

Corrigés des TD du chapitre 6

Exercice 1

1) Avec la formule de Grassmann, on a :

$$\dim(F + G + H) = \dim(F + G) + \dim H - \dim((F + G) \cap H).$$

Or :

$$\left. \begin{array}{l} F \subset F + G \Rightarrow F \cap H \subset (F + G) \cap H \\ G \subset F + G \Rightarrow G \cap H \subset (F + G) \cap H \end{array} \right\} \Rightarrow F \cap H + G \cap H \subset (F + G) \cap H.$$

Donc :

$$\dim(F \cap H + G \cap H) \leq \dim((F + G) \cap H).$$

Alors :

$$\dim(F + G + H) \geq \dim(F + G) + \dim H - \dim(F \cap H + G \cap H).$$

En utilisant à nouveau la formule de Grassmann pour évaluer $\dim(F + G)$ et $\dim(F \cap H + G \cap H)$, et avec $(F \cap H) \cap (G \cap H) = F \cap G \cap H$, on obtient :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

$$\dim(F \cap H + G \cap H) = \dim(F \cap H) + \dim(G \cap H) - \dim(F \cap G \cap H)$$

D'où :

$$\dim(F + G + H) \leq \dim F + \dim G + \dim H - \dim(F \cap G) - \dim(F \cap H) - \dim(G \cap H) + \dim(F \cap G \cap H)$$

2) On a par hypothèse $F = (F \cap G) \oplus F'$ et $G = (F \cap G) \oplus G'$.

Alors, $F \cap G' \subset (F \cap G) \cap G' = \{0\}$ et donc $F \cap G' = \{0\}$. D'où :

$$F + G' = F \oplus G' = (F \cap G) \oplus F' \oplus G'.$$

La somme de $F \cap G$, F' et G' est directe.

De plus, on a :

$$F + G = ((F \cap G) \oplus F') + ((F \cap G) \oplus G') = F' + (F \cap G) + (F \cap G) + G' = (F \cap G) + F' + G'.$$

Et on vient de voir que la somme est directe, donc :

$$F + G = (F \cap G) \oplus F' \oplus G'$$

3) Soient $H_1, H_2, \dots, H_{n-1}$ des hyperplans de E (tous de dimension $n-1$) On a :

$$\dim(H_1 \cap H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 + H_2) = 2(n-1) - \dim(H_1 + H_2).$$

Or, $\dim(H_1 + H_2) \leq n$, donc :

$$\dim(H_1 \cap H_2) \geq 2(n-1) - n = n-2.$$

Montrons alors par récurrence finie que pour tout $k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$, $\dim(H_1 \cap \dots \cap H_k) \geq n-k$.

On vient de voir que cela est vrai pour $k=2$. Supposons l'inégalité vraie pour $k \in \llbracket 2, n-2 \rrbracket$ (s'il y en a, c'est-à-dire quand $n \geq 4$). On alors :

$$\dim(H_1 \cap \dots \cap H_k \cap H_{k+1}) = \dim(H_1 \cap \dots \cap H_k) + \dim H_{k+1} - \dim((H_1 \cap \dots \cap H_k) + H_{k+1}).$$

Et :

$$\dim(H_1 \cap \dots \cap H_k) \geq n-k \quad (\text{par hypothèse de récurrence})$$

$$\dim H_{k+1} = n-1$$

$$\dim((H_1 \cap \dots \cap H_k) + H_{k+1}) \leq n$$

Donc :

$$\dim(H_1 \cap \dots \cap H_k \cap H_{k+1}) \geq n-k + n-1 - n = n-(k+1).$$

Et ainsi, la propriété est vraie au rang $k+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$ et en particulier pour $k=n-1$, ce qui donne :

$$\dim(H_1 \cap \dots \cap H_{n-1}) \geq n-(n-1) = 1.$$

Ainsi, $H_1 \cap \dots \cap H_{n-1}$ est de dimension au moins 1, donc :

L'intersection $H_1 \cap \dots \cap H_{n-1}$ n'est pas réduite à $\{0\}$.

Exercice 2

Comme f et g sont linéaires et vérifient $f^2 = g^2 = id_E$, ce sont des symétries de E . Elles sont donc bijectives entre autres (et même involutives).

Si $F = \ker(f - id_E)$ et $G = \ker(f + id_E)$, f est la symétrie par rapport à F , parallèlement à G et $E = F \oplus G$.

Soit $x \in F$. On a $f(x) = x$, donc $g(f(x)) = g(x)$ et avec $gf = -fg$, on a $f(g(x)) = -g(x)$, donc $g(x) \in G$.

Ainsi : $g(F) \subset G$.

On prouve de la même façon que $g(G) \subset F$ et donc $g^2(G) \subset g(F)$, soit (avec $g^2 = id_E$) : $G \subset g(F)$.

Finalement :

$$g(F) = G.$$

Or, g est bijective, donc $\dim g(F) = \dim F$, ce qui nous donne :

$$\dim F = \dim G.$$

Comme $E = F \oplus G$, on a $\dim F + \dim G = n$ et en notant p la dimension commune de F et G , on obtient :

$$n = 2p.$$

Donc :

n est pair.

Soit maintenant $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ une base de F .

Comme $g(F) = G$ avec g bijective, $(g(e_1), g(e_2), \dots, g(e_p))$ est une base de G .

Posons pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $g(e_k) = e_{p+k}$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, g(e_1), \dots, g(e_p)) = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_{2p})$.

Comme $E = F \oplus G$, $\mathcal{B}$ est une base de E et, pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$:

- $e_k \in F$ donc $f(e_k) = e_k$ et $g(e_k) = e_{p+k}$;
- $e_{p+k} \in G$ donc $f(e_{p+k}) = -e_{p+k}$ et $g(e_{p+k}) = g^2(e_k) = e_k$.

Ainsi :

Les matrices de f et g sont respectivement $\begin{pmatrix} I_p & 0_p \\ 0_p & -I_p \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0_p & I_p \\ I_p & 0_p \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 3

1) On a :

$$(f \text{ non injective}) \Leftrightarrow (\ker f \neq \{0\})$$

Et :

$$\begin{aligned} (f = 0 \text{ ou } f \text{ est un diviseur de zéro à gauche}) &\Leftrightarrow (\text{Il existe } g \in \mathcal{L}(E) \text{ tel que } g \neq 0 \text{ et } fg = 0) \\ &\Leftrightarrow (\text{Il existe } g \in \mathcal{L}(E) \text{ tel que } \text{Im } g \neq \{0\} \text{ et } \text{Im } g \subset \ker f) \end{aligned}$$

Il est alors immédiat que s'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{Im } g \neq \{0\}$ et $\text{Im } g \subset \ker f$, alors $\ker f \neq \{0\}$.

Réciproquement, si $\ker f \neq \{0\}$, alors si p est un projecteur sur $\ker f$, parallèlement à un supplémentaire quelconque de $\ker f$, on a $p \neq 0$ et $fp = 0$.

Ainsi, on a bien :

$$(f \text{ non injective}) \Leftrightarrow (f = 0 \text{ ou } f \text{ est un diviseur de zéro à gauche}).$$

2) On a :

$$(f \text{ non surjective}) \Leftrightarrow (\text{Im } f \neq E)$$

Et :

$$\begin{aligned} (f = 0 \text{ ou } f \text{ est un diviseur de zéro à droite}) &\Leftrightarrow (\text{Il existe } g \in \mathcal{L}(E) \text{ tel que } g \neq 0 \text{ et } gf = 0) \\ &\Leftrightarrow (\text{Il existe } g \in \mathcal{L}(E) \text{ tel que } \ker g \neq E \text{ et } \text{Im } f \subset \ker g) \end{aligned}$$

Il est alors immédiat que s'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\ker g \neq E$ et $\text{Im } f \subset \ker g$, alors $\text{Im } f \neq E$.

Réciproquement, si $\text{Im } f \neq E$, alors si p est un projecteur sur un supplémentaire quelconque de $\text{Im } f$ (qui n'est pas réduit à $\{0\}$) et parallèlement à $\text{Im } f$, on a $p \neq 0$ et $pf = 0$.

Ainsi, on a bien :

$$(f \text{ non surjective}) \Leftrightarrow (f = 0 \text{ ou } f \text{ est un diviseur de zéro à droite}).$$

Exercice 4

1) On a $P = P_1 P_2 = P_2 P_1$, donc $P(f) = P_1(f) P_2(f) = P_2(f) P_1(f) = uv = vu$ et comme $P(f) = 0$, on a bien :

$$uv = vu = 0$$

Si $uv = 0$, alors $\text{Im } v \subset \ker u$ et en passant aux dimensions, on obtient avec le théorème du rang :

$$\text{rg}(v) \leq \dim(\ker u) \Leftrightarrow n - \dim(\ker v) \leq \dim(\ker u).$$

Soit :

$$\dim(\ker u) + \dim(\ker v) \geq n$$

2) On a admis le théorème de Bézout pour les polynômes, donc il existe $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $UP_1 + VP_2 = 1$. Ceci se traduit par :

$$U(f)P_1(f) + V(f)P_2(f) = U(f)u + V(f)v = \text{id}_E.$$

Donc pour tout $x \in E$:

$$x = U(f)(u(x)) + V(f)(v(x)).$$

Si $x \in \ker u \cap \ker v$, on a $u(x) = v(x) = 0$ et donc :

$$x = U(f)(0) + V(f)(0) = 0.$$

Ainsi :

$$\ker u \cap \ker v = \{0\}$$

On a alors :

$$\ker u + \ker v = \ker u \oplus \ker v \subset E.$$

Donc, $\dim(\ker u \oplus \ker v) = \dim(\ker u) + \dim(\ker v) \leq n$. Avec $\dim(\ker u) + \dim(\ker v) \geq n$ obtenu plus haut, on obtient :

$$\dim(\ker u \oplus \ker v) = \dim(\ker u) + \dim(\ker v) = n.$$

Et donc :

$$E = \ker u \oplus \ker v$$

3) Comme $u = P_1(f)$ est un polynôme en f , u et f commutent. Alors, pour tout $x \in \ker u$, on a :

$$u(f(x)) = f(u(x)) = f(0) = 0 \Rightarrow f(x) \in \ker u.$$

Ainsi, $f(\ker u) \subset \ker u$, donc :

$$\ker u \text{ est stable par } f.$$

Notons f_u l'endomorphisme induit par f sur $\ker u$, soit $f_u : \ker u \rightarrow \ker u ; x \mapsto f(x)$.

Pour tout $x \in \ker u$, on a $P_1(f_u)(x) = P_1(f)(x) = u(x) = 0$. Donc, $P_1(f_u) = 0$ et ainsi :

P_1 est un polynôme annulateur de l'endomorphisme induit par f sur $\ker u$.

4) Soient $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ une base de $\ker u$ et $(e_{p+1}, e_{p+2}, \dots, e_n)$ une base de $\ker v$.

Comme $E = \ker u \oplus \ker v$, la famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ est une base de E .

Comme $\ker u$ est stable par f , pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $f(e_j) \in \ker u$ donc $f(e_j) = \sum_{i=1}^p a_{i,j} e_i$.

Or, u et v jouent le même rôle, donc on prouve comme plus haut que $\ker v$ est stable par f , et donc, pour tout $j \in \llbracket p+1, n \rrbracket$, $f(e_j) \in \ker v$ donc $f(e_j) = \sum_{i=p+1}^n a_{i,j} e_i$.

Posons $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $B = (a_{i,j})_{p+1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$, on a alors :

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right).$$

On a $A = M_{(e_1, e_2, \dots, e_p)}(f_u)$ et $P_1(f_u) = 0$, donc $P_1(A) = 0_p$. On prouve de même que $P_2(B) = 0_{n-p}$ et ainsi :

Il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle $M_{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right)$ où A et B sont des matrices carrées telles que $P_1(A) = 0_p$ et $P_2(B) = 0_{n-p}$.

5) Comme on vient de le prouver pour $r = 2$, tentons de généraliser par récurrence le fait que si $P(f) = 0$ où $P = P_1 P_2 \dots P_r$ avec $r \geq 2$ et où les P_i sont des polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux sans racine commune (réelle ou complexe), alors on peut trouver une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs.

Supposons la propriété vraie à un rang $r \geq 2$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $P(f) = 0$ avec $P = P_1 P_2 \dots P_r P_{r+1}$ où les P_i sont des polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux sans racine commune (réelle ou complexe).

Posons $Q = P_1 P_2 \dots P_r$. Les racines réelles ou complexes de Q sont celles des P_i pour $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, donc ne sont pas racines de P_{r+1} (qui n'a de racine commune avec aucun des autres P_i). On a de plus $P = Q P_{r+1}$.

On peut donc utiliser le résultat que l'on vient de prouver : il existe deux matrices carrées A et B , et une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ de E telle que $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ une base de $\ker Q(f)$ et $(e_{p+1}, e_{p+2}, \dots, e_n)$ une base de $\ker P_{r+1}(f)$ et dans laquelle :

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right).$$

De plus, $Q = P_1 P_2 \dots P_r$ est un polynôme annulateur de l'endomorphisme induit par f sur $\ker Q(f)$ et A est la matrice de cet endomorphisme dans la base $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ de $\ker Q(f)$.

On peut donc utiliser l'hypothèse de récurrence : il existe une base $(f_1, f_2, \dots, f_p)$ de $\ker Q(f)$ dans laquelle la matrice de l'endomorphisme induit par f sur $\ker Q(f)$ est diagonale par blocs.

La matrice de f dans la base $(f_1, f_2, \dots, f_p, e_{p+1}, e_{p+2}, \dots, e_n)$ sera alors elle aussi diagonale par bloc, donc la propriété est vraie au rang $r+1$.

La propriété est donc initialisée et héréditaire donc vraie pour tout $r \geq 2$, autrement dit :

Si $P(f) = 0$ où $P = P_1 P_2 \dots P_r$ avec $r \geq 2$ et où les P_i sont des polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux sans racine commune (réelle ou complexe), alors on peut trouver une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs.

Exercice 5

Remarquons que si A est une matrice nilpotente, la somme $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$ est finie, donc $\exp(A)$ est bien définie.

1) Soient p et q les indices de nilpotence respectifs de A et B . On a donc pour tout entier $k \geq p$, $A^k = 0_n$ et pour tout entier $k \geq q$, $B^k = 0_n$. Alors, comme A et B commutent, on peut écrire :

$$(A+B)^{p+q} = \sum_{k=0}^{p+q} \binom{p+q}{k} A^k B^{p+q-k} = \sum_{k=0}^p \binom{p+q}{k} A^k B^{p+q-k} + \sum_{k=p+1}^{p+q} \binom{p+q}{k} A^k B^{p+q-k}.$$

Or :

- pour tout $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$, on a $p+q-k \geq q$, donc $B^{p+q-k} = 0_n$;
- pour tout $k \in \llbracket p+1, p+q \rrbracket$, on a $A^k = 0_n$.

Ainsi, dans la somme précédente, tous les termes sont nuls, donc $(A+B)^{p+q} = 0_n$, ce qui prouve que :

$A+B$ est nilpotente.

On a alors :

$$\begin{aligned} \exp(A) \times \exp(B) &= \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} A^i \right) \times \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} B^j \right) = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} \frac{1}{j!} A^i B^j = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^k \frac{1}{i!(k-i)!} A^i B^{k-i} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} A^i B^{k-i} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} (A+B)^k = \exp(A+B) \end{aligned}$$

Et comme $A+B = B+A$, on a $\exp(B) \times \exp(A) = \exp(B+A) = \exp(A+B) = \exp(A) \times \exp(B)$ et ainsi :

$$\exp(A+B) = \exp(A) \times \exp(B) = \exp(B) \times \exp(A)$$

2) Remarquons que 0_n est nilpotente et $\exp(0_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} 0_n^k = I_n + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} 0_n^k = I_n$. Alors :

$$\exp(A) \times \exp(-A) = \exp(-A) \times \exp(A) = \exp(A-A) = \exp(0_n) = I_n.$$

Donc :

$\exp(A)$ est inversible, d'inverse $\exp(-A)$.

Exercice 6

Commençons par traiter le cas où $a = 0$. La relation devient $\text{tr}(M)A = B$ et il existe une matrice M vérifiant cela si et seulement si $B = \lambda A$. Dans ce cas, toute matrice M de trace λ convient.

On suppose maintenant que $a \neq 0$. S'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $aM + \text{tr}(M)A = B$, alors :

$$\text{tr}(aM + \text{tr}(M)A) = \text{tr}(B) \Leftrightarrow a \text{tr}(M) + \text{tr}(M) \times \text{tr}(A) = \text{tr}(B) \Leftrightarrow (a + \text{tr}(A)) \text{tr}(M) = \text{tr}(B).$$

Plusieurs cas se présentent alors.

- Si $a + \text{tr}(A) \neq 0$, alors $\text{tr}(M) = \frac{\text{tr}(B)}{a + \text{tr}(A)}$ et :

$$M = \frac{1}{a} \left(B - \frac{\text{tr}(B)}{a + \text{tr}(A)} A \right).$$

On montre facilement que cette matrice vérifie bien la relation voulue.

- Si $a + \text{tr}(A) = 0$ et $\text{tr}(B) = 0$, alors $M = \frac{1}{a}(B - \lambda A)$ convient pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

En effet, avec $a = -\text{tr}(A)$ et $\text{tr}(B) = 0$, on a pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$a \left[\frac{1}{a}(B - \lambda A) \right] + \text{tr} \left[\frac{1}{a}(B - \lambda A) \right] A = B - \lambda A + \frac{1}{a}(\text{tr}(B) - \lambda \text{tr}(A)) A = B - \lambda A + \lambda A = B.$$

- Si $a + \text{tr}(A) = 0$ et $\text{tr}(B) \neq 0$, il n'y a alors pas de solution.

Finalement :

Il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $aM + \text{tr}(M)A = B$ quand :

- $a = 0$ et $B = \lambda A$ ($\lambda \in \mathbb{K}$) ;
- ou $a \neq 0$ et $a + \text{tr}(A) \neq 0$;
- ou $a \neq 0$, $a + \text{tr}(A) = 0$ et $\text{tr}(B) = 0$.

Exercice 7

Posons $f = \sum_{g \in G} g$.

Pour tout $g_0 \in G$, soit l'application $\psi: G \rightarrow G; g \mapsto g_0 g$. Cette application est bien à images dans G car G est stable par composition et bijective de réciproque $g \mapsto g_0^{-1} g$ car g_0 est bijective et $g_0^{-1} \in G$.

On a donc $\psi(G) = \{g_0 g, g \in G\} = G$ et :

$$g_0 f = g_0 \sum_{g \in G} g = \sum_{g \in G} g_0 g = \sum_{g \in \psi(G)} g = \sum_{g \in G} g = f.$$

On a donc pour tout $g \in G$, $gf = f$, donc :

$$\sum_{g \in G} gf = \sum_{g \in G} f \Leftrightarrow \left(\sum_{g \in G} g \right) f = rf \Leftrightarrow f^2 = rf.$$

Comme G est non vide, on a $r \neq 0$ et si on pose $p = \frac{1}{r} f$, p est linéaire et :

$$p^2 = \frac{1}{r^2} f^2 = \frac{1}{r^2} r f = \frac{1}{r} f = p.$$

Donc, p est un projecteur de E et on a :

$$rg(p) = tr(p) = \frac{1}{r} tr(f) = \frac{1}{r} tr\left(\sum_{g \in G} g\right) = \frac{1}{r} \sum_{g \in G} tr(g).$$

1) Si $\sum_{g \in G} tr(g) = 0$, on a immédiatement $rg(p) = 0$, ce qui implique que $p = 0$ et donc que :

$$f = \sum_{g \in G} g = 0$$

2) Remarquons déjà que pour tout $x \in F$, on a $g(x) = x$ pour tout $g \in G$, donc :

$$p(x) = \frac{1}{r} f(x) = \frac{1}{r} \sum_{g \in G} g(x) = \frac{1}{r} \sum_{g \in G} x = \frac{1}{r} r x = x.$$

Ainsi, $p(x) = x$, donc $x \in \text{Im } p$. Ceci prouve que :

$$\underline{F \subset \text{Im } p}.$$

Soit maintenant $x \in \text{Im } p$. On a $p(x) = x$, soit $x = \frac{1}{r} f(x)$.

Soit $g \in G$. On a vu plus haut que $gf = f$, donc :

$$g(x) = \frac{1}{r} gf(x) = \frac{1}{r} f(x) = p(x) = x.$$

Ainsi, $g(x) = x$ pour tout $g \in G$, donc $x \in F$. Ceci prouve que :

$$\underline{\text{Im } p \subset F}.$$

Finalement, on a $F = \text{Im } p$ et donc :

$$F \text{ est bien un sous-espace de } E \text{ de dimension } rg(p) = \frac{1}{r} \sum_{g \in G} tr(g).$$

Exercice 8

1) a. Pour tout $g \in \mathcal{L}(E)$, on a $\ker g \subset \ker f \circ g$ et $\text{Im } g \circ f \subset \text{Im } g$.

Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, si on prend $g = f^k$, on a $\ker f^k \subset \ker f \circ f^k$ et $\text{Im } f^k \circ f \subset \text{Im } f^k$, soit :

$$\ker f^k \subset \ker f^{k+1} \text{ et } \text{Im } f^{k+1} \subset \text{Im } f^k.$$

Ainsi :

$$(\ker f^k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ et } (\text{Im } f^k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ sont respectivement croissante et décroissante pour l'inclusion.}$$

b. Supposons que pour $p \in \mathbb{N}$, on a $\text{Im } f^p = \text{Im } f^{p+1}$.

Montrons alors par récurrence sur k que pour tout entier $k \geq p$, $\text{Im } f^k = \text{Im } f^p$.

Pour $k = p$, c'est immédiat.

Supposons la propriété vraie à un rang $k \geq p$. On a alors :

$$\text{Im } f^{k+1} = f^{k+1}(E) = f(f^k(E)) = f(\text{Im } f^k) \underset{HR}{=} f(\text{Im } f^p) = f(f^p(E)) = f^{p+1}(E) = \text{Im } f^{p+1} = \text{Im } f^p.$$

Donc, la propriété est vraie au rang $k+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout entier $k \geq p$, soit :

Si $\text{Im } f^p = \text{Im } f^{p+1}$, alors $\text{Im } f^k = \text{Im } f^p$ pour tout entier $k \geq p$.

c. Supposons que pour $p \in \mathbb{N}$, on a $\ker f^p = \ker f^{p+1}$.

Soit un entier $k \geq p$.

On a toujours $\ker f^k \subset \ker f^{k+1}$ (car la suite $(\ker f^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion) et si $x \in \ker f^{k+1}$:

$$f^{k+1}(x) = f^{k-p+p+1}(x) = f^{p+1}(f^{k-p}(x)) = 0.$$

Donc, $f^{k-p}(x) \in \ker f^{p+1} = \ker f^p$, d'où :

$$f^p(f^{k-p}(x)) = f^k(x) = 0.$$

Donc, $x \in \ker f^k$ et ainsi, $\ker f^{k+1} \subset \ker f^k$.

Ainsi, $\ker f^{k+1} = \ker f^k$ pour tout entier $k \geq p$, donc la suite $(\ker f^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est constante pour l'inclusion à partir du rang p , soit :

Si $\ker f^p = \ker f^{p+1}$, alors $\ker f^k = \ker f^p$ pour tout entier $k \geq p$.

d. On veut prouver que $f(N) \subset N$ et $f(I) \subset I$.

Soit $x \in N = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \ker f^k$. Il existe $a \in \mathbb{N}$ tel que $x \in \ker f^a$.

Or, $\ker f^a \subset \ker f^{a+1}$, donc $x \in \ker f^{a+1}$, soit $f^{a+1}(x) = f^a(f(x)) = 0$, donc $f(x) \in \ker f^a \subset N$.

Ainsi, pour tout $x \in N$, $f(x) \in N$, soit :

$f(N) \subset N$

Soit $x \in I = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \text{Im } f^k$. On a $x \in \text{Im } f^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Alors, $f(x) \in f(\text{Im } f^k) = \text{Im } f^{k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit $f(x) \in \text{Im } f^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Enfin, comme $f(x) \in \text{Im } f^0 = \text{Im } id_E = E$, on a $f(x) \in \text{Im } f^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc $f(x) \in I$.

Ainsi, pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$, soit :

$f(I) \subset I$

2) a. La suite $(\text{Im } f^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion, donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\text{Im } f^{k+1} \subset \text{Im } f^k$.

Ceci implique que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\text{rg}(f^k) \leq \text{rg}(f^{k+1})$. La suite $(\text{rg}(f^k))_{k \in \mathbb{N}}$ est donc une suite d'entier décroissante : elle est stationnaire. Ceci veut dire qu'il existe un entier naturel p tel que $\text{rg}(f^k) = \text{rg}(f^p)$ pour tout entier $k \geq p$ et si $p \neq 0$, $\text{rg}(f^p) < \text{rg}(f^{p-1})$.

Alors, si $p \neq 0$, on a $\text{Im } f^p \neq \text{Im } f^{p-1}$ et, comme pour tout entier $k \geq p$, $\text{Im } f^k \subset \text{Im } f^p$, l'égalité des rangs implique $\text{Im } f^k = \text{Im } f^p$.

Ainsi :

Il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\text{Im } f^p \neq \text{Im } f^{p-1}$ si $p \neq 0$ et $\text{Im } f^k = \text{Im } f^p$ pour tout entier $k \geq p$.

b. Avec la croissance de $(\ker f^k)_{k \in \mathbb{N}}$ pour l'inclusion et le théorème du rang, on a pour tout entier $k \geq p$:

$$\left. \begin{aligned} \text{rg}(f^k) = \text{rg}(f^p) &\Rightarrow n - \text{rg}(f^k) = n - \text{rg}(f^p) \Rightarrow \dim(\ker f^k) = \dim(\ker f^p) \\ \ker f^p &\subset \ker f^k \end{aligned} \right\} \Rightarrow \ker f^k = \ker f^p.$$

Et si $p \neq 0$:

$$\text{rg}(f^p) < \text{rg}(f^{p-1}) \Rightarrow \dim(\ker f^p) = n - \text{rg}(f^p) > n - \text{rg}(f^{p-1}) = \dim(\ker f^{p-1}) \Rightarrow \ker f^p \neq \ker f^{p-1}.$$

Ainsi, on a bien :

$\ker f^p \neq \ker f^{p-1}$ si $p \neq 0$ et $\ker f^k = \ker f^p$ pour tout entier $k \geq p$.

c. Si $p = 0$, alors $p \leq n$. On suppose que $p \geq 1$.

Supposons qu'il existe $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ tel que $\text{Im } f^{k+1} = \text{Im } f^k$.

Alors, d'après la question 1b, on a $\text{Im } f^{K+1} = \text{Im } f^K = \text{Im } f^k$ pour tout entier $K \geq k$ et en particulier pour $K = p-1$, on obtient $\text{Im } f^p = \text{Im } f^{p-1}$, qui est contradictoire. Donc, pour tout $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, $\text{Im } f^{k+1} \neq \text{Im } f^k$.

Comme on a $\text{Im } f^{k+1} \subset \text{Im } f^k$, on en déduit que pour tout $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, $\text{rg}(f^{k+1}) < \text{rg}(f^k)$.

De plus, $\text{Im } f^0 = \text{Im } id_E = E$, donc $\text{rg}(f^0) = n$ et ainsi, on a :

$$0 \leq \text{rg}(f^p) < \text{rg}(f^{p-1}) < \dots < \text{rg}(f^2) < \text{rg}(f) < n$$

Alors :

$$\{\text{rg}(f), \text{rg}(f^2), \dots, \text{rg}(f^p)\} \subset \llbracket 0, n-1 \rrbracket \Rightarrow \text{Card}(\{\text{rg}(f), \text{rg}(f^2), \dots, \text{rg}(f^p)\}) \leq \text{Card}(\llbracket 0, n-1 \rrbracket) = n.$$

Enfin, comme les $\text{rg}(f^k)$ sont distincts deux à deux quand $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$\text{Card}(\{\text{rg}(f), \text{rg}(f^2), \dots, \text{rg}(f^p)\}) = p.$$

Et ainsi :

$$p \leq n$$

d. On a :

- $\ker f^k = \ker f^p$ et $\operatorname{Im} f^k = \operatorname{Im} f^p$ pour tout entier $k \geq p$, donc :

$$\bigcup_{k \geq p} \ker f^k = \ker f^p \quad \text{et} \quad \bigcap_{k \geq p} \operatorname{Im} f^k = \operatorname{Im} f^p.$$

- $\ker f^k \subset \ker f^p$ et $\operatorname{Im} f^p \subset \operatorname{Im} f^k$ pour tout entier $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$ donc :

$$\bigcup_{0 \leq k \leq p} \ker f^k = \ker f^p \quad \text{et} \quad \bigcap_{0 \leq k \leq p} \operatorname{Im} f^k = \operatorname{Im} f^p.$$

Alors, on a bien :

$$N = \ker f^p \quad \text{et} \quad I = \operatorname{Im} f^p.$$

Soit $x \in \ker f^p \cap \operatorname{Im} f^p$. On a $f^p(x) = 0$ et il existe $z \in E$ tel que $x = f^p(z)$, alors :

$$f^p(x) = 0 \Rightarrow f^p(f^p(z)) = f^{2p}(z) = 0 \Rightarrow z \in \ker f^{2p} = \ker f^p \Rightarrow f^p(z) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Ainsi :

$$\ker f^p \cap \operatorname{Im} f^p = \{0\}.$$

On a donc $\ker f^p + \operatorname{Im} f^p = \ker f^p \oplus \operatorname{Im} f^p \subset E$ et d'après le théorème du rang :

$$\dim(\ker f^p \oplus \operatorname{Im} f^p) = \dim(\ker f^p) + \dim(\operatorname{Im} f^p) = n = \dim E.$$

Donc :

$$E = \ker f^p \oplus \operatorname{Im} f^p$$

e. On a vu que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Im} f^{k+1} \subset \operatorname{Im} f^k$. Or, $\operatorname{Im} f^{k+1} = f(\operatorname{Im} f^k)$, donc $\operatorname{Im} f^k$ est stable par f .

Appelons f_k l'endomorphisme induit par f sur $\operatorname{Im} f^k$. On a :

$$\operatorname{Im} f_k = f(\operatorname{Im} f^k) = \operatorname{Im} f^{k+1} \quad \text{et} \quad \ker f_k = \{x \in \operatorname{Im} f^k, f(x) = 0\} = \operatorname{Im} f^k \cap \ker f.$$

Le théorème du rang appliqué à f_k donne alors :

$$\dim(\operatorname{Im} f_k) + \dim(\ker f_k) = \dim(\operatorname{Im} f^k) \Leftrightarrow \operatorname{rg}(f^k) - \operatorname{rg}(f^{k+1}) = \dim(\operatorname{Im} f^k \cap \ker f).$$

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Im} f^{k+1} \subset \operatorname{Im} f^k$, donc $\operatorname{Im} f^{k+1} \cap \ker f \subset \operatorname{Im} f^k \cap \ker f$ et :

$$\dim(\operatorname{Im} f^{k+1} \cap \ker f) \leq \dim(\operatorname{Im} f^k \cap \ker f).$$

Ceci prouve que :

$$\text{La suite } (\operatorname{rg}(f^k) - \operatorname{rg}(f^{k+1}))_{k \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante.}$$

Par ailleurs, on a vu que $0 \leq \operatorname{rg}(f^p) < \operatorname{rg}(f^{p-1}) < \dots < \operatorname{rg}(f^2) < \operatorname{rg}(f) < n$.

Ceci entraîne que pour tout $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, $\operatorname{rg}(f^k) - \operatorname{rg}(f^{k+1}) > 0$, et comme $\operatorname{rg}(f^k) - \operatorname{rg}(f^{k+1})$ est entier, on obtient $\operatorname{rg}(f^k) - \operatorname{rg}(f^{k+1}) \geq 1$.

Ainsi :

La suite $(rg(f^k) - rg(f^{k+1}))_{k \in \mathbb{N}}$ est minorée par 1 jusqu'au rang $p-1$.

On a alors pour tout $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ et pour tout $i \in \llbracket 0, k \rrbracket$:

$$1 \leq rg(f^i) - rg(f^{i+1}) \leq rg(f^0) - rg(f^1) = rg(id_E) - rg(f) = n - rg(f).$$

Et en sommant de $i=1$ à $i=k$, on obtient pour tout $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ (quand $p \geq 2$) :

$$\sum_{i=1}^k 1 \leq \sum_{i=1}^k [rg(f^i) - rg(f^{i+1})] \leq \sum_{i=1}^k [n - rg(f)].$$

Soit par télescopage, pour tout $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ (quand $p \geq 2$) :

$$k \leq rg(f) - rg(f^{k+1}) \leq k[n - rg(f)]$$

3) a. Comme α , l'indice de nilpotence de f , est le plus petit entier naturel non nul α tel que $f^\alpha = 0$, on a $f^{\alpha-1} \neq 0$ et $\text{Im } f^{\alpha-1} \neq \{0\} = \text{Im } f^\alpha$.

De plus, pour tout entier $k \geq \alpha$, $f^k = f^{k-\alpha} f^\alpha = 0$.

Ainsi, on a $\text{Im } f^\alpha \neq \text{Im } f^{\alpha-1}$ et pour tout entier $k \geq \alpha$, $\text{Im } f^k = \text{Im } f^\alpha = \{0\}$. D'après la question 2, $\alpha = p$, autrement dit :

L'indice de nilpotence de f est p .

b. On a vu que $\alpha = p \leq n$. Or, pour tout entier $k \geq \alpha$, $f^k = 0$. En particulier pour $k = n$:

$$f^n = 0$$

c. Comme $\text{Im } f^{p-1} \neq \text{Im } f^p = \{0\}$, $\text{Im } f^{p-1}$ contient un vecteur non nul, autrement dit :

Il existe un vecteur $x \in E$ tel que $f^{p-1}(x) \neq 0$.

Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ tel que :

$$\lambda_0 x + \lambda_1 f(x) + \dots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(x) = 0 \quad (1).$$

Rappelons que pour tout entier $k \geq p \geq 1$, $f^k(x) = 0$.

Supposons qu'il existe un ou plusieurs λ_i non nul(s). Notons λ_m celui de plus petit indice avec $m \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$.

On a donc $\lambda_m \neq 0$ et $\lambda_k = 0$ pour tout entier $k \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$ (s'il y a lieu), et (1) se réécrit :

$$\lambda_m f^m(x) + \lambda_{m+1} f^{m+1}(x) + \dots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(x) = 0.$$

En appliquant f^{p-1-m} , on obtient, avec $f^p(x) = \dots = f^{2(p-1)-m}(x) = 0$:

$$\lambda_m f^{p-1}(x) + \lambda_{m+1} f^p(x) + \dots + \lambda_{p-1} f^{2(p-1)-m}(x) = 0 \Leftrightarrow \lambda_m f^{p-1}(x) = 0.$$

Or, $f^{p-1}(x) \neq 0$, donc $\lambda_m f^{p-1}(x) = 0$ implique $\lambda_m = 0$, ce qui est absurde.

Ainsi, tous les λ_i sont nuls et donc :

La famille $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est libre.

d. Posons $e_k = f^{n-k}(x)$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a alors :

$$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, e_n) = (f^{n-1}(x), f^{n-2}(x), \dots, f(x), x).$$

D'après la question précédente, si $p = n$, cette famille est libre et comme elle contient n vecteurs d'un espace de dimension n , c'est une base.

Enfin, on a $f(e_1) = f(f^{n-1}(x)) = f^n(x) = 0$ et pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $f(e_k) = f(f^{n-k}(x)) = f^{n-k+1}(x) = e_{k-1}$.

Ainsi :

La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4) Notons f_N (resp. f_I) l'endomorphisme induit par f sur N (resp. sur I).

On a vu dans la question 2.d que $N = \ker f^p$.

Alors, pour tout $x \in N = \ker f^p$, on a $f_N^p(x) = f^p(x) = 0$, donc $f_N^p = 0$ et ainsi :

f_N est nilpotent.

On a vu aussi dans la question 2.d que $I = \text{Im } f^p$. Alors :

$$f_I(I) = f(I) = f(\text{Im } f^p) = \text{Im } f^{p+1} = \text{Im } f^p = I.$$

Ainsi, $f_I(I) = I$, donc l'endomorphisme f_I est surjectif et, comme on est en dimension finie, il est bijectif, soit :

$$f_I \in GL(I)$$

5) Supposons qu'il existe $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ telle que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a alors :

$$A^4 = (A^2)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A^6 = A^4 A^2 = 0_3.$$

Donc, A est nilpotente. Alors, d'après la question 3.b, on a $A^3 = 0_3$.

Mais alors $A^4 = A^3 A = 0_3 A = 0_3$, ce qui est absurde, donc :

Il n'existe pas de matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ telle que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 9

1) On suppose que pour tout $x \in \mathbb{K}^n$, la famille $(x, f(x))$ est liée, donc qu'il existe $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$.

Montrer que f est une homothétie revient à montrer que λ_x ne dépend pas de x .

Comme $f(0) = 0 = \lambda 0$ quel que soit $\lambda \in \mathbb{K}$, on peut prouver la propriété ci-dessus pour tout vecteur non nul.

Soient alors $x, y \in \mathbb{K}^n$ non nuls.

- Si $y = kx$ alors :

$$f(y) = \lambda_y y = f(kx) = k f(x) = k \lambda_x x = \lambda_x kx = \lambda_x y.$$

Donc $\lambda_y = \lambda_x$.

- Si (x, y) est libre alors :

$$f(x+y) = \lambda_{x+y} (x+y) = \lambda_{x+y} x + \lambda_{x+y} y = f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y.$$

- Donc $(\lambda_{x+y} - \lambda_x)x + (\lambda_{x+y} - \lambda_y)y = 0$, ce qui donne $\lambda_{x+y} = \lambda_x = \lambda_y$ car (x, y) est libre.

Finalement, on a $\lambda_y = \lambda_x$ dans tous les cas, et donc λ_x ne dépend pas de x , ce qui veut dire que :

f est une homothétie.

2) Si $A = \lambda I_n$, alors $\text{Tr}(A) = \lambda n$, donc on a $\text{Tr}(A) = 0$ seulement pour $\lambda = 0$. Ainsi :

La seule matrice scalaire de trace nulle est la matrice nulle.

3) Prouvons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que si $\text{Tr}(A) = 0$, alors A est semblable à une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont nuls.

Initialisation :

Pour $n = 1$, la seule matrice de trace nulle est $A = (0)$, donc la propriété est vraie (le coefficient diagonal de A est déjà nul).

Hérédité :

On suppose la propriété vraie à un rang $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit alors $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ telle que $\text{Tr}(A) = 0$.

Si $A = 0_{n+1}$, alors A est égale à une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont nuls.

Si $A \neq 0_{n+1}$, notons f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^{n+1}$ canoniquement associé à A .

D'après la question précédente, A n'est pas scalaire, donc f n'est pas une homothétie, et, d'après la question 1 (la contraposée), il existe $x \in \mathbb{K}^n$ tel que la famille $(x, f(x))$ est libre. On peut alors compléter cette famille en une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de $\mathbb{K}^n$ où $e_1 = x$ et $e_2 = f(x)$.

On a alors $f(e_1) = e_2$ et donc :

$$A' = M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \times & \cdots & \times \\ 1 & & & \\ 0 & & B & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = P^{-1}AP$$

avec $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P = P_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{B}}$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}_c$, la base canonique de $\mathbb{K}^n$, à $\mathcal{B}$.

On a :

$$\text{Tr}(A') = \text{Tr}(B) = \text{Tr}(P^{-1}AP) = \text{Tr}(A) = 0.$$

Donc, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de trace nulle et on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence : il existe $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients diagonaux sont nuls telles que $C = Q^{-1}BQ$.

En posant $P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$, on a $P' \in GL_{n+1}(\mathbb{K})$ avec $P'^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q^{-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ (en multipliant P' par

cette matrice, on obtient I_{n+1}).

Avec des produits par blocs, on a :

$$P'^{-1}A'P' = \begin{pmatrix} 0 & \times & \cdots & \times \\ \times & & & \\ \vdots & & Q^{-1}BQ & \\ \times & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \times & \cdots & \times \\ \times & & & \\ \vdots & & C & \\ \times & & & \end{pmatrix} = B'.$$

Et tous les coefficients diagonaux de B' sont nuls (car ceux de C le sont).

Enfin, on a $B' = P'^{-1}A'P' = P'^{-1}(P^{-1}AP)P' = (PP')^{-1}A(PP')$ avec $PP' \in GL_{n+1}(\mathbb{K})$, donc A est semblable à B' , matrice dont tous les coefficients diagonaux sont nuls et la propriété est vraie au rang $n+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Ceci prouve le sens direct de la propriété.

Réciproquement, si A est semblable à une matrice B dont tous les coefficients diagonaux sont nuls, alors on a :

$$\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B) = 0 + \dots + 0 = 0.$$

Ainsi :

La matrice A est de trace nulle si et seulement si elle est semblable à une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont nuls.

Exercice 10

1) Comme $f = f_1 + f_2 + \dots + f_p$, on a pour tout $x \in E$:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_p(x) \in \text{Im } f_1 + \text{Im } f_2 + \dots + \text{Im } f_p.$$

Donc :

$$\underline{\text{Im } f \subset \text{Im } f_1 + \text{Im } f_2 + \dots + \text{Im } f_p} \quad (1)$$

De plus, toujours avec $f = f_1 + f_2 + \dots + f_p$, on a :

$$\text{Tr}(f) = \text{Tr}(f_1) + \text{Tr}(f_2) + \dots + \text{Tr}(f_p).$$

Or, $f_1, f_2, \dots, f_p$ et ici f sont des projecteurs, donc leur rang est égal à leur trace. Ainsi :

$$\underline{\text{rg}(f) = \text{rg}(f_1) + \text{rg}(f_2) + \dots + \text{rg}(f_p)} \quad (2)$$

Or on a toujours $\dim(\text{Im } f_1 + \text{Im } f_2 + \dots + \text{Im } f_p) \leq \sum_{i=1}^p \dim(\text{Im } f_i)$, donc avec (1) et (2), on obtient :

$$\text{rg}(f) = \dim(\text{Im } f) \leq \dim(\text{Im } f_1 + \text{Im } f_2 + \dots + \text{Im } f_p) \leq \sum_{i=1}^p \dim(\text{Im } f_i) = \sum_{i=1}^p \text{rg}(f_i) = \text{rg}(f).$$

Donc, $\dim(\text{Im } f) = \dim(\text{Im } f_1 + \text{Im } f_2 + \dots + \text{Im } f_p) = \sum_{i=1}^p \dim(\text{Im } f_i)$, ce qui prouve (avec (1)), que :

$$\boxed{\text{Im } f = \text{Im } f_1 \oplus \text{Im } f_2 \oplus \dots \oplus \text{Im } f_p}$$

2) On veut :

$$(f \text{ est un projecteur de } E) \Leftrightarrow \left(\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2, i \neq j, f_i \circ f_j = 0_{\mathcal{L}(E)} \right)$$

($\Rightarrow$) On suppose que f est un projecteur de E . Alors, d'après la question 1, $\text{Im } f = \text{Im } f_1 \oplus \text{Im } f_2 \oplus \dots \oplus \text{Im } f_p$, donc pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\text{Im } f_j \subset \text{Im } f$ et, pour tout $x \in E$, $f_j(x) \in \text{Im } f_j$, donc $f_j(x) \in \text{Im } f$, soit :

$$f(f_j(x)) = f_j(x).$$

Mais alors :

$$f(f_j(x)) - f_j(x) = \sum_{i=1}^p f_i f_j(x) - f_j(x) = f_j^2(x) + \sum_{i=1, i \neq j}^p f_i f_j(x) - f_j(x) = \sum_{i=1, i \neq j}^p f_i f_j(x) = 0.$$

Toujours, d'après la question 1, on a $\text{Im } f_1 + \text{Im } f_2 + \dots + \text{Im } f_p = \text{Im } f_1 \oplus \text{Im } f_2 \oplus \dots \oplus \text{Im } f_p$, donc la seule décomposition de 0 dans cette somme directe est $0 + 0 + \dots + 0$ et :

$$\sum_{i=1, i \neq j}^p f_i f_j(x) = \sum_{i=1, i \neq j}^p f_i(f_j(x)) = 0 \Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, i \neq j, f_i(f_j(x)) = f_i f_j(x) = 0.$$

Ceci est vrai pour tout $x \in E$, donc :

$$\underline{\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2, i \neq j, f_i \circ f_j = 0_{\mathcal{L}(E)}}.$$

($\Leftarrow$) On suppose ici que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$, on a $f_i f_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

On a $f = f_1 + f_2 + \dots + f_p \in \mathcal{L}(E)$ et :

$$f^2 = \left(\sum_{i=1}^p f_i \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^p f_i \right) \left(\sum_{j=1}^p f_j \right) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p f_i f_j = \sum_{i=1}^p f_i^2 + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1, j \neq i}^p f_i f_j = \sum_{i=1}^p f_i + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1, j \neq i}^p 0_{\mathcal{L}(E)} = f.$$

Ainsi, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $f^2 = f$, donc :

$$\underline{f \text{ est un projecteur de } E}.$$

Finalement :

$$\boxed{(f \text{ est un projecteur de } E) \Leftrightarrow \left(\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2, i \neq j, f_i \circ f_j = 0_{\mathcal{L}(E)} \right)}$$