p est l'ensemble des racines de P .

Dans ce cas, E_p est fini (de cardinal au plus le degré de P) et donc :

Pour $n=1$, tous les éléments de E_p sont isolés.

2) Si une telle boule $B_0 = B(0_n, r)$ avec $r > 0$ existe, alors pour tout $H \in B_0$, $I_n + H$ est inversible, donc $\det(I_n + H) \neq 0$. Or, $\det I_n = 1 \neq 0$ et $M \mapsto \det M$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, donc pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $r > 0$ tel que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\|M - I_n\| < r$, on a $-\varepsilon < \det M - \det I_n < \varepsilon$.

En particulier pour $\varepsilon = 1$, on a pour tout $H = M - I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\|H\| < r$, $0 < \det(I_n + H)$, ce qui implique que pour tout $H \in B_0 = B(0_n, r)$, $\det(I_n + H) \neq 0$ et ainsi :

Il existe une boule ouverte $B_0 = B(0_n, r)$ telle que $I_n + H$ soit inversible pour tout $H \in B_0$.

3) Si on pose pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M_k = \lambda I_n + \frac{1}{k+1} E_{1,n}$ (où $E_{1,n}$ est la matrice de la base canonique dans laquelle

le 1 est à la fin de la première ligne. On a $E_{1,n}^2 = 0_n$, donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(M_k - \lambda I_n)^2 = \frac{1}{(k+1)^2} E_{1,n}^2 = 0_n$ et :

$$\|M_k - \lambda I_n\| = \left\| \frac{1}{k+1} E_{1,n} \right\| = \frac{1}{k+1} \|E_{1,n}\| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc, $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers λ_{I_n} . Ainsi :

La suite $(M_k)_{k \in \mathbb{N}} = \left(\lambda_{I_n} + \frac{1}{k+1} E_{1,n} \right)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers λ_{I_n} et vérifie $(M_k - \lambda_{I_n})^2 = 0_n$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

4) Remarquons que si $Q \in GL_n(\mathbb{C})$, on a $P(QMQ^{-1}) = QP(M)Q^{-1} = Q0_nQ^{-1} = 0_n$, donc $QMQ^{-1} \in E_p$.

Comme M est un point isolé de E_p , il existe $R > 0$ tel que $B(M, R) \cap E_p = \{M\}$.

Soit $H \in B_0 = B(0_n, r)$ (de la question 2). On a alors $I_n + H \in GL_n(\mathbb{C})$, donc $(I_n + H)M(I_n + H)^{-1} \in E_p$.

L'application $\Psi : H \mapsto (I_n + H)M(I_n + H)^{-1}$ est rationnelle en les coefficients de H , donc continue sur B_0 .

Comme $\Psi(0_n) = M$, il existe $r' > 0$ tel que $r' \leq r$ et pour tout $H \in B_0$ telle que $\|H\| < r'$:

$$\|(I_n + H)M(I_n + H)^{-1} - M\| < R.$$

Autrement dit, pour tout $H \in B_1 = B(0_n, r')$, $(I_n + H)M(I_n + H)^{-1} \in B(M, R)$.

Finalement, pour tout $H \in B_1$, on a $(I_n + H)M(I_n + H)^{-1} \in B(M, R)$ et $(I_n + H)M(I_n + H)^{-1} \in E_p$, donc :

$$(I_n + H)M(I_n + H)^{-1} \in B(M, R) \cap E_p = \{M\} \Rightarrow (I_n + H)M(I_n + H)^{-1} = M.$$

Ainsi :

Il existe une boule ouverte $B_1 = B(0_n, r')$ telle que pour tout $H \in B_1$, $(I_n + H)M(I_n + H)^{-1} = M$.

5) Remarquons déjà que :

$$(I_n + H)M(I_n + H)^{-1} = M \Leftrightarrow (I_n + H)M = M(I_n + H) \Leftrightarrow M + HM = M + MH \Leftrightarrow HM = MH.$$

Ainsi, toutes les matrices de $B_1 = B(0_n, r')$ commutent avec M .

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Si $A = 0_n$, alors A et M commutent, sinon $\|A\| \neq 0$ et on peut poser $H = \frac{r'}{2\|A\|} A$.

On a $\|H\| = \frac{r'}{2} < r'$, donc $H \in B_1$ et ainsi :

$$HM = MH \Leftrightarrow \left(\frac{r'}{2\|A\|} A \right) M = M \left(\frac{r'}{2\|A\|} A \right) \Leftrightarrow \frac{r'}{2\|A\|} AM = \frac{r'}{2\|A\|} MA \Leftrightarrow AM = MA.$$

Donc, A et M commutent et finalement :

M commute avec toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

En particulier, si $M = (a_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1,n \rrbracket}$ commute avec toute matrice, on a $ME_{i,j} = E_{i,j}M$ pour tous $i, j \in \llbracket 1,n \rrbracket$.

Or, $ME_{i,j}$ est la matrice dont toutes les colonnes sont nulles sauf la $j^{\text{ième}}$ qui est la $i^{\text{ième}}$ colonne de M , et $E_{i,j}M$ est la matrice dont toutes les lignes sont nulles sauf la $i^{\text{ième}}$ qui est la $j^{\text{ième}}$ ligne de M .

Ceci donne $a_{i,j} = 0$ quand $i \neq j$ et $a_{1,1} = a_{2,2} = \dots = a_{n,n}$, et donc :

M est une matrice d'homothétie.

Enfin, si $M = \lambda I_n$, on a $P(M) = P(\lambda I_n) = P(\lambda)I_n = 0_n$, donc $P(\lambda) = 0$, autrement dit :

Le rapport de M est une racine de P .

6) Si λ est racine multiple de P , alors on peut écrire $P = (X - \lambda)^2 Q$, avec $Q \in \mathbb{C}[X]$ et pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$P(M) = (M - \lambda I_n)^2 Q(M).$$

D'après la question 3, il existe une suite de matrices $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ convergeant vers λI_n et telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(M_k - \lambda I_n)^2 = 0_n$, donc $P(M_k) = (M_k - \lambda I_n)^2 Q(M_k) = 0_n$.

Ainsi, $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de matrices de E_p qui converge vers λI_n , donc on peut trouver des matrices de E_p aussi proches de λI_n que l'on veut et ainsi :

Si λ est racine multiple de P , alors λI_n n'est pas un point isolé de E_p .

7) Soit λ une racine simple de P . On peut alors écrire $P = (X - \lambda)Q$, avec $Q \in \mathbb{C}[X]$ et $Q(\lambda) \neq 0$.

On a $P(\lambda I_n) = P(\lambda)I_n = 0_n$, donc $\lambda I_n \in E_p$.

Supposons que λI_n n'est pas un point isolé de E_p . Il existe alors une suite $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de matrices de E_p , toutes différentes de λI_n et convergeant vers λI_n .

Remarquons que l'application $M \mapsto \chi_M = \det(X I_n - M)$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (car $M \mapsto X I_n - M$ l'est et $M \mapsto \det M$ aussi). Alors, comme $\lim_{k \rightarrow +\infty} M_k = \lambda I_n$, on a $\lim_{k \rightarrow +\infty} \chi_{M_k} = \chi_{\lambda I_n} = (X - \lambda)^n$. Alors, si λ_k est une valeur propre de M_k , on a $\lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_k = \lambda$.

Notons $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ les racines de Q (distinctes ou pas), soit $Q = \gamma \prod_{j=1}^p (X - \alpha_j)$ avec $\gamma \neq 0$.

Comme $Q(\lambda) \neq 0$, on a $\alpha_j \neq \lambda$ pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ et donc $\varepsilon = \min_{j \in \llbracket 1, p \rrbracket} |\alpha_j - \lambda| > 0$.

Comme $\lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_k = \lambda$, on a $|\lambda_k - \lambda| < \varepsilon$ et donc $\lambda_k \neq \alpha_j$ pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$.

Ainsi, à partir du rang N , les α_j ne sont pas valeur propre de M_k , donc $M_k - \alpha_j I_n$ est inversible pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, et donc $Q(M_k) = \gamma \prod_{j=1}^p (M_k - \alpha_j I_n)$ est inversible.

Enfin, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $M_k \in E_p$, donc $P(M_k) = (M_k - \lambda I_n)Q(M_k) = 0_n$ et à partir du rang N , $Q(M_k)$ est inversible, donc $(M_k - \lambda I_n)Q(M_k)Q(M_k)^{-1} = M_k - \lambda I_n = 0_n$, soit $M_k = \lambda I_n$. Ceci est absurde car par hypothèse, toutes les matrices M_k sont différentes de λI_n .

Finalement, supposer que λI_n n'est pas un point isolé de E_p mène à une absurdité, donc :

Si λ est racine simple de P alors λI_n est un point isolé de E_p .