

Corrigés des TD du chapitre 7

Exercice 1

1) En effectuant $C_j \leftarrow C_j - C_n$ pour tout $j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & n & n & \cdots & n \\ n & 2 & n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & n \\ n & \cdots & n & n-1 & n \\ n & n & \cdots & n & n \end{vmatrix}_n = \begin{vmatrix} 1-n & 0 & \cdots & 0 & n \\ 0 & 2-n & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & n \\ 0 & \cdots & n & -1 & n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix}_n = (1-n)(2-n)\dots(-1)n = (-1)^{n-1}(n-1)(n-2)\dots(1)n.$$

Soit :

$$\Delta_1 = (-1)^{n-1} n!$$

En développant par rapport à la première colonne :

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}_{n-1} + (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{n-1}$$

Soit :

$$\Delta_2 = 1 + (-1)^{n+1}$$

En effectuant $L_n \leftarrow L_n - L_{n-1}$, puis $L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_{n-2}$, puis $L_{n-2} \leftarrow L_{n-2} - L_{n-3}$, puis ... , puis $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$:

$$\Delta_3 = D_n = \begin{vmatrix} \binom{1}{1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{2}{2} - \binom{1}{1} & \binom{2}{1} - 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \binom{n-1}{n-1} - \binom{n-2}{n-2} & \cdots & \cdots & \binom{n-1}{1} - 1 & 1 \\ \binom{n}{n} - \binom{n-1}{n-1} & \binom{n}{n-1} - \binom{n-1}{n-2} & \cdots & \binom{n}{2} - \binom{n-1}{1} & \binom{n}{1} - 1 \end{vmatrix}_n$$

Avec la formule de Pascal $\binom{p}{k} - \binom{p-1}{k-1} = \binom{p-1}{k}$ (pour $1 \leq k \leq p-1$), on obtient :

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \binom{1}{1} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \binom{n-2}{1} & 1 \\ 0 & \binom{n-1}{n-1} & \cdots & \binom{n-1}{2} & \binom{n-1}{1} \end{vmatrix}_n$$

Et en développant par rapport à la première colonne :

$$D_n = \begin{vmatrix} \binom{1}{1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \binom{2}{2} & \binom{2}{1} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \binom{n-2}{1} & 1 \\ \binom{n-1}{n-1} & \binom{n-1}{n-2} & \dots & \binom{n-1}{2} & \binom{n-1}{1} \end{vmatrix}_{n-1} = D_{n-1}.$$

$$\text{Ainsi, } D_n = D_{n-1} = D_{n-2} = \dots = D_2 = \begin{vmatrix} \binom{1}{1} & 1 \\ \binom{2}{2} & \binom{2}{1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \text{ donc :}$$

$$\Delta_3 = 1$$

2) On fixe $x \in \mathbb{R}$.

En développant par rapport à la première colonne, on obtient pour tout $n \geq 2$:

$$D_n(x) = x D_{n-1}(x) - \frac{x^2}{2!} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x^2/2! & x & 1 & \ddots & \vdots \\ x^3/3! & x^2/2! & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & x & 1 \\ x^{n-1}/(n-1)! & x^{n-2}/(n-2)! & \dots & x^2/2! & x \end{vmatrix}_{n-1} + \frac{x^3}{3!} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ x^3/3! & x^2/2! & x & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ x^{n-1}/(n-1)! & x^{n-2}/(n-2)! & \dots & x^2/2! & x \end{vmatrix}_{n-1} \\ - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n!} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ x^2/2! & x & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ x^{n-2}/(n-2)! & \dots & x^2/2! & x & 1 \end{vmatrix}_{n-1}$$

En développant chacun des déterminants $(n-1) \times (n-1)$ obtenus par rapport à la première ligne plusieurs fois de suite si nécessaire, on obtient, en posant $D_0(x) = 1$:

$$D_n(x) = x D_{n-1}(x) - \frac{x^2}{2!} D_{n-2}(x) + \frac{x^3}{3!} D_{n-3}(x) - \dots + (-1)^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} D_1(x) + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n!} D_0(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k!} D_{n-k}(x).$$

On a de plus :

$$D_0(x) = 1 \quad D_1(x) = x \quad D_2(x) = \begin{vmatrix} x & 1 \\ x^2/2! & x \end{vmatrix} = \frac{x^2}{2!} \quad D_3(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ x^2/2! & x & 1 \\ x^3/3! & x^2/2! & x \end{vmatrix} = \frac{x^3}{3!}.$$

On conjecture alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D_n(x) = \frac{x^n}{n!}$. On le prouve par récurrence forte sur n .

La propriété est vraie au rang $n = 0$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, supposons la propriété vraie jusqu'à un rang $n-1$. On a alors pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $D_k(x) = \frac{x^k}{k!}$

(par hypothèse de récurrence), soit pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $D_{n-k}(x) = \frac{x^{n-k}}{(n-k)!}$ (car $n-k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$) et :

$$\begin{aligned} D_n(x) &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k!} D_{n-k}(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k!} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^n}{k!(n-k)!} \\ &= -\frac{x^n}{n!} \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} = -\frac{x^n}{n!} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^k = \frac{x^n}{n!} \left[1 - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \right] = \frac{x^n}{n!} [1 - (-1+1)^n] = \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

La propriété est donc vraie au rang n .

Ainsi, la propriété est initialisée et héréditaire donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Finalement, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$D_n(x) = \frac{x^n}{n!}$$

Exercice 2

On a toujours :

- $AB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\text{Im } AB \subset \text{Im } A$ donc $\text{rg}(AB) \leq \text{rg}(A) \leq \min(n, p)$;
- $BA \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ avec $\text{Im } BA \subset \text{Im } B$ donc $\text{rg}(BA) \leq \text{rg}(B) \leq \min(n, p)$.

Comme $n \neq p$, on a $n < p$ ou $p < n$.

- Si $p < n$, on a $\min(n, p) = p$ donc $\text{rg}(AB) \leq p < n$: AB n'est pas inversible et $\det AB = 0$.
- Si $n < p$, on a $\min(n, p) = n$ donc $\text{rg}(BA) \leq n < p$: BA n'est pas inversible et $\det BA = 0$.

Ainsi, on a toujours :

$$\det AB = 0 \text{ ou } \det BA = 0.$$

Exercice 3

Le déterminant d'une matrice est polynômial en chacun de ses coefficients, donc la fonction $f : x \mapsto \det(A + xB)$ est une fonction polynômiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Elle est donc entre autres continue sur $\mathbb{R}$.

Or, $f(0) = \det A \neq 0$ car A est inversible. Comme f est continue en 0, elle ne s'annule pas au voisinage de 0, autrement dit, il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, $f(x) = \det(A + xB) \neq 0$, ce qui implique que $A + xB$ est inversible. Ainsi :

$$\text{Il existe un réel } \varepsilon > 0 \text{ tel que pour tout } x \in [-\varepsilon, \varepsilon], A + xB \in GL_n(\mathbb{R}).$$

Exercice 4

1) a. On a :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0_n \\ -C & D^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD - BC & BD^{-1} \\ CD - DC & I_n \end{pmatrix}.$$

Et comme C et D commutent, on a $CD - DC = 0_n$, donc :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0_n \\ -C & D^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD - BC & BD^{-1} \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$\det \left[\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0_n \\ -C & D^{-1} \end{pmatrix} \right] = \det \begin{pmatrix} AD - BC & BD^{-1} \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} = \det(AD - BC) \times \det I_n = \det(AD - BC).$$

Et :

$$\det \left[\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0_n \\ -C & D^{-1} \end{pmatrix} \right] = \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \times \det \begin{pmatrix} D & 0_n \\ -C & D^{-1} \end{pmatrix} = \det M \times \det D \times \det(D^{-1}) = \det M.$$

Ainsi :

$$\boxed{\det M = \det(AD - BC)}$$

b. Posons $f(x) = \det(D(x)) = \det(D + xI_n)$. La fonction f est polynomiale en x .

On a $f(0) = \det D = 0$ (car D n'est pas inversible), donc 0 est racine de f .

Si f admet au moins une autre racine réelle (autre que 0), l'ensemble $R = \{z \in \mathbb{R}^*, f(z) = 0\}$ est non vide et fini, donc on peut poser $\alpha = \min\{|z|, z \in R\}$. Si f n'admet pas de autre racine réelle autre que 0, on peut prendre $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ quelconque. Dans les deux cas, On a alors, pour tout $x \in]-\alpha, \alpha[\setminus \{0\}$, $f(x) \neq 0$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{Il existe bien un réel } \alpha > 0 \text{ tel que pour tout } x \in]-\alpha, \alpha[\setminus \{0\}, \det(D(x)) \neq 0.}$$

c. D'après ce qui précède, on a pour tout $x \in]-\alpha, \alpha[\setminus \{0\}$, $\det(D(x)) \neq 0$, donc $D(x)$ est inversible.

Or, si C et D commutent, C et $D(x)$ commutent aussi pour tout réel x (C et I_n commutent). Alors, d'après la question a., on a, pour tout $x \in]-\alpha, \alpha[\setminus \{0\}$:

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D(x) \end{pmatrix} = \det(AD(x) - BC).$$

Or, les deux déterminants ci-dessus sont des fonctions polynomiales en x , donc continues en 0 et ainsi :

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D(0) \end{pmatrix} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D(x) \end{pmatrix} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} [\det(AD(x) - BC)] = \det(AD(0) - BC).$$

Soit :

$$\boxed{\det M = \det(AD - BC)}$$

2) a. Comme A et B commutent, on peut utiliser la question précédente :

$$\det N = \det \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} = \det(A^2 - B(-B)) = \det(A^2 + B^2).$$

Posons $Z = A + iB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. La matrice $\bar{Z}$ étant la matrice dont les coefficients sont les conjugués de ceux de Z , on a $\bar{\bar{Z}} = A - iB$ (car A et B sont deux matrices à coefficients réels).

De plus, l'expression du déterminant d'une matrice étant polynômiale en ses coefficients, on a $\det \bar{Z} = \overline{\det Z}$.

Alors :

$$\det(Z\bar{Z}) = (\det Z)(\det \bar{Z}) = (\det Z)(\overline{\det Z}) = |\det Z|^2 \geq 0.$$

Or, comme A et B commutent, on a :

$$Z\bar{Z} = (A + iB)(A - iB) = A^2 - i(AB - BA) + B^2 = A^2 + B^2.$$

Ainsi :

$$\det N = \det(A^2 + B^2) \geq 0$$

b. On peut écrire :

$$\det N = \det \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \underset{L_{j+n} \leftarrow L_{j+n} + iL_j}{=} \det \begin{pmatrix} A & B \\ -B + iA & A + iB \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & B \\ i(A + iB) & A + iB \end{pmatrix}$$

Comme $i(A + iB)$ et $A + iB$ commutent, on peut utiliser la question 1 :

$$\begin{aligned} \det N &= \det(A(A + iB) - B[i(A + iB)]) = \det((A - iB)(A + iB)) \\ &= \det(A - iB) \det(A + iB) = \overline{\det(A + iB)} \det(A + iB) = |\det(A + iB)|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Ainsi, même si A et B ne commutent pas :

$$\det N \geq 0$$

3) On a :

$$\begin{pmatrix} xI_p & A \\ B & I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I_p & 0_{p,q} \\ B & -xI_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB - xI_p & -xA \\ 0_{q,p} & -xI_q \end{pmatrix} \quad (1).$$

$$\begin{pmatrix} xI_p & A \\ B & I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I_p & A \\ 0_{q,p} & -xI_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -xI_p & 0_{p,q} \\ -B & BA - xI_q \end{pmatrix} \quad (2).$$

Alors, avec (1), on a :

$$\det \begin{pmatrix} xI_p & A \\ B & I_q \end{pmatrix} \times \det \begin{pmatrix} -I_p & 0_{p,q} \\ B & -xI_q \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} AB - xI_p & -xA \\ 0_{q,p} & -xI_q \end{pmatrix} = \det(AB - xI_p) \times \det(-xI_q).$$

Or, $\det(-xI_q) = (-x)^q$ et $\det \begin{pmatrix} -I_p & 0_{p,q} \\ B & -xI_q \end{pmatrix} = \det(-I_p) \times \det(-xI_q) = (-1)^p \times (-x)^q$, donc :

$$\det(AB - xI_p) \times (-x)^q = \det \begin{pmatrix} xI_p & A \\ B & I_q \end{pmatrix} \times (-1)^p \times (-x)^q.$$

De même avec (2), on obtient :

$$\det(BA - xI_q) \times (-x)^p = \det \begin{pmatrix} xI_p & A \\ B & I_q \end{pmatrix} \times (-1)^p \times (-x)^q.$$

Et ainsi :

$$(-x)^q \det(AB - xI_p) = (-x)^p \det(BA - xI_q)$$

4) Considérons deux cas.

1^{er} cas : $a = 0$

Alors, $\det M = \det \begin{pmatrix} 0_n & bA \\ cA & dA \end{pmatrix}$ et on effectue $L_i \leftrightarrow L_{i+n}$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Chaque interversion multiplie le déterminant par -1 et ainsi, on obtient :

$$\det M = (-1)^n \det \begin{pmatrix} cA & dA \\ 0_n & bA \end{pmatrix}.$$

Avec le déterminant par blocs :

$$\det M = (-1)^n \det(cA) \det(bA) = (-1)^n c^n \times \det A \times b^n \times \det A = (-bc)^n (\det A)^2.$$

Et avec $a = 0$, on a $\det B = -bc$, donc :

$$\det M = (\det B)^n (\det A)^2.$$

2nd cas : $a \neq 0$

On effectue $L_{i+n} \leftrightarrow L_{i+n} - \frac{c}{a} L_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, ce qui donne :

$$\det M = \det \begin{pmatrix} aA & bA \\ 0_n & \left(d - \frac{c}{a}b\right)A \end{pmatrix}.$$

Alors, à nouveau avec le déterminant par blocs :

$$\det M = \det(aA) \det\left(\left(d - \frac{c}{a}b\right)A\right) = a^n \times \det A \times \left(d - \frac{c}{a}b\right)^n \times \det A = (ad - cb)^n (\det A)^2.$$

Soit, à nouveau :

$$\det M = (\det B)^n (\det A)^2.$$

Donc, dans tous les cas :

$$\det M = (\det B)^n (\det A)^2$$

Exercice 5

Posons :

$$P(X) = \begin{vmatrix} 1 & X & \cdots & X^{k-1} & X^k & X^k & \cdots & X^n \\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^{k-1} & a_1^k & a_1^{k+1} & \cdots & a_1^n \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{k-1} & a_2^k & a_2^{k+1} & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{k-1} & a_n^k & a_n^{k+1} & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}.$$

En développant par rapport à la première ligne, on justifie facilement que P est un polynôme (en X), de degré au plus n .

Le coefficient de X^n est, au signe près, un déterminant de Vandermonde :

$$(-1)^{n+2} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^k & a_1^{k+1} & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^k & a_2^{k+1} & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^k & a_n^{k+1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^n V_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = (-1)^n \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \neq 0$$

Donc, P est de degré n .

De plus, pour tout $\ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $P(a_\ell) = 0$ (car c'est le déterminant d'une matrice possédant deux lignes identiques). Comme les a_ℓ sont deux à deux distincts, ce sont les n racines simples de P et ainsi :

$$P(X) = (-1)^n \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \prod_{\ell=1}^n (X - a_\ell).$$

Dans le développement par rapport à la première ligne, le coefficient de X^k est :

$$(-1)^{k+2} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{k-1} & a_1^{k+1} & \cdots & a_1^n \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{k-1} & a_2^{k+1} & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{k-1} & a_n^{k+1} & \cdots & a_n^n \end{vmatrix} = (-1)^k \Delta_k$$

Or, si $P(X) = \alpha_n X^n + \dots + \alpha_k X^k + \dots + \alpha_1 X + \alpha_0$ (avec P scindé, de racines les a_ℓ), on a :

$$\alpha_k = (-1)^{n-k} \alpha_n \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{n-k} \leq n} a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_{n-k}}.$$

Ainsi :

$$(-1)^k \Delta_k = (-1)^{n-k} (-1)^n \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{n-k} \leq n} a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_{n-k}}.$$

Soit :

$$\Delta_k = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{n-k} \leq n} a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_{n-k}}$$

Exercice 6

1) Soit $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A = QDQ^{-1}$. Pour tout $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, on a alors :

$$P(A) = \sum_{k=0}^p a_k A^k = \sum_{k=0}^p a_k (QDQ^{-1})^k = \sum_{k=0}^p a_k QD^k Q^{-1} = Q \left(\sum_{k=0}^p a_k D^k \right) Q^{-1} = Q(P(D))Q^{-1}.$$

Or, $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, donc :

$$P(D) = \sum_{k=0}^p a_k D^k = \sum_{k=0}^p a_k \text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k) = \text{diag} \left(\sum_{k=0}^p a_k \lambda_1^k, \dots, \sum_{k=0}^p a_k \lambda_n^k \right) = \text{diag}(P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n)) = \sum_{i=1}^p P(\lambda_i) E_{i,i}$$

où $E_{i,i}$ est la matrice de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans laquelle le 1 est le $i^{\text{ième}}$ coefficient diagonal.

Alors :

$$P(A) = Q \left(\sum_{i=1}^p P(\lambda_i) E_{i,i} \right) Q^{-1} = \sum_{i=1}^p P(\lambda_i) Q E_{i,i} Q^{-1}.$$

Et, en posant $A_i = Q E_{i,i} Q^{-1}$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ (qui ne dépend pas de P), on obtient :

$$\text{Pour tout } P \in \mathbb{K}[X], \quad P(A) = \sum_{i=1}^n P(\lambda_i) A_i.$$

2) Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On veut montrer que $A_i = Q E_{i,i} Q^{-1}$ est un polynôme en A , autrement dit qu'il existe $P_i \in \mathbb{C}[X]$ tel que :

$$A_i = P_i(A) \Leftrightarrow Q E_{i,i} Q^{-1} = Q(P_i(D)) Q^{-1} \Leftrightarrow P_i(D) = E_{i,i} \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, P_i(\lambda_k) = \delta_{i,k}.$$

Comme les λ_i sont deux à deux distincts, il suffit de prendre pour P_i le polynôme interpolateur de Lagrange associé aux λ_k et $\delta_{i,k}$. Ainsi :

$$\text{Pour tout } i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{ il existe bien un polynôme } P_i \in \mathbb{C}[X] \text{ tel que } A_i = P_i(A).$$

Exercice 7

Remarquons que comme la famille $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ contient n fonctions, $\text{rg}(f_1, f_2, \dots, f_n) = n$ si et seulement la famille est libre. On veut donc prouver que :

$$(f_1, f_2, \dots, f_n) \text{ est libre} \Leftrightarrow \exists (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \det \left[(f_j(x_i))_{1 \leq i, j \leq n} \right] \neq 0.$$

Soit par contraposée :

$$(f_1, f_2, \dots, f_n) \text{ est liée} \Leftrightarrow \forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \det \left[(f_j(x_i))_{1 \leq i, j \leq n} \right] = 0.$$

Par ailleurs, pour fixer les idées, notons que :

$$\det \left[(f_j(x_i))_{1 \leq i, j \leq n} \right] = \begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_n(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1(x_n) & f_2(x_n) & \cdots & f_n(x_n) \end{vmatrix}_n.$$

($\Rightarrow$) On suppose que la famille $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ est liée, donc il existe $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_n f_n = 0_{\mathbb{R}}$, soit pour tout réel x :

$$\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \dots + \lambda_n f_n(x) = 0.$$

Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. On a alors pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda_1 f_1(x_j) + \lambda_2 f_2(x_j) + \dots + \lambda_n f_n(x_j) = 0$.

Donc :

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} f_1(x_1) \\ f_1(x_2) \\ \vdots \\ f_1(x_n) \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} f_2(x_1) \\ f_2(x_2) \\ \vdots \\ f_2(x_n) \end{pmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{pmatrix} f_n(x_1) \\ f_n(x_2) \\ \vdots \\ f_n(x_n) \end{pmatrix} = 0.$$

Autrement dit, les colonnes de la matrice $(f_j(x_i))_{1 \leq i, j \leq n}$ sont liées et donc $\det \left[(f_j(x_i))_{1 \leq i, j \leq n} \right] = 0$.

($\Leftarrow$) On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

- Pour $n = 1$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\det[f_1(x)] = f_1(x) = 0$, donc $f_1 = 0_{\mathbb{R}}$ et (f_1) est liée.
- On suppose la propriété vraie à un rang n .

Soit $(f_1, f_2, \dots, f_n, f_{n+1})$ pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\det[f_i(x_j)]_{1 \leq i, j \leq n+1} = 0$, soit :

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_n(x_1) & f_{n+1}(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_n(x_2) & f_{n+1}(x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ f_1(x_n) & f_2(x_n) & \cdots & f_n(x_n) & f_{n+1}(x_n) \\ f_1(x_{n+1}) & f_2(x_{n+1}) & \cdots & f_n(x_{n+1}) & f_{n+1}(x_{n+1}) \end{vmatrix}_{n+1} = 0.$$

Si la famille $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ est liée, alors $(f_1, f_2, \dots, f_n, f_{n+1})$ aussi.

Supposons que la famille $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ est libre. Alors, par hypothèse de récurrence, il existe

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \det[f_j(x_i)]_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_n(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1(x_n) & f_2(x_n) & \cdots & f_n(x_n) \end{vmatrix}_n \neq 0.$$

Par hypothèse, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_n(x_1) & f_{n+1}(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_n(x_2) & f_{n+1}(x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ f_1(x_n) & f_2(x_n) & \cdots & f_n(x_n) & f_{n+1}(x_n) \\ f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) & f_{n+1}(x) \end{vmatrix}_{n+1} = 0.$$

En développant par rapport à la dernière ligne, on obtient :

$$(-1)^{n+2} f_1(x) \begin{vmatrix} f_2(x_1) & f_3(x_1) & \cdots & f_{n+1}(x_1) \\ f_2(x_2) & f_3(x_2) & \cdots & f_{n+1}(x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_2(x_n) & f_3(x_n) & \cdots & f_{n+1}(x_n) \end{vmatrix}_n + \dots + (-1)^{n+1+n+1} f_{n+1}(x) \begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_n(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1(x_n) & f_2(x_n) & \cdots & f_n(x_n) \end{vmatrix}_n = 0.$$

Ainsi, si on note λ_k le coefficient de $f_k(x)$ (indépendant de x) dans la relation ci-dessus, on a :

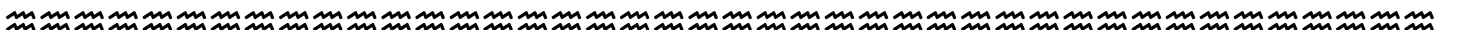
$$\forall x \in \mathbb{R}, \lambda_1 f_1(x) + \dots + \lambda_{n+1} f_{n+1}(x) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_{n+1} f_{n+1} = 0_{\mathbb{R}}.$$

Comme $\lambda_{n+1} = \det[f_j(x_i)]_{1 \leq i, j \leq n} \neq 0$, les λ_k ne sont pas tous nuls, et ainsi, la famille $(f_1, f_2, \dots, f_n, f_{n+1})$ est liée. La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Ainsi, on a bien :

$$rg(f_1, f_2, \dots, f_n) = n \Leftrightarrow (f_1, f_2, \dots, f_n) \text{ est libre} \Leftrightarrow \exists (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \det[f_j(x_i)]_{1 \leq i, j \leq n} \neq 0$$



Exercice 8

1) *Version deuxième année :*

Si $A^n = 0_n$, alors la seule valeur propre de A est 0, donc le polynôme caractéristique de A est $\chi_A = X^n$.

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a alors :

$$A^n = 0_n$$

Version première année (très classique) :

Elle fait appel aux images emboîtées : $\text{Im } A^{k+1} \subset \text{Im } A^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et on prouve que si $\text{Im } A^{k+1} = \text{Im } A^k$, alors $\text{Im } A^{k+s} = \text{Im } A^k$ pour tout $s \in \mathbb{N}$. Alors, il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$0 = \text{rg}(A^{r+k}) = \text{rg}(A^r) < \text{rg}(A^{r-1}) < \dots < \text{rg}(A) < n.$$

Comme $\text{rg}(A), \text{rg}(A^{r-1}), \dots, \text{rg}(A^r)$ sont r entiers distincts entre 0 et $n-1$, on a $r \leq n$ et donc $A^n = 0_n$.

2) On a vu que $\chi_A = X^n$. Or, $\chi_A = \det(XI_n - A)$. En évaluant en -1 , on obtient :

$$\chi_A(-1) = (-1)^n = \det(-I_n - A) = (-1)^n \det(I_n + A).$$

Et donc :

$$\det(A + I_n) = 1$$

3) Si M est inversible, on a :

$$\det(A + M) = \det(M(M^{-1}A + I_n)) = \det M \det(M^{-1}A + I_n).$$

Et comme $MA = AM$, on a :

$$AM^{-1} = M^{-1}MAM^{-1} = M^{-1}AMM^{-1} = M^{-1}A.$$

Donc M^{-1} et A commutent et dans ce cas, $(M^{-1}A)^p = (M^{-1})^p A^p = 0_n$.

Alors, d'après la question précédente, $\det(M^{-1}A + I_n) = 1$ et ainsi :

$$\det(A + M) = \det M.$$

Si M n'est pas inversible, de rang $r < n$, il existe $P, Q \in GL_n(\mathbb{C})$ telles que :

$$M = PJQ \text{ avec } J = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r, n-r} \\ 0_{n-r, r} & 0_{n-r} \end{pmatrix}.$$

Alors, si on pose pour tout $k \in \mathbb{N}$, $J_k = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r, n-r} \\ 0_{n-r, r} & \frac{1}{k} I_{n-r} \end{pmatrix}$ et $M_k = PJ_kQ$, on a :

- $J_k \in GL_n(\mathbb{C})$, donc $M_k \in GL_n(\mathbb{C})$ et $\det(A + M_k) = \det M_k$;
- $\lim_{k \rightarrow +\infty} J_k = J$, donc $\lim_{k \rightarrow +\infty} M_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} PJ_kQ = PJQ = M$ (car $N \mapsto PNQ$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$).

Enfin, comme $N \mapsto \det N$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (car polynomiale en les coefficients de N), on a :

$$\det(A+M) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \det(A+M_k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \det M_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k^{n-r}} = 0.$$

Et comme $\det M = 0$ car M n'est pas inversible, on a à nouveau $\det(A+M) = \det M$.

Finalement, dans tous les cas :

$$\det(A+M) = \det M$$

4) Si pose $A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, puis $A = \begin{pmatrix} A' & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & 0_{n-2} \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} M' & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & I_{n-2} \end{pmatrix}$, on a :

- $A'^2 = 0_2$, donc $A^2 = \begin{pmatrix} A'^2 & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & 0_{n-2} \end{pmatrix} = 0_n$;

- $A'M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq M'A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc :

$$AM = \begin{pmatrix} A'M' & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & 0_{n-2} \end{pmatrix} \neq MA = \begin{pmatrix} M'A' & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & 0_{n-2} \end{pmatrix}$$

- $\det M' = 0$, donc $\det M = 0$;

- $\det(A+M) = \det \begin{pmatrix} A'+M' & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & I_{n-2} \end{pmatrix} = \det(A'+M') = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$, donc :

$$\det(A+M) \neq \det M.$$

Ainsi :

Le résultat n'est plus vrai si M ne commute pas avec A .

Exercice 9

1) Soit X un vecteur propre de A associé à λ et $C_0 = (0_{n,1} \mid \cdots \mid 0_{n,1} \mid X)$, la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont toutes les colonnes sont nulles sauf la dernière qui est X . On a :

$$AC_0 - \lambda C_0 = (A - \lambda I_n)C_0 = (0_{n,1} \mid \cdots \mid 0_{n,1} \mid (A - \lambda I_n)X) = (0_{n,1} \mid \cdots \mid 0_{n,1} \mid AX - \lambda X) = 0_n.$$

La matrice $B - \lambda I_n$ n'est pas inversible (car λ est valeur propre de B), donc l'une de ses lignes L_k est combinaison linéaire des autres, $L_k = \sum_{i=1, i \neq k}^n a_i L_i$. Alors, on peut transformer $B - \lambda I_n$:

$$B - \lambda I_n = \begin{pmatrix} \cdots & L_k & \cdots \end{pmatrix} \xrightarrow{L_k \leftarrow L_k - \sum_{i=1, i \neq k}^n a_i L_i} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_k \leftrightarrow L_n} \begin{pmatrix} \cdots & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & \cdots \end{pmatrix}.$$

Réaliser ces deux opérations sur les lignes revient à multiplier $B - \lambda I_n$ à gauche par un produit de matrices d'opérations élémentaires, toutes inversibles, donc à multiplier $B - \lambda I_n$ à gauche par une matrice $P \in GL_n(\mathbb{K})$.

On a donc :

$$P(B - \lambda I_n) = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ et } C_0 P(B - \lambda I_n) = 0_n.$$

Alors, en posant $C = C_0 P \neq 0_n$ (car $C_0 \neq 0_n$ et P inversible), on a :

- $AC - \lambda C = AC_0 P - \lambda C_0 P = (AC_0 - \lambda C_0)P = 0_n P = 0_n$, donc $AC = \lambda C$:
- $CB - \lambda C = C(B - \lambda I_n) = C_0 P(B - \lambda I_n) = 0_n$, donc $CB = \lambda C$.

Ainsi :

Il existe une matrice C de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, non nulle, telle que $AC = CB = \lambda C$.

2) Comme $r = \text{rg}(C)$, il existe $P, Q \in GL_n(\mathbb{C})$ telles que :

$$C = PJQ \text{ avec } J = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r, n-r} \\ 0_{n-r, r} & 0_{n-r} \end{pmatrix}.$$

On a alors :

$$AC = CB \Leftrightarrow APJQ = PJQB \Leftrightarrow P^{-1}APJ = JQBQ^{-1} \Leftrightarrow A'J = JB' \text{ avec } \begin{cases} A' = P^{-1}AP \\ B' = QBQ^{-1} \end{cases}$$

Et, si on pose $A' = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$ et $B' = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$, avec $A_1, B_1 \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$, $A_2, B_2 \in \mathcal{M}_{r, n-r}(\mathbb{K})$, $A_3, B_3 \in \mathcal{M}_{n-r, r}(\mathbb{K})$ et $A_4, B_4 \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{K})$, on a :

$$A'J = JB' \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A_1 & 0_{r, n-r} \\ A_3 & 0_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0_{n-r, r} & 0_{n-r} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = B_1 \\ B_2 = 0_{r, n-r} \\ A_3 = 0_{n-r, r} \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{aligned} A' &= \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0_{n-r, r} & A_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \chi_{A'} = \chi_{A_1} \chi_{A_4} \\ B' &= \begin{pmatrix} B_1 & 0_{r, n-r} \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \chi_{B'} = \chi_{B_1} \chi_{B_4} \end{aligned}$$

Et $A_1 = B_1 \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$, $\chi_{A_1} = \chi_{B_1}$ est un polynôme de degré r qui divise $\chi_{A'}$ et $\chi_{B'}$.

Enfin, $A' = P^{-1}AP$ (resp. $B' = QBQ^{-1}$), donc A et A' (resp. B et B') sont semblables et $\chi_A = \chi_{A'}$ (resp. $\chi_B = \chi_{B'}$), et ainsi, $\chi_{A_1} = \chi_{B_1}$ divise χ_A et χ_B .

Finalement :

Il existe un polynôme de degré r qui divise à la fois χ_A et χ_B .

3) Prenons $r = n$. Dans ce cas, s'il existe un polynôme de degré n qui divise à la fois χ_A et χ_B , alors $\chi_A = \chi_B$.

Et s'il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\text{rg}(C) = n$ et $AC = CB$, alors $C \in GL_n(\mathbb{K})$ et $A = CBC^{-1}$, donc A et B sont semblables.

Or, deux matrices A et B peuvent avoir le même polynôme caractéristique sans être semblables, par exemple :

$$A = I_n \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

On a ici $\chi_A = \chi_B = (X-1)^n$, mais A et B ne sont pas semblables car la seule matrice semblable à la matrice identité I_n est elle-même (et $B \neq I_n$).

Ainsi :

La réciproque de la question précédente est fausse.