Corrigés des TD du chapitre 9

Exercice 1

Il est clair que si $k = f'(a)$ alors $c = a$ convient et si $k = f'(b)$, alors $c = b$ convient.

On considère maintenant *k* tel que $f'(a) < k < f'(b)$.

- Supposons $k = 0$. On a donc $f'(a) < 0 < f'(b)$.

  La fonction *f* est dérivable sur $[a,b]$, donc continue sur $[a,b]$ et comme $[a,b]$ est un segment, *f* admet un minimum atteint en $c \in [a,b]$.

  Mais $f'(a) < 0$ donc $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} < 0$. Ceci implique que $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} < 0$, soit $f(x) < f(a)$, au voisinage de a^+ donc que le minimum de *f* n'est pas atteint en *a* et $c \neq a$.

  De même avec $f'(b) > 0$, on prouve que $c \neq b$.

  Ainsi, *f* atteint un minimum en $c \in \,]a,b[$ donc f' s'annule (et change de signe) en *c*.

- Supposons *k* quelconque tel que $f'(a) < k < f'(b)$.

  Posons $g(x) = f(x) - kx$.

  La fonction *g* est dérivable sur $[a,b]$ et $g'(x) = f'(x) - k$ donc $g'(a) < 0 < g'(b)$. Ainsi, *g* vérifie les hypothèses du cas précédent, donc il existe $c \in \,]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$, ce qui revient à $f'(c) = k$.

Finalement, pour tout $k \in \left[f'(a), f'(b) \right]$:

$$\boxed{\text{Il existe } c \in [a,b] \text{ tel que } f'(c) = k.}$$

Exercice 2

1) On a $[x_{n+1}, x_n] \subset \,]0,1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc *f* est de classe C^1 sur $[x_{n+1}, x_n]$ et on peut appliquer le théorème des accroissements finis : il existe $c_n \in \,]x_{n+1}, x_n[$ tel que $\dfrac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n} = f'(c_n)$ et donc :

$$\left| \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n} \right| = \left| f'(c_n) \right| \leq M .$$

Ceci prouve que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\left| f(x_{n+1}) - f(x_n) \right| \leq M \left| x_{n+1} - x_n \right|}$$

Soient maintenant $n, p \in \mathbb{N}$. On a pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\left| f(x_{k+1}) - f(x_k) \right| \leq M \left| x_{k+1} - x_k \right| = M \left| \frac{1}{2^{k+1}} - \frac{1}{2^k} \right| = \frac{M}{2^{k+1}} .$$

Et si $n \geq 1$:

$$\left| f(x_{n+p}) - f(x_p) \right| = \left| \sum_{k=p}^{n+p-1} \left[f(x_{k+1}) - f(x_k) \right] \right| \leq \sum_{k=p}^{n+p-1} \left| f(x_{k+1}) - f(x_k) \right| \leq \sum_{k=p}^{n+p-1} \frac{M}{2^{k+1}} .$$

Enfin :

$$\sum_{k=p}^{n+p-1}\frac{M}{2^{k+1}}=\frac{M}{2^{p+1}}\frac{1-\dfrac{1}{2^n}}{1-\dfrac{1}{2}}=\frac{M}{2^p}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\leq\frac{M}{2^p}.$$

En remarquant que la relation voulue est immédiatement vraie quand $n=0$, on a bien pour tous $n,p\in\mathbb{N}$:

$$\boxed{\left|f(x_{n+p})-f(x_p)\right|\leq\frac{M}{2^p}}$$

2) En prenant $p=0$ dans l'inégalité ci-dessus, on obtient pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\left|f(x_n)-f(x_0)\right|=\left|f(x_n)-f(1)\right|\leq M \quad\Rightarrow\quad f(1)-M\leq f(x_n)\leq f(1)+M.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La suite } \left(f(x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée.}}$$

3) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\sup\limits_{k\geq n} f(x_k)$ est bien défini car $\left(f(x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée et $u_n=\max\left(f(x_n),u_{n+1}\right)$, donc :

$$u_n\geq u_{n+1}.$$

Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Comme $\left(f(x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est aussi et donc :

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers une limite finie } L.}$$

4) En intervertissant n et p dans le résultat de la question 1, on a pour tous $n,p\in\mathbb{N}$, $\left|f(x_{n+p})-f(x_n)\right|\leq\dfrac{M}{2^n}$.

On peut récrire cela sous la forme : pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout entier $k\geq n$, $\left|f(x_k)-f(x_n)\right|\leq\dfrac{M}{2^n}$.

En passant au sup sur $k\geq n$, on obtient :

$$\left|\sup_{k\geq n} f(x_k)-f(x_n)\right|\leq\frac{M}{2^n}.$$

Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\boxed{\left|u_n-f(x_n)\right|\leq\frac{M}{2^n}}$$

On a alors pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\left|L-f(x_n)\right|=\left|L-u_n+u_n-f(x_n)\right|\leq\left|L-u_n\right|+\left|u_n-f(x_n)\right|\leq\left|L-u_n\right|+\frac{M}{2^n}.$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left|L-u_n\right|+\dfrac{M}{2^n}\right)=0$, donc d'après le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} f(x_n)=L}$$

5) Pour tout $x \in]0,1]$, il existe un unique $N_x \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{2^{N_x+1}} < x \leq \frac{1}{2^{N_x}}$: $N_x = E\left(-\frac{\ln x}{\ln 2}\right)$.

De la même façon que dans la question 1, on prouve qu'il existe $c_x \in \left]x, \frac{1}{2^{N_x}}\right[$ tel que :

$$\frac{f(x)-f(x_{N_x})}{x-x_{N_x}} = f'(c_x) \quad \Rightarrow \quad \left|f(x)-f(x_{N_x})\right| = \left|f'(c_x)\right|\left|x-x_{N_x}\right| \leq \left|f'(c_x)\right|\left|x_{N_x+1}-x_{N_x}\right| \leq \frac{M}{2^{N_x+1}}$$

On a alors :

$$\left|f(x)-L\right| \leq \left|f(x)-f(x_{N_x})\right| + \left|f(x_{N_x})-L\right| \leq \frac{M}{2^{N_x+1}} + \left|f(x_{N_x})-L\right|.$$

Or, quand $x \to 0^+$, $N_x \to +\infty$ donc $f(x_{N_x}) \to L$ et $\frac{M}{2^{N_x+1}} \to 0$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{M}{2^{N_x+1}} + \left|f(x_{N_x})-L\right|\right) = 0$, ce qui à nouveau grâce au théorème des gendarmes, on a :

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = L}$$

Exercice 3

1) Posons $g(x) = \|f(x)\|^2$. Comme *f* est deux fois dérivable sur *I*, *g* l'est aussi avec pour tout $x \in I$:

$$g'(x) = 2\left(f'(x) \mid f(x)\right) \quad \text{et} \quad g''(x) = 2\left[\|f'(x)\|^2 + \left(f''(x) \mid f(x)\right)\right].$$

Or, $\|f\|$ est constante, donc *g* aussi et ainsi, $g' = g'' = 0$, donc pour tout $x \in I$:

$$g''(x) = 2\left[\|f'(x)\|^2 + \left(f''(x) \mid f(x)\right)\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(f''(x) \mid f(x)\right) = -\|f'(x)\|^2 \leq 0.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{Si } \|f\| \text{ est constante, } \left(f \mid f''\right) \text{ est à valeurs négatives.}}$$

Interprétation cinématique :

Si on pose $f(t) = \overrightarrow{OM}$, $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = f'(t)$ est la vitesse et $\vec{a} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = f''(t)$ est l'accélération du mobile *M*.
Si $\|f(t)\| = OM = cste$, le mobile a une trajectoire circulaire.

Dans ce cas, on a $\overrightarrow{OM} \cdot \vec{v} = 0$, le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire circulaire et $\overrightarrow{OM} \cdot \vec{a} \leq 0$ indique que la composante colinéaire à $\overrightarrow{OM}$ de l'accélération $\vec{a}$ est de sens contraire au vecteur $\overrightarrow{OM}$: cela correspond à la force centripète.

2) Tel qu'indiqué, considérons la fonction $g : x \mapsto \|f(x)\|^2 e^{-2kx}$, définie sur *I* et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
Comme *f* est dérivable sur *I*, $x \mapsto \|f(x)\|^2$ l'est aussi de dérivée $x \mapsto 2\left(f'(x) \mid f(x)\right)$. Alors, *g* est dérivable sur *I*, avec pour tout $x \in I$:

$$g'(x) = 2\left(f'(x) \mid f(x)\right)e^{-2kx} - 2k\|f(x)\|^2 e^{-2kx} = 2\left(\left(f'(x) \mid f(x)\right) - k\|f(x)\|^2\right)e^{-2kx}.$$

Or, on a $\|f'(x)\| \leq k\|f(x)\|$ et grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient :

$$\left|\left(f'(x) \mid f(x)\right)\right| \leq \|f'(x)\|.\|f(x)\| \leq k\|f(x)\|^2 \quad \Rightarrow \quad -k\|f(x)\|^2 \leq \left(f'(x) \mid f(x)\right) \leq k\|f(x)\|^2 \quad \textbf{(1)}.$$

Donc, $g'(x) \leq 0$ et g est décroissante sur I.

Si f s'annule en un point $a \in I$, alors $g(a) = \|f(a)\|^2 e^{-2ka} = 0$ et ainsi, pour tout $x \in I$ tel que $x \geq a$, on a $g(x) \leq g(a) = 0$ et comme g est positive, on obtient $g(x) = 0$ et donc :

$$f(x) = 0 \text{ pour tout } x \in I \text{ tel que } x \geq a.$$

Pour montrer que g est nulle à gauche de a aussi, la double inégalité **(1)**, nous invite à considérer la fonction $h : x \mapsto \|f(x)\|^2 e^{2kx}$, qui comme g, est positive et dérivable sur I, avec pour tout $x \in I$:

$$h'(x) = 2\big(f'(x) \mid f(x)\big)e^{2kx} + 2k\|f(x)\|^2 e^{2kx} = 2\Big(\big(f'(x) \mid f(x)\big) + k\|f(x)\|^2\Big)e^{2kx}.$$

Grâce à **(1)**, on a $h'(x) \geq 0$, donc h est croissante sur I et ainsi, pour tout $x \in I$ tel que $x \leq a$, $h(x) \leq h(a) = 0$, ce qui donne $h(x) = 0$ et donc :

$$f(x) = 0 \text{ pour tout } x \in I \text{ tel que } x \leq a.$$

Finalement, on a $f(x) = 0$ pour tout $x \in I$, et ainsi :

$$\boxed{\text{Si la fonction } f \text{ s'annule en un point de } I\text{, alors elle est nulle sur } I.}$$

Exercice 4

1) On a $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{1}{t}\big[f(t) - f(kt)\big]\right) = \ell$ donc :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha > 0,\ \forall\, t \in [-\alpha, \alpha] \setminus \{0\},\ \left\|\frac{1}{t}\big[f(t) - f(kt)\big] - \ell\right\| \leq \varepsilon.$$

Or, $k \in \,]0,1[$, donc pour tout $i \in \mathbb{N}$, $0 < k^i \leq 1$ (égal à 1 pour $i = 0$) et pour tout $t \in [-\alpha, \alpha] \setminus \{0\}$, on a :

$$0 < |t| \leq \alpha \quad \Rightarrow \quad 0 < |k^i t| \leq k^i \alpha \leq \alpha \quad \Rightarrow \quad \left\|\frac{1}{k^i t}\big[f(k^i t) - f(k k^i t)\big] - \ell\right\| \leq \varepsilon.$$

Et finalement, on a bien :

$$\boxed{\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha > 0,\ \forall\, t \in [-\alpha, \alpha] \setminus \{0\},\ \forall\, i \in \mathbb{N},\ \left\|\frac{1}{k^i t}\big[f(k^i t) - f(k^{i+1} t)\big] - \ell\right\| \leq \varepsilon}$$

2) Avec les notations de la question précédente, on a pour tout $t \in [-\alpha, \alpha] \setminus \{0\}$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\left\|\sum_{i=0}^{p-1}\left(\frac{1}{t}\big[f(k^i t) - f(k^{i+1} t)\big] - k^i \ell\right)\right\| \leq \sum_{i=0}^{p-1}\left\|\frac{1}{t}\big[f(k^i t) - f(k^{i+1} t)\big] - k^i \ell\right\| \leq \sum_{i=0}^{p-1} \varepsilon k^i = \varepsilon \sum_{i=0}^{p-1} k^i.$$

Or :

$$\sum_{i=0}^{p-1}\left(\frac{1}{t}\big[f(k^i t) - f(k^{i+1} t)\big] - k^i \ell\right) = \frac{1}{t}\sum_{i=0}^{p-1}\big[f(k^i t) - f(k^{i+1} t)\big] - \left(\sum_{i=0}^{p-1} k^i\right)\ell = \frac{1}{t}\big[f(t) - f(k^p t)\big] - \left(\sum_{i=0}^{p-1} k^i\right)\ell.$$

Avec $\sum\limits_{i=0}^{p-1} k^i = \frac{1-k^p}{1-k}$, on obtient :

$$\left\|\frac{1}{t}\big[f(t) - f(k^p t)\big] - \frac{1-k^p}{1-k}\ell\right\| \leq \frac{1-k^p}{1-k}\varepsilon.$$

Or, $\lim\limits_{p\to+\infty} k^p = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$, donc en passant à la limite quand $p \to +\infty$ dans l'inégalité ci-dessus (qui est vraie quel que soit *p*), on obtient :

$$\left\| \frac{1}{t}\left[f(t)-f(0)\right] - \frac{1}{1-k}\ell \right\| \leq \frac{1}{1-k}\varepsilon.$$

Ainsi, avec $K = \dfrac{1}{1-k} > 0$, on a :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha > 0,\ \forall\, t \in [-\alpha, \alpha] \setminus \{0\},\ \left\| \frac{1}{t}\left[f(t)-f(0)\right] - \frac{1}{1-k}\ell \right\| \leq K\varepsilon$$

Ceci prouve que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{t}\left[f(t)-f(0)\right] = \dfrac{1}{1-k}\ell$ et donc que :

$$\boxed{f \text{ est dérivable en 0 avec } f'(0) = \frac{1}{1-k}\ell.}$$

Exercice 5

Dans ce qui suit, on munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique, et orienté par sa base canonique, notée $\mathcal{B}_c = (E_1, E_2, \dots, E_n)$ et on appelle *u* l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à *A*.

On note $X = (x_i)_{1\leq i\leq n}$ où les x_i sont des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On notera et S l'espace vectoriel de ses solutions de $(S): X' = AX$.

a. *A* est une matrice de projection orthogonale sur un plan *F* (avec $n \geq 3$).

Il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (V_1, V_2, \dots, V_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $F = \mathrm{Vect}(V_1, V_2)$.

Avec $P = P_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{B}} \in O_n(\mathbb{R})$, on a alors :

$$M_{\mathcal{B}}(u) = D = diag\left(1, 1, 0, \dots, 0\right) = P^{\top}AP \quad \Leftrightarrow \quad A = PDP^{\top}.$$

Si on pose $Y = P^{\top}X = (y_i)_{1\leq i\leq n}$, on a :

$$X' = AX \quad \Leftrightarrow \quad X' = PDP^{\top}X \quad \Leftrightarrow \quad P^{\top}X' = DP^{\top}X \quad \Leftrightarrow \quad Y' = DY \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y'_1 = y_1 \\ y'_2 = y_2 \\ y'_k = 0, \forall\, k \in [\![3, n]\!] \end{cases}$$

Et on obtient, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} y_1(t) = c_1 e^t \\ y_2(t) = c_2 e^t \\ y_k = c_k, \forall\, k \in [\![3, n]\!] \end{cases}$$

avec $(c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$.

Avec $X = PY$, on aboutit à :

$$\boxed{S = \mathrm{Vect}\left(t \mapsto e^t V_1, t \mapsto e^t V_2, t \mapsto V_3, \dots, t \mapsto V_n\right)}$$

b. Si A est une nilpotente d'indice n, alors $A^{n-1} \neq 0_n$ (et $A^n = 0_n$), donc il existe $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $A^{n-1}X_0 \neq 0$ et $A^n X_0 = 0$. La famille $\mathcal{B} = \left(X_0, AX_0, A^2X_0, \dots, A^{n-1}X_0\right)$ est alors une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et dans cette base $\mathcal{B}$, la matrice de u est alors :

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En procédant comme dans la question précédente, avec $P = P_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{B}}$ et $Y = P^{-1}X$, on obtient le système :

$$\begin{cases} y'_1 = 0 \\ y'_k = y_{k-1}, \forall\, k \in [\![2, n]\!] \end{cases}$$

Ceci donne pour tous $k \in [\![1, n]\!]$ et $t \in \mathbb{R}$:

$$y_k(t) = c_1 t^{k-1} + \dots + c_{k-1}t + c_k = \sum_{i=1}^{k} c_i t^{k-i}$$

avec $(c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$.

Et, avec $X = PY$, on obtient pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$X(t) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k} c_i t^{k-i}\right)A^{k-1}X_0 = \sum_{i=1}^{n}\left(c_i \sum_{k=i}^{n} t^{k-i}A^{k-1}X_0\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(c_i \sum_{k=0}^{n-i} t^k A^{k+i-1}X_0\right).$$

Ce qui nous donne :

$$\boxed{S_{(H)} = \mathrm{Vect}\left(t \mapsto \sum_{k=0}^{n-i} t^k A^{k+i-1}X_0,\, i \in [\![1, n]\!]\right)}$$

Exercice 6

Remarquons que $\vec{v} = (1, 1, 0)$ est orthogonale à $\vec{u}$, donc si $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = 2(-1, 1, 1)$, $(\vec{v}, \vec{w})$ est une base orthogonale de $P = (\vec{u})^{\perp}$.

Soit $\vec{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ une éventuelle solution de $\vec{f}\,' \wedge \vec{u} = \vec{f}$. On a alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\vec{f}(t) \in P$ donc :

$$\vec{f}(t) = x(t)\vec{v} + y(t)\vec{w}$$

où x et y sont deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (car $\vec{f}$ l'est).

Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\vec{f}\,'(t) \wedge \vec{u} = \vec{f}(t) \iff -x'(t)\vec{w} + 6y'(t)\vec{v} = x(t)\vec{v} + y(t)\vec{w} \iff \begin{cases} x'(t) = -y(t) \\ y'(t) = \dfrac{1}{6}x(t) \end{cases}$$

Comme où x et y sont dérivables sur $\mathbb{R}$, x' et y' le sont aussi et en dérivant la première équation, on obtient :

$$x''(t) = -y'(t) = -\frac{1}{6}x(t).$$

Alors, $x(t) = a\cos\left(\dfrac{t}{\sqrt{6}}\right) + b\sin\left(\dfrac{t}{\sqrt{6}}\right)$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $y(t) = -x'(t) = \dfrac{a}{\sqrt{6}}\sin\left(\dfrac{t}{\sqrt{6}}\right) - \dfrac{b}{\sqrt{6}}\cos\left(\dfrac{t}{\sqrt{6}}\right)$.

Ainsi, pour tout $t\in\mathbb{R}$:

$$\vec{f}(t)=\left(a\cos\left(\frac{t}{\sqrt{6}}\right)+b\sin\left(\frac{t}{\sqrt{6}}\right)\right)\vec{v}+\left(\frac{a}{\sqrt{6}}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{6}}\right)-\frac{b}{\sqrt{6}}\cos\left(\frac{t}{\sqrt{6}}\right)\right)\vec{w}$$
$$=a\left[\cos\left(\frac{t}{\sqrt{6}}\right)\vec{v}+\frac{1}{\sqrt{6}}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{6}}\right)\vec{w}\right]+b\left[\sin\left(\frac{t}{\sqrt{6}}\right)\vec{v}-\frac{1}{\sqrt{6}}\cos\left(\frac{t}{\sqrt{6}}\right)\vec{w}\right].$$

Réciproquement, on montre que les fonctions ci-dessus sont bien solution de l'équation et ainsi :

$$\boxed{S_{(H)}=\mathrm{Vect}\left(\cos\left(\frac{t}{\sqrt{6}}\right)\vec{v}+\frac{1}{\sqrt{6}}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{6}}\right)\vec{w},\sin\left(\frac{t}{\sqrt{6}}\right)\vec{v}-\frac{1}{\sqrt{6}}\cos\left(\frac{t}{\sqrt{6}}\right)\vec{w}\right)\text{ avec }\vec{v}=(1,1,0)\text{ et }\vec{w}=2(-1,1,1).}$$

Exercice 7

Supposons que $y''+a(t)y'+b(t)y=0$ admet deux solutions y_1 et y_2 telles que pour tout $t\in I$, $y_2(t)=t\,y_1(t)$.

Alors, pour tout $t\in I$:

$$\begin{cases} y'_2(t)=t\,y'_1(t)+y_1(t)\\ y''_2(t)=t\,y''_1(t)+2y'_1(t)\end{cases}$$

D'où :

$$y''_2(t)+a(t)y'_2(t)+b(t)y_2(t)=t\left[y''_1(t)+a(t)y'_1(t)+b(t)y_1(t)\right]+2y'_1(t)+a(t)y_1(t)=2y'_1(t)+a(t)y_1(t)$$

Comme $y''_2+ay'_2+by_2=0$, on obtient :

$$2y'_1+ay_1=0.$$

Comme a est de classe C^1 sur I, on peut dériver la relation ci-dessus et on obtient :

$$2y''_1+a'y_1+ay'_1=0.$$

Et, avec $2y'_1+ay_1=0$, soit $2y'_1=-ay_1$, et $y''_1+ay'_1+by_1=0$, on peut écrire :

$$\left.\begin{array}{l} 2y''_1+a'y_1+ay'_1=0\\ y''_1+ay'_1+by_1=0\\ 2y'_1=-ay_1\end{array}\right\}\quad\Rightarrow\quad a^2y_1+2a'y_1=4by_1.$$

Comme y_1 n'est pas nulle sur I mais y est continue, il existe au moins un intervalle $J\subset I$, non réduit à un point, sur lequel y_1 ne s'annule pas. On obtient alors $a^2+2a'=4b$ sur J.

Finalement, une condition nécessaire sur a et b pour que l'équation $y''+a(t)y'+b(t)y=0$ admette deux solutions non nulles y_1 et y_2 telles que pour tout $t\in I$, $y_2(t)=t\,y_1(t)$ est :

$$\boxed{a^2+2a'=4b\text{ sur tout intervalle inclus dans } I \text{ sur lequel } y_1 \text{ ne s'annule pas.}}$$

Supposons que $a^2+2a'=4b$. L'équation se récrit alors :

$$y''+ay'+\frac{1}{4}(a^2+2a')y=0.$$

Posons $z=y'+\frac{1}{2}ay$. On a alors (avec $y''=-ay'-\frac{1}{4}a^2y-\frac{1}{2}a'y$) :

$$z'=y''+\frac{1}{2}ay'+\frac{1}{2}a'y=-ay'-\frac{1}{4}a^2y-\frac{1}{2}a'y+\frac{1}{2}ay'+\frac{1}{2}a'y=-\frac{1}{2}a\left(y'+\frac{1}{2}ay\right)=-\frac{1}{2}az.$$

Donc z est solution de $z'+\frac{1}{2}az=0$, soit, si A est une primitive de a sur I :

$$z:t\mapsto Ke^{-\frac{1}{2}A(t)} \quad \text{avec } K \text{ constante.}$$

Alors, z est solution de $y'+\frac{1}{2}a(t)y=Ke^{-\frac{1}{2}A(t)}$. Les solutions le l'équation sans second membre sont les fonctions $z:t\mapsto Ce^{-\frac{1}{2}A(t)}$ avec C constante.

On cherche une solution particulière de la forme $t\mapsto C(t)e^{-\frac{1}{2}A(t)}$ avec C dérivable sur I. En réinjectant dans l'équation, on obtient $C'(t)=K$ et on peut prendre $C(t)=Kt$.

Ainsi, $t\mapsto e^{-\frac{1}{2}A(t)}$ et $t\mapsto te^{-\frac{1}{2}A(t)}$ sont toutes deux solutions de $y''+ay'+\frac{1}{4}(a^2+2a')y=0$ et ainsi :

$$\boxed{\text{La condition est suffisante.}}$$

Soient (E): $y''+2ty'+(t^2+1)y=te^{-t^2/2}$ et (H): $y''+2ty'+(t^2+1)y=0$.

Posons $a(t)=2t$ et $b(t)=t^2+1$. Les fonctions a et b sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t\in\mathbb{R}$:

$$a(t)^2+2a'(t)-4b(t)=4t^2+4-4t^2-4=0.$$

La condition ci-dessus est satisfaite. En posant, $A(t)=t^2$, une base de solutions de (H) est :

$$\left(t\mapsto e^{-t^2/2}, t\mapsto te^{-t^2/2}\right).$$

Cherchons une solution particulière de (E) de la forme $t\mapsto g(t)e^{-t^2/2}$ où g est deux dérivable sur $\mathbb{R}$.

En réinjectant dans (E), on obtient pour tout $t\in\mathbb{R}$:

$$g''(t)e^{-t^2/2}-2tg'(t)e^{-t^2/2}-g(t)e^{-t^2/2}+t^2g(t)e^{-t^2/2}+2tg'(t)e^{-t^2/2}-2t^2g(t)e^{-t^2/2}+(t^2+1)g(t)e^{-t^2/2}=te^{-t^2/2}.$$

Soit :

$$g''(t)=t.$$

On peut prendre $g(t)=\frac{1}{6}t^3$ et une solution particulière est $t\mapsto\frac{1}{6}t^3e^{-t^2/2}$.

Finalement :

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sont les fonctions } t\mapsto\left(\frac{1}{6}t^3+\alpha t+\beta\right)e^{-t^2/2} \text{ avec } (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2.}$$

Exercice 8

Les fonctions h_1 et h_2 étant solutions de (E) sur I, elles sont deux fois dérivables sur cet intervalle, donc $W=h_1h_2'-h_1'h_2$ est dérivable sur I en tant que différence de telles fonctions et :

$$W'=\left(h_1h_2'-h_1'h_2\right)'=h_1'h_2'+h_1h_2''-h_1'h_2'-h_1''h_2=h_1h_2''-h_1''h_2.$$

Or, $h_1''=-ah_1'-bh_1$ et $h_2''=-ah_2'-bh_2$, donc :

$$W'=h_1\left(-ah_2'-bh_2\right)-\left(-ah_1'-bh_1\right)h_2=-ah_1h_2'-bh_1h_2+ah_1'h_2+bh_1h_2=a\left(h_1'h_2-h_1h_2'\right).$$

Soit $W' = -aW$ et donc, W est solution de $y' + ay = 0$. Alors, si A est la primitive de a qui s'annule en $t_0 \in I$, on a pour tout $t \in I$:

$$W(t) = W(t_0)e^{-A(t)}.$$

Ceci prouve immédiatement l'équivalence :

$$\boxed{\left(\exists t_0 \in I, W(t_0) \neq 0\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\forall t \in I, W(t) \neq 0\right)}$$

Supposons maintenant que la famille (h_1, h_2) est liée. Alors, si h_1 est nulle, on a $W(t) = 0$ pour tout $t \in I$, et si h_1 n'est pas nulle, alors il existe une constante k telles que $h_2 = kh_1$ et $W = h_1h_2' - h_1'h_2 = h_1(kh_1') - h_1'(kh_1) = 0$. Ainsi, si (h_1, h_2) est liée, alors $W = 0$.

Supposons enfin que $W = 0$. Si h_1 est nulle, alors (h_1, h_2) est liée.

Si h_1 n'est pas nulle, alors il existe $t_0 \in I$ tel que $h_1(t_0) \neq 0$. Comme h_1 est continue sur *I*, elle ne s'annule pas au voisinage de t_0. Soit alors *J* un intervalle ouvert inclus dans *I*, contenant t_0 et tel quel h_1 ne s'annule pas sur *J*. On a alors sur *J* :

$$\frac{W}{h_1^2} = \frac{h_1h_2' - h_1'h_2}{h_1^2} = \left(\frac{h_2}{h_1}\right)'.$$

Alors, si *W* est nulle sur *I*, donc sur *J*, on a $\left(\frac{h_2}{h_1}\right)' = 0$, donc $\frac{h_2}{h_1}$ est constante sur *J*, autrement dit, il existe un scalaire *k* tel que $h_2 = kh_1$ sur *J*.

Considérons maintenant un point $t_1 \in I$ tel que $h_1(t_1) = 0$ (s'il en existe). Alors, on a $h_1'(t_1) \neq 0$, car sinon h_1 serait nulle comme unique solution du problème de Cauchy $\begin{cases} y'' + ay' + by = 0 \\ h_1(t_1) = h_1'(t_1) = 0 \end{cases}$. Comme h_1 est deux fois dérivable sur *I*, elle y est de classe C^1 et par continuité, h_1' reste de signe constant strict au voisinage de t_1, donc h_1 est strictement monotone au voisinage de t_1, donc ne s'annule pas au voisinage de t_1 (mais, par hypothèse ici, s'annule en t_1).

D'après ce qui précède, ceci veut dire que $h_2 = k_+h_1$ et $h_2 = k_-h_1$ au voisinage de t_1^+ et t_1^- respectivement.

Alors, $h_2' = k_+h_1'$ et $h_2' = k_-h_1'$ au voisinage de t_1^+ et t_1^-, et comme $h_1'(t_1) \neq 0$ on a par continuité de h_1' et h_2' en t_1, on obtient $\frac{h_2'(t_1)}{h_1'(t_1)} = k_+ = k_-$. Ainsi, $h_2 = kh_1$ au voisinage de t_1.

Finalement, ceci permet de conclure qu'il existe un scalaire k tel que $h_2 = kh_1$ sur *I* et donc que la famille (h_1, h_2) est liée.

Nous venons donc de prouver que :

$$\left((h_1, h_2) \text{ est liée}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\forall t \in I, W(t) = 0\right).$$

Par contraposée :

$$\boxed{\left((h_1, h_2) \text{ est libre}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\exists t_0 \in I, W(t_0) \neq 0\right)}$$

Exercice 9

Posons $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\dbinom{2n}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \frac{\frac{1}{2n+1}\binom{2n+2}{n+1}}{\frac{1}{2n-1}\binom{2n}{n}}|x| = \frac{2n-1}{2n+1}\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}|x| = 2\frac{2n-1}{n+1}|x| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 4|x|.$$

D'après la règle de d'Alembert, la série converge quand $4|x|<1$ et diverge quand $4|x|>1$, donc :

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence de } f \text{ est } \frac{1}{4}.}$$

La série entière *f* est alors de classe C^∞ sur $I = \left]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right[$ et pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\binom{2n}{n}nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\binom{2(n+1)}{n+1}(n+1)x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\binom{2n}{n}(n+1)x^n = 2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\binom{2n}{n}x^n \end{aligned}$$

Mais, on peut aussi écrire :

$$2xf'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n}{2n-1}\binom{2n}{n}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n}{2n-1}\binom{2n}{n}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)\binom{2n}{n}x^n .$$

Comme on vient de voir que $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\binom{2n}{n}x^n$ converge, on obtient, avec le résultat précédent :

$$2xf'(x) = f(x) - \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\binom{2n}{n}x^n = f(x) - \frac{1}{2}f'(x).$$

Ainsi, pour tout $x \in I$, $(4x+1)f'(x) - 2f(x) = 0$, donc *f* est solution sur *I* de :

$$(E):\ (4x+1)y' - 2y = 0.$$

Pour tout $x \in I$, $4x+1 \neq 0$, donc l'équation se récrit $y' - \frac{2}{4x+1}y = 0$ et les solutions sont de la forme :

$$x \mapsto K\exp\left(\int^x \frac{2}{4t+1}dt\right) = K\exp\left(\frac{1}{2}(4x+1)\right) = K\sqrt{4x+1}.$$

De plus, avec $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\binom{2n}{n}x^n$, on a $f(0) = \frac{-1}{-1} = 1$, donc, pour tout $x \in \left]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right[$:

$$\boxed{f(x) = \sqrt{4x+1}}$$

A l'aide de la formule de Stirling, on peut écrire :

$$\frac{1}{2n-1}\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n} = \frac{1}{2n-1}\frac{(2n)!}{(n!)^2}\frac{1}{4^n} \sim \frac{1}{2n}\frac{\sqrt{4\pi n}}{2\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\left(\frac{e}{n}\right)^{2n}\frac{1}{4^n} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\,n^{1,5}}.$$

Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{1,5}}$ converge ($1,5>1$), la série $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}$ est absolument convergente. Ceci implique que la convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\binom{2n}{n}x^n$ est normale sur $\left[-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right]$ et donc que *f* est définie et continue sur ce segment et, entre autres, en $\frac{1}{4}$. Alors :

$$f\left(\frac{1}{4}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}=\sqrt{4\frac{1}{4}+1}=\sqrt{2}\,.$$

Par ailleurs, on a vu plus haut que pour tout entier naturel *n*, on a :

$$\binom{2(n+1)}{n+1}=\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\binom{2n}{n}=2\frac{2n+1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Donc, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\frac{(-1)^n}{2n+1}\binom{2(n+1)}{n+1}\frac{1}{4^{n+1}}=\frac{(-1)^n}{2n+1}2\frac{2n+1}{n+1}\binom{2n}{n}\frac{1}{4^{n+1}}=\frac{1}{2}\frac{(-1)^n}{n+1}\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}\,.$$

Et, pour tout $N\in\mathbb{N}$:

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{n+1}\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}=\sum_{n=0}^{N}2\frac{(-1)^n}{2n+1}\binom{2(n+1)}{n+1}\frac{1}{4^{n+1}}=2\sum_{n=1}^{N+1}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}=2\sum_{n=0}^{N+1}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}-2\,.$$

Comme la série $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}$ converge, la série $\sum \frac{(-1)^{n}}{n+1}\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}$ converge aussi et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}=2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}-2\,.$$

Soit finalement :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}=2(\sqrt{2}-1)}$$

Exercice 10

1) Comme $\mathrm{Re}(\alpha)>0$, on a $\alpha\neq 0$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f'(x)+\alpha f(x)\right]=\ell$, pour tout réel $\varepsilon>0$, il existe $A_1\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $x\in[A_1,+\infty[$:

$$\left|f'(x)+\alpha f(x)-\ell\right|\leq\varepsilon\quad\Leftrightarrow\quad\left|e^{\alpha x}f'(x)+\alpha e^{\alpha x}f(x)-\ell e^{\alpha x}\right|\leq\varepsilon\left|e^{\alpha x}\right|=\varepsilon\, e^{\mathrm{Re}(\alpha)x}\,.$$

Alors, pour tout $x\in[A,+\infty[$:

$$\left|\int_{A_1}^{x}\left(e^{\alpha t}f'(t)+\alpha e^{\alpha t}f(t)-\ell e^{\alpha t}\right)dt\right|\leq\int_{A_1}^{x}\left|e^{\alpha t}f'(t)+\alpha e^{\alpha t}f(t)-\ell e^{\alpha t}\right|dt\leq\int_{A_1}^{x}\varepsilon\, e^{\mathrm{Re}(\alpha)t}dt\,.$$

Soit :

$$\left|e^{\alpha x}f(x)-\frac{\ell}{\alpha}e^{\alpha x}-e^{\alpha A_1}f(A)+\frac{\ell}{\alpha}e^{\alpha A_1}\right|\leq\varepsilon\frac{e^{\mathrm{Re}(\alpha)x}-e^{\mathrm{Re}(\alpha)A_1}}{\mathrm{Re}(\alpha)}\leq\frac{\varepsilon}{\mathrm{Re}(\alpha)}e^{\mathrm{Re}(\alpha)x}\,.$$

Ceci implique que :

$$\left| f(x) - \frac{\ell}{\alpha} - B\,e^{-\alpha x} \right| \leq \frac{\varepsilon}{\mathrm{Re}(\alpha)}$$

avec $B = e^{\alpha A_1}\left(f(A_1) - \dfrac{\ell}{\alpha} \right)$.

Alors, pour tout $x \in [A_1, +\infty[$:

$$\left| f(x) - \frac{\ell}{\alpha} \right| = \left| f(x) - \frac{\ell}{\alpha} - B\,e^{-\alpha x} + B\,e^{-\alpha x} \right| \leq \left| f(x) - \frac{\ell}{\alpha} - B\,e^{-\alpha x} \right| \leq \frac{\varepsilon}{\mathrm{Re}(\alpha)} + |B|\,e^{-\mathrm{Re}(\alpha)x}.$$

Or, comme $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} |B|\,e^{-\mathrm{Re}(\alpha)x} = 0$ et donc, il existe $A_2 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in [A_2, +\infty[$:

$$|B|\,e^{-\mathrm{Re}(\alpha)x} \leq \frac{\varepsilon}{\mathrm{Re}(\alpha)}.$$

Finalement, en posant $A = \max(A_1, A_2)$, on a pour tout $x \in [A, +\infty[$:

$$\left| f(x) - \frac{\ell}{\alpha} \right| \leq \frac{2\varepsilon}{\mathrm{Re}(\alpha)}.$$

Ceci prouve que :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\ell}{\alpha}}$$

2) Cherchons $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $f'' + f' + f = (f' + af)' + b(f' + af)$.

Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$, on a $(f' + af)' + b(f' + af) = f'' + (a+b)f' + ab f$, donc pour $a + b = ab = 1$, on a la relation voulue.

Or, si a et b vérifient $a + b = ab = 1$, ils sont racines de $X^2 - X + 1$, donc valent $\alpha = e^{i\pi/3}$ ou $\overline{\alpha} = e^{-i\pi/3}$.

On a alors :

$$f'' + f' + f = (f' + \alpha f)' + \overline{\alpha}(f' + \alpha f).$$

Et, comme $\mathrm{Re}(\alpha) = \mathrm{Re}(\overline{\alpha}) = \dfrac{1}{2} > 0$, on peut appliquer deux fois la question précédente :

$$\lim_{+\infty}\left[f'' + f' + f \right] = \lim_{+\infty}\left[(f' + \alpha f)' + \overline{\alpha}(f' + \alpha f) \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{+\infty} (f' + \alpha f)' = \frac{0}{\overline{\alpha}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to +\infty} f = \frac{0}{\overline{\alpha}} = 0.$$

Ainsi :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0}$$

3) Nous allons faire une preuve par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ en utilisant le même principe que ci-dessus.

- Pour $n = 1$, soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\lim\limits_{+\infty}\left[f' + \alpha f \right] = 0$ où toutes les racines de $P = X + \alpha \in \mathbb{C}[X]$ ont une partie réelle strictement négative, autrement dit ici : $\mathrm{Re}(-\alpha) < 0$, soit $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$.

  D'après la question 1, on a immédiatement $\lim\limits_{+\infty} f = 0$: la propriété est vraie au rang $n = 1$.

- On suppose la propriété vraie à un rang $n\in\mathbb{N}^*$.

  Soit $f\in C^{n+1}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\lim\limits_{+\infty}\left[f^{(n+1)}+\alpha_n f^{(n)}+\alpha_{n-1}f^{(n-1)}+...+\alpha_1 f'+\alpha_0 f\right]=0$ où les α_k sont des nombres complexes tels que toutes les racines de $P=X^{n+1}+\alpha_n X^n+...+\alpha_1 X+\alpha_0$ ont une partie réelle strictement négative.

  Soit $-\alpha$ une racine de *P*. On a alors $\mathrm{Re}(-\alpha)<0$, donc $\mathrm{Re}(\alpha)>0$ et :

$$\begin{aligned}P&=\left(X+\alpha\right)\left(X^n+\beta_{n-1}X^{n-1}+...+\beta_1 X+\beta_0\right)\\&=X^{n+1}+(\alpha+\beta_{n-1})X^n+(\alpha\beta_{n-1}+\beta_{n-2})X^{n-1}+...+(\alpha\beta_1+\beta_0)X+\alpha\beta_0\\&=X^{n+1}+\alpha_n X^n+...+\alpha_1 X+\alpha_0\end{aligned}$$

  Et toutes les racines de $X^n+\beta_{n-1}X^{n-1}+...+\beta_1 X+\beta_0$ sont des racines de *P*, donc ont une partie réelle strictement négative.

  Posons $g=f^{(n)}+\beta_{n-1}f^{(n-1)}+...+\beta_1 f'+\beta_0 f$. On a alors :

$$\begin{aligned}g'+\alpha g&=f^{(n+1)}+\beta_{n-1}f^{(n)}+...+\beta_1 f''+\beta_0 f'+\alpha f^{(n)}+\alpha\beta_{n-1}f^{(n-1)}+...+\alpha\beta_1 f'+\alpha\beta_0 f\\&=f^{(n+1)}+(\beta_{n-1}+\alpha)f^{(n)}+(\beta_{n-2}+\alpha\beta_{n-1})f^{(n)}+...+(\beta_1+\alpha\beta_2)f''+(\beta_0+\alpha\beta_1)f'+\alpha\beta_0 f\\&=f^{(n+1)}+\alpha_n f^{(n)}+\alpha_{n-1}f^{(n-1)}+...+\alpha_1 f'+\alpha_0 f\end{aligned}$$

  Donc, $\lim\limits_{+\infty}\left[g'+\alpha g\right]=0$ et comme $\mathrm{Re}(\alpha)>0$, on a $\lim\limits_{+\infty}g=0$ d'après la question 1.

  Ainsi, $\lim\limits_{+\infty}\left[f^{(n)}+\beta_{n-1}f^{(n-1)}+...+\beta_1 f'+\beta_0 f\right]=0$ et toutes les racines de $X^n+\beta_{n-1}X^{n-1}+...+\beta_1 X+\beta_0$ ont une partie réelle strictement négative, donc d'après l'hypothèse de récurrence, on a $\lim\limits_{+\infty}f=0$: la propriété est vraie au rang $n+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Ainsi, si *f* est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ (avec $n\in\mathbb{N}^*$) telle que $\lim\limits_{+\infty}\left[f^{(n)}+\alpha_{n-1}f^{(n-1)}+...+\alpha_1 f'+\alpha_0 f\right]=0$ où les racines de $P=X^n+\alpha_{n-1}X^{n-1}+...+\alpha_1 X+\alpha_0\in\mathbb{C}[X]$ ont toutes une partie réelle strictement négative, alors :

$$\boxed{\lim_{+\infty}f=0}$$

Exercice 11

1) Remarquons préalablement que pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$ et tout $t\in\mathbb{R}^*$, on a $\left|t\cos\left(\frac{\alpha}{t}\right)\right|\leq|t|$ et $\left|t\sin\left(\frac{\alpha}{t}\right)\right|\leq|t|$, donc :

$$\lim_{t\to0}\left[t\cos\left(\frac{\alpha}{t}\right)\right]=\lim_{t\to0}\left[t\sin\left(\frac{\alpha}{t}\right)\right]=0.$$

La fonction $f:(x,y)\mapsto\begin{cases}y^2\sin\left(\dfrac{x}{y}\right)&\text{si }y\neq0\\0&\text{si }y=0\end{cases}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(a,0),a\in\mathbb{R}\}$ en tant que produit de telles fonctions avec pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $y\neq0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y\cos\left(\frac{x}{y}\right)\quad\text{et}\quad\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y\sin\left(\frac{x}{y}\right)-x\cos\left(\frac{x}{y}\right).$$

Soit $a \in \mathbb{R}$.

- $\lim_{x \to a} \frac{f(x,0)-f(a,0)}{x-a} = \lim_{x \to a} 0 = 0$, donc $\frac{\partial f}{\partial x}(a,0)$ existe et vaut 0.
- $\lim_{y \to 0} \frac{f(a,y)-f(a,0)}{y} = \lim_{y \to 0} \left[y \sin\left(\frac{a}{y}\right) \right] = 0$, donc $\frac{\partial f}{\partial y}(a,0)$ existe et vaut 0.

Ainsi, *f* admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.

Soit $a \in \mathbb{R}^*$.

A l'aide de ce que l'on vu en introduction, on a :

- $\lim_{(x,y) \to (a,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(a,0)$, donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(a,0)$;
- $\lim_{(x,y) \to (a,0)} 2y \sin\left(\frac{x}{y}\right) = 0$, mais $x \cos\left(\frac{x}{y}\right)$ n'admet pas de limite quand $(x,y) \to (a,0)$, donc $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'admet pas de limite quand $(x,y) \to (a,0)$.

Ainsi, *f* n'est pas de classe C^1 en $(a,0)$ quand $a \in \mathbb{R}^*$.

Par contre, $\lim_{(x,y) \to (0,0)} y \cos\left(\frac{x}{y}\right) = \lim_{(x,y) \to (0,0)} 2y \sin\left(\frac{x}{y}\right) = \lim_{(x,y) \to (0,0)} x \cos\left(\frac{x}{y}\right) = 0$, donc :

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \quad \text{et} \quad \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

Ainsi, *f* est de classe C^1 en $(0,0)$.

Finalement :

$$\boxed{f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \cup \{(0,0)\}, \text{ mais pas plus.}}$$

Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ existe, c'est la dérivée de $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ en 0. Or, la fonction $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ n'est pas définie, donc :

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \text{ n'existe pas.}}$$

Si $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existe, c'est la dérivée de $y \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = y$ en 0, soit 1. Donc :

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \text{ existe est vaut 1.}}$$

2) La fonction sh étant une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on a :

$$\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y.$$

La fonction *f* est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ où Δ est la première bissectrice (d'équation $x = y$) en tant que quotient de telles fonctions.

De plus, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\Delta$:

$$f(x,y)=\frac{\sin x-\sin y}{\operatorname{sh}x-\operatorname{sh}y}=\frac{2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}{2\operatorname{ch}\left(\frac{x+y}{2}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{x-y}{2}\right)}=\frac{\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{x+y}{2}\right)}\frac{\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{x-y}{2}\right)}=\phi\left(\frac{x+y}{2}\right)\varphi\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

avec $\phi(t)=\dfrac{\cos t}{\operatorname{ch}t}$ et $\varphi(t)=\dfrac{\sin t}{\operatorname{sh}t}$.

Remarquons que les fonctions ϕ et φ sont toutes deux des fonctions d'une seule variable réelle et on a :

- Les fonctions $(x,y)\mapsto\dfrac{x+y}{2}$ et $(x,y)\mapsto\dfrac{x-y}{2}$ sont polynomiales, donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
- La fonction ϕ est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (la fonction ch ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$).
- La fonction φ est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ (la fonction sh ne s'annulant qu'en 0).

  De plus, en 0, on a $\varphi(t)\underset{0}{\sim}1$ donc φ est prolongeable par continuité en 0 en posant $\varphi(0)=1$.

  Pour tout $t\in\mathbb{R}^*$, $\varphi'(t)=\dfrac{\cos t\operatorname{sh}t-\sin t\operatorname{ch}t}{\operatorname{sh}^2 t}$ et, au voisinage de 0, on a $\varphi'(t)=\dfrac{o(t^2)}{t^2+o(t^2)}=\dfrac{o(1)}{1+o(1)}$, donc φ' admet une limite finie en 0 (qui est 0) et le prolongement de φ est de classe C^1 en 0, donc sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, par composition, $(x,y)\mapsto\phi\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et $(x,y)\mapsto\varphi\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$ est prolongeable en une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et finalement :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ admet un prolongement de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^2.}$$

Exercice 12

1) Soit $P=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k\in\mathbb{R}_n[X]$, on a:

$$f(P)=\int_0^1 P^2=\int_0^1\left(\sum_{k=0}^{n}a_kt^k\right)^2dt=\int_0^1\left(\sum_{0\le i,j\le n}a_ia_jt^{i+j}\right)dt=\sum_{0\le i,j\le n}a_ia_j\int_0^1 t^{i+j}dt=\sum_{0\le i,j\le n}\frac{1}{i+j+1}a_ia_j\,.$$

Ainsi, *f* est polynômiale sur $\mathbb{R}_n[X]$ donc :

$$\boxed{f \text{ est différentiable sur } \mathbb{R}_n[X].}$$

Pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, on a :

$$f(P)=\sum_{\substack{0\le i,j\le n\\ i,j\ne k}}\frac{1}{i+j+1}a_ia_j+2\sum_{\substack{i=0\\ i\ne k}}^{n}\frac{1}{i+k+1}a_ia_k+\frac{1}{2k+1}a_k^2\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial f}{\partial a_k}(P)=\sum_{i=0}^{n}\frac{2}{i+k+1}a_i\,.$$

Donc, pour tout $H=\sum_{k=0}^{n}h_kX^k\in\mathbb{R}_n[X]$, $df(P)\cdot H=\sum_{j=0}^{p}\left(h_j\sum_{i=0}^{n}\frac{2}{i+j+1}a_i\right)$, soit :

$$\boxed{df(P)\cdot H=\sum_{0\le i,j\le n}\frac{2a_ih_j}{i+j+1}}$$

Autre version (plus chic !) :

Munissons $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire $(P\mid Q)=\int_0^1 PQ$ (on peut choisir le produit scalaire que l'on veut car $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie). On a alors $f(P)=\int_0^1 P^2=\|P\|^2$ et pour tous $P,H\in\mathbb{R}_n[X]$:

$$f(P+H)=\|P+H\|^2=\|P\|^2+2(P\mid H)+\|H\|^2=f(P)+2(P\mid H)+\underset{H\to 0}{o}\left(\|H\|\right).$$

Ceci prouve que :

$$\boxed{df(P)\cdot H=2(P\mid H)=2\int_0^1 PH}$$

Remarquons qu'avec $P=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$ et $H=\sum_{k=0}^{n}h_kX^k$, on a $2\int_0^1 PH=\sum_{0\le i,j\le n}\frac{2a_ih_j}{i+j+1}$.

2) Remarquons que $A\mapsto\det A$ est polynômiale en les coefficients de *A*, donc continue. Alors, $\det^{-1}\left(\{0\}\right)$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (car $\{0\}$ est fermé dans $\mathbb{R}$), donc $GL_n(\mathbb{R})=\det^{-1}\left(\mathbb{R}\setminus\{0\}\right)=\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\setminus\det^{-1}\left(\{0\}\right)$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $A=(a_{i,j})_{1\le i,j\le n}\in GL_n(\mathbb{R})$ et $\chi_A=X^n+a_{n-1}X^{n-1}+\ldots+a_1X+a_0$.

Comme *A* est inversible, 0 n'est pas valeur propre de *A*, donc $\chi_A(0)=a_0\neq 0$. Or, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $\chi_A(A)=A^n+a_{n-1}A^{n-1}+\ldots+a_1A+a_0I_n=0_n$, donc :

$$-\frac{1}{a_0}(A^{n-1}+a_{n-1}A^{n-2}+\ldots+a_1I_n)A=I_n \quad\Rightarrow\quad A^{-1}=-\frac{1}{a_0}(A^{n-1}+a_{n-1}A^{n-2}+\ldots+a_1I_n).$$

Or, $\chi_A=\det\left(XI_n-A\right)$, donc les a_k sont polynômiaux en les coefficients de *A*. Comme les coefficients des puissances de *A*, sont aussi polynômiaux en les coefficients de *A*, les coefficients de A^{-1} sont polynômiaux en les coefficients de *A*.

Enfin, les fonctions polynômiales sont différentiables sur leur ensemble de définition, donc :

$$\boxed{f \text{ est différentiable sur son ensemble de définition.}}$$

Pour tous $i,j\in[\![1,n]\!]$, on a $A+tE_{i,j}\in GL_n(\mathbb{R})$ pour *t* réel proche de 0 (car $GL_n(\mathbb{R})$ est ouvert) et :

$$\frac{1}{t}\left[f(A+tE_{i,j})-f(A)\right]=\frac{1}{t}\left[(A+tE_{i,j})^{-1}-A^{-1}\right]=\frac{1}{t}(A+tE_{i,j})^{-1}\left(I_n-(A+tE_{i,j})A^{-1}\right)=-(A+tE_{i,j})^{-1}E_{i,j}A^{-1}.$$

Alors, $\frac{\partial f}{\partial a_{i,j}}(A)=\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t}\left[f(A+tE_{i,j})-f(A)\right]\right)=-A^{-1}E_{i,j}A^{-1}$ et donc pour tous $i,j\in[\![1,n]\!]$:

$$df(A)(E_{i,j})=-A^{-1}E_{i,j}A^{-1}.$$

Et ainsi :

$$\boxed{df(A):M\mapsto -A^{-1}MA^{-1}}$$

Exercice 13

Comme φ admet un maximum local en $\big(u(a),v(b)\big)$, il existe une boule ouverte *B*, de centre $\big(u(a),v(b)\big)$ et de rayon $r>0$, telle que :

$$\forall\,(X,Y)\in B\,,\ \varphi\big(X,Y\big)\leq\varphi\big(u(a),v(b)\big).$$

Par ailleurs, *u* et *v* sont continues respectivement en *a* et *b* donc $(x,y)\mapsto\big(u(x),v(y)\big)$ est continue en (a,b).

Ceci implique qu'il existe un réel $\alpha>0$ tel que pour tout $(x,y)\in B\big((a,b),\alpha\big)$:

$$\big(u(x),v(y)\big)\in B.$$

Alors, pour tout $(x,y)\in B\big((a,b),\alpha\big)$, on a :

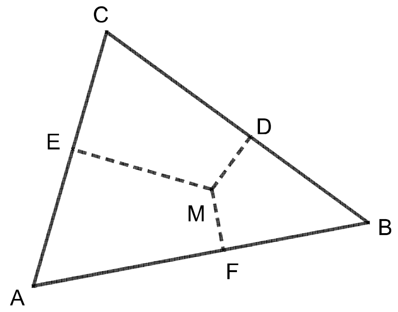
$$f(x,y)=\varphi\big(u(x),v(y)\big)\leq\varphi\big(u(a),v(b)\big).$$

Ceci montre que :

$$\boxed{f\text{ admet un maximum local en }(a,b).}$$

Exercice 14

Faisons un schéma. On note *D*, *E* et *F* les projetés orthogonaux de M sur (BC), (AC) et (AB) respectivement.



On cherche le maximum de $MD\times ME\times MF$.

Appelons S l'aire du triangle ABC. On a :

$$S=S_{MBC}+S_{MAC}+S_{MAB}=\frac{1}{2}\big(MD\times BC+ME\times AC+MF\times AB\big).$$

Posons $x=MD$ et $y=ME$. On a alors $x,y\in\mathbb{R}_+$ et $MF=\dfrac{2S-MD\times BC-ME\times AC}{AB}$, donc :

$$MD\times ME\times MF=\frac{MD\times ME\times\big(2S-MD\times BC-ME\times AC\big)}{AB}.$$

Et $MD\times ME\times MF$ est maximal quand $MD\times ME\times\big(2S-MD\times BC-ME\times AC\big)$ l'est.

Posons $a=BC$, $b=AC$, $c=AB$ et :

$$f(x,y)=MD\times ME\times\big(2S-MD\times BC-ME\times AC\big)=xy\big(2S-ax-by\big)=2Sxy-ax^2y-bxy^2.$$

La fonction *f* est polynômiale donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2S\,y-2axy-by^2=y\big(2S-2ax-by\big)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2S\,x-ax^2-2bxy=x\big(2S-ax-2by\big)$$

On a alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} y(2S-2ax-by)=0 \\ x(2S-ax-2by)=0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} y=0 \text{ ou } 2ax+by=2S \\ x=0 \text{ ou } ax+2by=2S \end{cases}$$

Si $x=0$ ou $y=0$, alors $f(x,y)=0$ donc f est minimale (car $f(x,y)$ est toujours positif : c'est un produit de distances). On s'intéresse donc à l'unique point critique (x,y) tel que $x\neq 0$ et $y\neq 0$, qui est donnée par :

$$\begin{cases} 2ax+by=2S \\ ax+2by=2S \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad (x,y)=\left(\frac{2S}{3a},\frac{2S}{3b}\right).$$

Alors :

$$f\left(\frac{2S}{3a},\frac{2S}{3b}\right)=\frac{8S^3}{27ab}.$$

Or, on peut écrire pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}_+^2$:

$$f(x,y)=2Sxy-ax^2y-bxy^2=\frac{y(by-2S)^2}{4a}-ay\left(x+\frac{by-2S}{2a}\right)^2\leq\frac{y(by-2S)^2}{4a}=\frac{1}{4a}g(y).$$

Remarquons que comme M reste à l'intérieur du triangle ABC, $y=ME$ reste inférieur à la longueur h de la hauteur issue de B. Or, $S=\frac{h\times AC}{2}=\frac{hb}{2}$, donc $h=\frac{2S}{b}$. Ainsi, $y\in\left[0,\frac{2S}{b}\right]$.

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ avec $g'(y)=(by-2S)^2+2by(by-2S)=(3by-2S)(by-2S)$.

On a alors le tableau :

y	0		$\frac{2S}{3b}$		$\frac{2S}{b}$
$g'(y)$		$+$	0	$-$	0
g		$\nearrow$		$\searrow$	

Ainsi, g est maximale quand $y=\frac{2S}{3b}$ et donc, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}_+^2$ avec $y\in\left[0,\frac{2S}{b}\right]$, on a :

$$f(x,y)\leq\frac{1}{4a}g(y)\leq\frac{1}{4a}g\left(\frac{2S}{3b}\right)=\frac{8S^3}{27ab}.$$

Finalement, $\frac{8S^3}{27ab}$ est le maximum de f atteint quand $x=MD=\frac{2S}{3a}$ et $y=ME=\frac{2S}{3b}$, et dans ce cas, avec $c=AB$, on obtient :

$$MF=\frac{2S-MD\times BC-ME\times AC}{AB}=\frac{2S}{3c}.$$

Ainsi :

> Le maximum du produit des distances d'un point M intérieur à un triangle ABC aux cotés de ce triangle est $\frac{8S^3}{27AB\times BC\times CA}$, atteint quand $d\big(M,(BC)\big)=\frac{2S}{3BC}$, $d\big(M,(AC)\big)=\frac{2S}{3AC}$ et $d\big(M,(AB)\big)=\frac{2S}{3AB}$.

Remarquons que le point M ci-dessus est le centre de gravité G de ABC.

En effet, si, comme plus haut, D est le projeté orthogonal de G sur (BC), on a $S_{GBC} = \dfrac{BC \times GD}{2}$, donc :

$$GD = \frac{2S_{GBC}}{BC}.$$

Or, si $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe du plan, on a :

$$2S_{GBC} = \left|\left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BG}\right]\right| = \left|\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BG})\right| = \left|\det_{\mathcal{B}}\left(\overrightarrow{BC}, \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})\right)\right| = \left|\det_{\mathcal{B}}\left(\overrightarrow{BC}, \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}\right)\right| = \frac{1}{3}\left|\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})\right| = \frac{1}{3}2S.$$

Donc :

$$GD = d\left(G,(BC)\right) = \frac{2S}{3BC}.$$

Et on a de même, $d\left(G,(AC)\right) = \dfrac{2S}{3AC}$ et $d\left(G,(AB)\right) = \dfrac{2S}{3AB}$.

Exercice 15

1) Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $g_n : t \mapsto \dfrac{e^{-nt}}{n^2}$ et $g = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction g_n est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$ (car proportionnelle à une fonction exponentielle) et, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$0 < g_n(t) \leq \frac{1}{n^2}.$$

Comme la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge, la série de fonctions $\sum g_n$ converge normalement (donc uniformément et simplement) sur $\mathbb{R}_+$, et ainsi, $g = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n$ est bien définie et même continue sur $\mathbb{R}_+$.

De plus, $\lim_{t \to +\infty} g_n(t) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. La convergence normale de $\sum g_n$ sur $\mathbb{R}_+$ permet alors de conclure que :

$$\lim_{t \to +\infty} g(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{t \to +\infty} g_n(t) = 0.$$

Enfin, pour tout réel $a > 0$, tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in \left[a, +\infty\right[$, on a :

$$|g_n'(t)| = \left|-n\frac{e^{-nt}}{n^2}\right| = \frac{e^{-nt}}{n} \leq e^{-na}$$

$$|g_n''(t)| = \left|n^2\frac{e^{-nt}}{n^2}\right| = e^{-nt} \leq e^{-na}$$

Comme la série géométrique $\sum e^{-na}$ converge car $e^{-a} \in \left]0,1\right[$, les séries de fonctions $\sum g_n'$ et $\sum g_n''$ converge normalement (donc uniformément) sur $\left[a, +\infty\right[$, donc g est de classe C^2 sur $\left[a, +\infty\right[$.

Ceci étant vrai pour tout $a\in\mathbb{R}_+^*$, g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$, avec pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$:

$$g'(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}g_n'(t)=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{-nt}}{n}<0$$

$$g''(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}g_n''(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-nt}=\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}$$

Ainsi, g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc sur $\mathbb{R}_+$ (car continue en 0).

Finalement, la fonction g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement décroissante de $g(0)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ à $\lim_{+\infty}g=0$, donc d'après le théorème de la bijection continue, g réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $\left]0,\frac{\pi^2}{6}\right]$ et ainsi :

$$g(\mathbb{R}_+)=\left]0,\frac{\pi^2}{6}\right].$$

Or, quand (x,y) décrit $\mathbb{R}^2$, x^2+y^2 décrit $\mathbb{R}_+$, donc $f(\mathbb{R}^2)=g(\mathbb{R}_+)$, soit :

$$\boxed{f(\mathbb{R}^2)=\left]0,\frac{\pi^2}{6}\right]}$$

2) On a vu que g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$:

$$g''(t)=\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}.$$

Donc, pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$:

$$g'(t)=\ln(1-e^{-t})+k \quad \text{avec } k\in\mathbb{R}.$$

Or, sur $[1,+\infty[$, $g'=\sum_{n=1}^{+\infty}g_n'$ et la convergence est uniforme. Comme pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\lim_{t\to+\infty}g_n'(t)=0$, on a :

$$\lim_{t\to+\infty}g'(t)=0.$$

Comme $\lim_{t\to+\infty}\ln(1-e^{-t})=0$, on obtient $k=0$ et donc pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$, $g'(t)=\ln(1-e^{-t})$.

Alors, pour tous $\varepsilon,t\in\mathbb{R}_+^*$:

$$g(t)=g(\varepsilon)+\int_\varepsilon^t g'(u)\,du=g(\varepsilon)+\int_\varepsilon^t\ln(1-e^{-u})\,du.$$

Enfin :

$$\ln(1-e^{-u})=\ln\Big(1-\big[1-u+\underset{0}{o}(u)\big]\Big)=\ln\big(u+\underset{0}{o}(u)\big)=\ln u+\ln\big(1+\underset{0}{o}(1)\big)=\ln u+\underset{0}{o}(\ln u).$$

Comme $u\mapsto\ln u$ est de signe constant au voisinage de 0 et intégrable en 0, $\int_0^t\ln(1-e^{-u})\,du$ converge et comme g est continue en 0, on peut écrire :

$$g(t)=\lim_{\varepsilon\to0}\left[g(\varepsilon)+\int_\varepsilon^t\ln(1-e^{-u})\,du\right]=g(0)+\int_0^t\ln(1-e^{-u})\,du.$$

Soit, pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$:

$$\boxed{g(t)=\frac{\pi^2}{6}+\int_0^t\ln(1-e^{-u})\,du}$$

3) La fonction *f* est la composée de $(x,y)\mapsto x^2+y^2$ par *g*, qui comme on vient de le voir est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. Or, la fonction $(x,y)\mapsto x^2+y^2$ est de classe C^1 (car polynomiale) sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ et à images dans $\mathbb{R}_+^*$. Alors, *f* est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ (composée de fonctions C^1) avec pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2xg'(x^2+y^2)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2yg'(x^2+y^2)$$

Comme g' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$ (on a vu que $g'<0$), *f* n'admet pas de point critique dans $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, donc pas d'extremum (local ou global) sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

Par contre, on a vu que pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, $g(t)\leq g(0)=\dfrac{\pi^2}{6}$, donc pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y)\leq f(0,0)=g(0)=\frac{\pi^2}{6}.$$

Ainsi :

> La fonction *f* n'a pas de minimum, mais admet un maximum global, $\dfrac{\pi^2}{6}$, atteint uniquement en $(0,0)$.

Exercice 16

1) Pour tout $t\in\mathbb{R}$, on a $|f(t)|\geq 0$, donc $t\mapsto|f(t)|$ est croissante si et seulement si $t\mapsto|f(t)|^2$ l'est.

Or, pour tout $t\in\mathbb{R}$, $|f(t)|^2=f(t)\overline{f}(t)$ et comme *f* est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, $\overline{f}$ l'est aussi, ainsi que $g=f\overline{f}$ (en tant que produit de telles fonctions) et :

$$g'(t)=f'(t)\overline{f}(t)+f(t)\overline{f}'(t)=f'(t)\overline{f}(t)+\overline{f'(t)\overline{f}(t)}=2\,\mathrm{Re}\left[f'(t)\overline{f}(t)\right].$$

Comme *f* est à images dans $\mathbb{C}^*$, on a $|f(t)|^2>0$ pour tout $t\in\mathbb{R}$, donc :

$$g'(t)=2\,\mathrm{Re}\left[f'(t)\overline{f}(t)\right]\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\mathrm{Re}\left[f'(t)\overline{f}(t)\right]}{|f(t)|^2}\geq 0.$$

Enfin :

$$\frac{\mathrm{Re}\left[f'(t)\overline{f}(t)\right]}{|f(t)|^2}=\mathrm{Re}\left[\frac{f'(t)\overline{f}(t)}{|f(t)|^2}\right]=\mathrm{Re}\left[\frac{f'(t)\overline{f}(t)}{f(t)\overline{f}(t)}\right]=\mathrm{Re}\left[\frac{f'(t)}{f(t)}\right].$$

Et donc :

$$|f| \text{ est croissante} \quad\Leftrightarrow\quad g \text{ est croissante} \quad\Leftrightarrow\quad g'(t)\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{Re}\left[\frac{f'(t)}{f(t)}\right]\geq 0.$$

Ceci prouve que :

> $t\mapsto|f(t)|$ est croissante si et seulement si la partie réelle $\dfrac{f'(t)}{f(t)}$ est toujours positive.

2) En gardant les notations de la question précédente ($g=|f|^2$), on a pour tout $t\in\mathbb{R}$:

$$\frac{g'(t)}{g(t)}=\frac{f'(t)\overline{f}(t)+f(t)\overline{f}'(t)}{f(t)\overline{f}(t)}=\frac{2\operatorname{Re}\left[f'(t)\overline{f}(t)\right]}{f(t)\overline{f}(t)}=2\operatorname{Re}\left[\frac{f'(t)\overline{f}(t)}{f(t)\overline{f}(t)}\right]=2\operatorname{Re}\left[\frac{f'(t)}{f(t)}\right].$$

$\frac{g'(t)}{g(t)}-2a$ Or, si $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{f'(t)}{f(t)}=a\in\mathbb{R}_-^*$, on a :

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{f'(t)}{f(t)}=\lim_{t\to+\infty}\left(\operatorname{Re}\left[\frac{f'(t)}{f(t)}\right]+i\operatorname{Im}\left[\frac{f'(t)}{f(t)}\right]\right)=a\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}\lim\limits_{t\to+\infty}\operatorname{Re}\left[\frac{f'(t)}{f(t)}\right]=a\\ \lim\limits_{t\to+\infty}\operatorname{Im}\left[\frac{f'(t)}{f(t)}\right]=0\end{cases}$$

Donc :

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{g'(t)}{g(t)}=2a.$$

Comme $-a>0$, il existe $A>0$ tel que pour tout $t\in[A,+\infty[$, $\left|\frac{g'(t)}{g(t)}-2a\right|\le -a$, ce qui implique que :

$$\frac{g'(t)}{g(t)}\le a.$$

Alors, comme f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, g l'est aussi et pour tout $t\in[A,+\infty[$:

$$\int_A^t\frac{g'(u)}{g(u)}du\le\int_A^t a\,du\quad\Leftrightarrow\quad\ln\big(g(t)\big)-\ln\big(g(A)\big)\le a(t-A)\quad\Leftrightarrow\quad g(t)\le K^2e^{at}\quad\Leftrightarrow\quad|f(t)|\le Ke^{\frac{a}{2}t}$$

avec $K=\sqrt{e^{-aA}g(A)}\in\mathbb{R}_+^*$.

Alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\ge N=E(A)+1$, $|f(n)|\le Ke^{\frac{a}{2}n}=K(e^{a/2})^n$.

Comme $a<0$, on a $e^{a/2}\in\,]0,1[$, donc la série géométrique $\sum K(e^{a/2})^n$ converge et ainsi, $\sum|f(n)|$ converge aussi, et finalement :

$$\boxed{\text{La série de terme général } f(n) \text{ est absolument convergente.}}$$

Exercice 17

1) Si y est une solution bornée sur $\mathbb{R}_+$ de (E), alors il existe $M\in\mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $|y(x)|\le M$. Alors, pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $|y(x)f(x)|\le M|f(x)|$ et comme f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, par comparaison :

$$\boxed{yf \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}_+.}$$

On a pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $y''(x)=-f(x)y(x)$ et comme y et f sont continues (y est deux fois dérivable, donc continue car solution de (E) et f est continue par hypothèse), y'' est continue sur $\mathbb{R}_+$ et, pour tout $x\in\mathbb{R}_+$:

$$y'(x)=y'(0)+\int_0^x y''(t)\,dt=y'(0)-\int_0^x f(t)y(t)\,dt.$$

Comme f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)y(t)\,dt=\int_0^{+\infty}f(t)y(t)\,dt\in\mathbb{R}$ et donc :

$$\boxed{y' \text{ admet une limite finie en } +\infty.}$$

Notons ℓ cette limite et supposons que $\ell \neq 0$. Quitte à changer y et $-y$, qui vérifie les mêmes hypothèses (car l'équation (E) est linéaire et homogène), supposons $\ell > 0$.

Alors, $\frac{\ell}{2} > 0$ et il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in [A, +\infty[$:

$$|y'(x) - \ell| \leq \frac{\ell}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\ell}{2} \leq y'(x) - \ell \leq \frac{\ell}{2} \quad \Rightarrow \quad y'(x) \geq \frac{\ell}{2}.$$

Alors, pour tout $x \in [A, +\infty[$:

$$\int_A^x y'(t)\,dt \geq \int_A^x \frac{\ell}{2} dt \quad \Rightarrow \quad y(x) \geq \frac{\ell}{2}(x - A) + y(A).$$

Ceci est absurde car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ell}{2}(x - A) + y(A) = +\infty$ et y est bornée sur $\mathbb{R}_+$, donc $\ell = 0$. Ainsi :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} y'(x) = 0}$$

2) Si les fonctions y_1 et y_2 sont deux solutions de (E), alors, on a vu plus haut qu'elles elles sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$. La fonction $W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2$ est alors de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ en tant que différence de telles fonctions. Avec $y_1'' = -f\, y_1$ et $y_2'' = -f\, y_2$, on a :

$$W' = y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_1'' y_2 - y_1' y_2' = y_1(-f\, y_2) - (-f\, y_1)\, y_2 = 0.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La fonction } W \text{ est constante sur } \mathbb{R}_+.}$$

Supposons que toutes les solutions de (E) sont bornées.

Comme (E) est une équation linéaire, homogène d'ordre 2, l'ensemble de ses solutions est un espace vectoriel de dimension 2. Soit (y_1, y_2) une base de cet espace. Comme y_1 et y_2 sont deux solutions bornées de (E), alors $\lim\limits_{x \to +\infty} y_1'(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} y_2'(x) = 0$, donc (avec y_1 et y_2 bornées) :

$$\lim_{x \to +\infty} y_1'(x)\, y_2(x) = \lim_{x \to +\infty} y_2'(x)\, y_1(x) = 0.$$

Ainsi, $\lim\limits_{x \to +\infty} W(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} [y_1(x) y_2'(x) - y_1'(x) y_2(x)] = 0$ et comme la fonction W est constante :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+,\ W(x) = 0.$$

La fonction y_2 n'est pas nulle (elle fait partie d'une base), donc il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $y_2(a) \neq 0$ et comme elle est continue, il existe un intervalle I de $\mathbb{R}_+$ contenant a et sur lesquels y_2 ne s'annule pas.
On a alors pour tout $x \in I$, $y_2(x) \neq 0$ et :

$$\left(\frac{y_1}{y_2}\right)' = \frac{y_1 y_2' - y_1' y_2}{y_2^2} = \frac{W}{y_2^2} = 0.$$

Donc, $\frac{y_1}{y_2}$ est constante sur I, soit $y_1 = k\, y_2$ sur I, où k est une constante réelle.
Comme $a \in I$, on a $y_1(a) = k\, y_2(a)$ et $y_1'(a) = k\, y_2'(a)$, y_1 et $k\, y_2$ sont deux solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+$.

Or, le problème de Cauchy composée de l'équation linéaire d'ordre 2 (E) et des conditions initiales $y(a) = y_1(a)$ et $y'(a) = y_1'(a)$ admet une unique solution, et donc $y_1 = k\,y_2$ sur $\mathbb{R}_+$. Ceci veut dire que (y_1, y_2) est liée. Ceci est absurde car (y_1, y_2) est une base.

Finalement, supposer que toutes les solutions de (E) sont bornées mène à une contradiction, donc :

L'équation différentielle (E) admet des solutions non bornées.

<u>Exercice 18</u>

Procédons par analyse-synthèse.

<u>*Analyse*</u>

Soit *f* une éventuelle solution du problème : *f* est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Remarquons que l'on peut alors écrire pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'\left(\dfrac{1}{x}\right) = f(x)$.

Alors, f' est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que composée de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, dérivable et à images dans $\mathbb{R}_+^*$ par *f* et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} f(x).$$

Ainsi, *f* est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de :

$$(E) :\ y'' + \frac{1}{x^2} y = 0.$$

Cette équation est une équation différentielle linéaire, homogène d'ordre 2, donc l'ensemble de ses solutions est un espace vectoriel de dimension 2.

Cherchons une éventuelle solution *g* de (E) de la forme $g : x \mapsto x^{\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$, on a alors pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$g''(x) = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2} = -\frac{1}{x^2} g(x) = -\,x^{\alpha-2}.$$

Donc, $\alpha(\alpha - 1) = -1$, soit $\alpha^2 - \alpha + 1 = 0$ et donc : $\alpha = \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

En prenant $\alpha = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$, on a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$g(x) = x^{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}} = x^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x} = \sqrt{x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) + i\sqrt{x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right).$$

Comme *g* est solution de (E), qui est à coefficients réels, $\mathrm{Re}(g)$ et $\mathrm{Im}(g)$ sont des solutions réelles de (E).

Ces deux fonctions n'étant par proportionnelles, elles forment une famille libre et donc, une base de l'espace des solutions de (E).

Ainsi, il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f(x) = A\sqrt{x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) + B\sqrt{x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right).$$

Ainsi, toute éventuelle solution du problème est de la forme $x \mapsto A\sqrt{x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)+B\sqrt{x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)$ où A et B sont deux constantes réelles.

Synthèse

Soient $A, B \in \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto A\sqrt{x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)+B\sqrt{x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction *f* est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que combinaison linéaire de telles fonctions pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= A\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) - A\sqrt{x}\frac{\sqrt{3}}{2x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) + B\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) + B\sqrt{x}\frac{\sqrt{3}}{2x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{x}}\left[\frac{A+B\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) - \frac{A\sqrt{3}-B}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{x}\right) &= A\sqrt{\frac{1}{x}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right) + B\sqrt{\frac{1}{x}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{x}}\left[A\cos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) + B\sin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{x}}\left[A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) - B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right]
\end{aligned}$$

Ainsi, on a $f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \dfrac{A+B\sqrt{3}}{2} = A \\ \dfrac{A\sqrt{3}-B}{2} = B \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad A = \sqrt{3}B\ .$$

Et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{3}B\sqrt{x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) + B\sqrt{x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) = 2B\sqrt{x}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right]\\
&= 2B\sqrt{x}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right] = 2B\sqrt{x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x - \frac{\pi}{6}\right)
\end{aligned}$$

Finalement :

Les solutions du problème sont les fonctions $x \mapsto \lambda\sqrt{x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x - \frac{\pi}{6}\right)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 19

La fonction *H* est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ en tant que fonction rationnelle. Le problème se pose en $(0,0)$.

En posant $\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}$ avec $r \in \mathbb{R}_+$ et $t \in \mathbb{R}$ (coordonnées polaires), on a :

$$H(r\cos t, r\sin t) = \frac{r^2\cos t\sin t(r^2\cos^2 t - r^2\sin^2 t)}{r^2} = r^2\cos t\sin t(\cos^2 t - \sin^2 t) = r^2\cos t\sin t\cos(2t)\ .$$

Donc, $|H(r\cos t, r\sin t)| \leq r^2$, soit pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$|H(x,y)| \leq x^2 + y^2 .$$

Comme $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2) = 0$, le théorème de gendarmes permet de conclure que :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} H(x,y) = 0 = H(0,0) .$$

Donc, H est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on a :

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) = \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2+y^2)^2} .$$

En passant en coordonnées polaires comme plus haut, on obtient :

$$\frac{\partial H}{\partial x}(r\cos t, r\sin t) = r\sin t(\cos^4 t + 4\cos^2 t\sin^2 t - \sin^4 t) .$$

Et :

$$\left|\frac{\partial H}{\partial x}(r\cos t, r\sin t)\right| \leq r|\sin t|(\cos^4 t + 4\cos^2 t\sin^2 t + \sin^4 t) \leq 6r .$$

Ainsi, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$\left|\frac{\partial H}{\partial x}(x,y)\right| \leq 6(x^2+y^2) .$$

Et, comme plus haut, le théorème de gendarmes permet de conclure que :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial H}{\partial x}(x,y) = 0 .$$

Donc, $\dfrac{\partial H}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$, donc sur $\mathbb{R}^2$.

En remarquant que $H(y,x) = -H(x,y)$, $\dfrac{\partial H}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\partial H}{\partial x}(y,x)$, donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\partial H}{\partial y}(x,y) = 0$ et $\dfrac{\partial H}{\partial x}$ est, elle aussi, continue en $(0,0)$, donc sur $\mathbb{R}^2$.

Finalement :

$$\boxed{\text{La fonction } H \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^2.}$$

De plus, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x,y) = \frac{4xy^3(3y^2 - x^2)}{(x^2+y^2)^3} .$$

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x,0) = 0$ et $\dfrac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x,x) = 1$, donc ;

$$\lim_{x\to 0} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x,0) = 0 \neq 1 = \lim_{x\to 0} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x,y) .$$

Ainsi, $\dfrac{\partial^2 H}{\partial x^2}$ n'admet pas de limite quand $(x,y) \to (0,0)$, donc :

$$\boxed{\text{La fonction } H \text{ n'est pas de classe } C^2 \text{ en 0, donc sur } \mathbb{R}^2.}$$

Exercice 20

1) Quitte à changer *f* en $-f$ (qui vérifie les mêmes hypothèses), supposons que *f* admette un minimum local en $x_0 \in U$. Alors, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[\, \subset U$ (car *U* est ouvert) et pour tout $x \in\,]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[$, $f(x_0) \le f(x)$. Ainsi :

$$x \in\,]x_0-\varepsilon, x_0[\;\Rightarrow\; \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le 0 \;\Rightarrow\; \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f_g'(x_0) = f'(x_0) \le 0$$

$$x \in\,]x_0, x_0+\varepsilon[\;\Rightarrow\; \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ge 0 \;\Rightarrow\; \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f_d'(x_0) = f'(x_0) \ge 0$$

Finalement, on a $f'(x_0) \le 0$ et $f'(x_0) \ge 0$, donc :

$$\boxed{f'(x_0) = 0}$$

Remarquons que cette question est une question de cours de première année.

2) *Cette question est une question de cours de deuxième année : le consulter pour la preuve.*

Si $f : (x,y) \mapsto f(x,y)$ est de classe C^1 sur *U*, un ouvert de $\mathbb{R}^2$, et admet un extremum local en (a,b), alors (a,b) est un point critique, autrement dit $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$.

3) Rappelons que pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$\cos(iy) = \frac{e^{i(iy)} + e^{-i(iy)}}{2} = \frac{e^{-y}+e^{y}}{2} = \operatorname{ch} y$$

$$\sin(iy) = \frac{e^{i(iy)} - e^{-i(iy)}}{2i} = \frac{e^{-y}-e^{y}}{2i} = -\frac{1}{i}\frac{e^{y}-e^{-y}}{2} = i \operatorname{sh} y$$

Alors, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} f(x,y) &= |\sin(x+iy)|^2 = |\sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy)|^2 = |\sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y|^2 \\ &= \sin^2 x \operatorname{ch}^2 y + \cos^2 x \operatorname{sh}^2 y = \sin^2 x (1+\operatorname{sh}^2 y) + \cos^2 x \operatorname{sh}^2 y = \sin^2 x + (\sin^2 x + \cos^2 x)\operatorname{sh}^2 y \end{aligned}$$

Soit :

$$f(x,y) = \sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y\,.$$

La fonction *f* est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ en tant que somme de telles fonctions.

Cherchons les points critiques sur l'ouvert $U = \overset{\circ}{\Omega} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\, x^2+y^2 < 1\}$ en remarquant que si $(x,y) \in U$, alors $x^2 < x^2+y^2 < 1$, donc $x \in\,]-1,1[\, \subset \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2\cos x \sin x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2 \operatorname{ch} y \operatorname{sh} y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \text{ ou } \sin x = 0 \\ \operatorname{sh} y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \quad \text{car } x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ y = 0 \end{cases}$$

Donc, le seul point critique est $(0,0)$ et, d'après la question précédente, si *f* admet un extremum sur l'ouvert *U*, c'est en ce point. Or, $f(0,0) = 0$ et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) \ge 0$, donc 0 est un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ donc sur Ω. De plus, il n'y a pas d'autre extremum sur *U*.

Cherchons un éventuel extremum local sur la frontière de Ω, soit le cercle $C=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2+y^2=1\right\}$.

Remarquons que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$f(-x,-y)=f(x,-y)=f(-x,y)=f(x,y).$$

Donc si f admet un extremum local sur C, alors il est atteint plusieurs fois dont une fois sur le quart de cercle $C'=\left\{(x,y)\in[0,1]^2,\ x^2+y^2=1\right\}$. Pour tout $(x,y)\in C'$, on a $x^2+y^2=1$ et $y\geq 0$, donc $y=\sqrt{1-x^2}$ et :

$$f(x,y)=g(x)=\sin^2 x+\mathrm{sh}^2(\sqrt{1-x^2}).$$

La fonction g est définie et continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $[0,1[$ avec :

$$g'(x)=2\cos x\sin x+2\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{ch}(\sqrt{1-x^2})\mathrm{sh}(\sqrt{1-x^2})=\sin(2x)-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{sh}(2\sqrt{1-x^2}).$$

Et pour tout $x\in\,]0,1[$:

$$g'(x)=2x\left(\frac{\sin(2x)}{2x}-\frac{\mathrm{sh}(2\sqrt{1-x^2})}{2\sqrt{1-x^2}}\right)=2x\left(\varphi(2x)-\psi(2\sqrt{1-x^2})\right).$$

avec $\varphi(t)=\dfrac{\sin t}{t}$ et $\psi(t)=\dfrac{\mathrm{sh}\,t}{t}$.

Quand x décrit $]0,1[$, $2x$ et $2\sqrt{1-x^2}$ décrivent $]0,2[$. Les fonctions φ et ψ sont dérivables sur $]0,2[$ avec, pour tout $t\in\,]0,2[$:

$$\varphi'(t)=\frac{t\cos t-\sin t}{t^2}\quad\text{et}\quad\psi'(t)=\frac{t\,\mathrm{ch}\,t-\mathrm{sh}\,t}{t^2}.$$

Les fonctions $t\mapsto t\cos t-\sin t$ et $t\mapsto t\,\mathrm{ch}\,t-\mathrm{sh}\,t$ sont dérivables sur $]0,2[$, de dérivées $t\mapsto -t\sin t$, strictement négative sur $]0,2[$ et $t\mapsto t\,\mathrm{sh}\,t$, strictement positive sur $]0,2[$. Donc :

- $t\mapsto t\cos t-\sin t$ est strictement décroissante sur $[0,2[$ et vaut 0 en 0, donc $t\cos t-\sin t<0$ sur $]0,2[$ et ainsi, $\varphi'(t)<0$ sur $]0,2[$, donc φ est strictement décroissante sur $]0,2[$ avec $\lim\limits_{t\to 0}\varphi(t)=1$.

  Ceci prouve que pour tout $t\in\,]0,2[$, $\varphi(t)<1$, donc pour tout $x\in\,]0,1[$, $\varphi(2x)<1$.

- $t\mapsto t\,\mathrm{ch}\,t-\mathrm{sh}\,t$ est strictement croissante sur $[0,2[$ et vaut 0 en 0, donc $t\,\mathrm{ch}\,t-\mathrm{sh}\,t>0$ sur $]0,2[$ et ainsi, $\psi'(t)>0$ sur $]0,2[$, donc φ est strictement croissante sur $]0,2[$ avec $\lim\limits_{t\to 0}\psi(t)=1$.

  Ceci prouve que pour tout $t\in\,]0,2[$, $\psi(t)>1$, donc pour tout $x\in\,]0,1[$, $\psi(2\sqrt{1-x^2})>1$.

Finalement, pour tout $x\in\,]0,1[$, $\varphi(2x)<1<\psi(2\sqrt{1-x^2})$, donc $g'(x)<0$ et g est strictement décroissante sur $]0,1[$, donc sur $[0,1]$ par continuité.

Ainsi, pour tout $x\in[0,1]$, $g(1)\leq g(x)\leq g(0)$, soit :

$$0<f(1,0)=\sin^2 1\leq f(x,\sqrt{1-x^2})\leq f(0,1)=\mathrm{sh}^2 1.$$

Remarquons enfin que pour tout $(x,y)\in\Omega\cap[0,1]^2$, on a $0\leq y\leq\sqrt{1-x^2}$, donc :

$$f(x,y)\leq f(x,\sqrt{1-x^2})\leq f(0,1)=\mathrm{sh}^2 1.$$

Par symétries, on obtient finalement $f(x,y)\le f(0,1)=\mathrm{sh}^2 1$ pour tout $(x,y)\in\Omega$, donc sur Ω, f admet $\mathrm{sh}^2 1$ pour maximum global atteint en $(0,1)$ et $(0,-1)$.

Remarquons enfin que pour tout $x\in[0,1]$, $f(x,0)=\sin^2 x\le \sin^2 1=f(1,0)$, donc $\sin^2 1=f(1,0)$ n'est pas un minimum local.

Finalement :

$$\boxed{\text{Sur } \Omega, f \text{ admet un minimum global 0, atteint en } (0,0) \text{ et un maximum global } \mathrm{sh}^2 1, \text{ atteint en } (0,1) \text{ et } (0,-1).}$$

Exercice 21

Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Posons pour tout $t\in\mathbb{R}$, $g(t)=f(tx,ty,tz)$.

Comme f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$, g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et avec la règle de la chaine, on a, pour tout $t\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{d(tx)}{dt}\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty,tz)+\frac{d(ty)}{dt}\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty,tz)+\frac{d(tz)}{dt}\frac{\partial f}{\partial z}(tx,ty,tz) \\ &= x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty,tz)+y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty,tz)+z\frac{\partial f}{\partial z}(tx,ty,tz) \end{aligned}$$

Donc, $g'(1)=x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)+y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)+z\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)$.

On veut prouver que :

$$\big(f \text{ est } \alpha\text{-positivement homogène}\big)$$
$$\Leftrightarrow \left(\exists\,\alpha\in\mathbb{R},\ \forall\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)+z\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=\alpha f(x,y,z)\right)$$

$(\Rightarrow)$ On suppose qu'il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ et $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$, $f(\lambda x,\lambda y,\lambda z)=\lambda^\alpha f(x,y,z)$.

Soit $(u,v,w)\in\mathbb{R}^3$ fixé. On a, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$, $g(\lambda)=f(\lambda u,\lambda v,\lambda w)=\lambda^\alpha f(u,v,w)$, donc :

$$g'(\lambda)=u\frac{\partial f}{\partial x}(\lambda u,\lambda v,\lambda w)+v\frac{\partial f}{\partial y}(\lambda u,\lambda v,\lambda w)+w\frac{\partial f}{\partial z}(\lambda u,\lambda v,\lambda w)=\alpha\lambda^{\alpha-1}f(u,v,w).$$

En multipliant par λ, on obtient :

$$\lambda u\frac{\partial f}{\partial x}(\lambda u,\lambda v,\lambda w)+\lambda v\frac{\partial f}{\partial y}(\lambda u,\lambda v,\lambda w)+\lambda w\frac{\partial f}{\partial z}(\lambda u,\lambda v,\lambda w)=\alpha\lambda^{\alpha}f(u,v,w)=\alpha f(\lambda u,\lambda v,\lambda w).$$

Ceci est vrai pour tout $(u,v,w)\in\mathbb{R}^3$ et tout $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$, donc en posant $(\lambda u,\lambda v,\lambda w)=(x,y,z)$, on obtient pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)+z\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=\alpha f(x,y,z).$$

$(\Leftarrow)$ On suppose qu'il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)+z\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=\alpha f(x,y,z).$$

Alors, à $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ fixé, on a pour tout $t\in\mathbb{R}$:

$$tx\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty,tz)+ty\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty,tz)+tz\frac{\partial f}{\partial z}(tx,ty,tz)=tg'(t)=\alpha f(tx,ty,tz)=\alpha g(t).$$

Ainsi, g est solution de l'équation différentielle $ty'-\alpha y=0$, qui se récrit sur $\mathbb{R}_+^*$, $y'-\frac{\alpha}{t}y=0$.

Cette équation est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1, et ses solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions $t\mapsto K\exp\left(\int^t\frac{\alpha}{u}du\right)=Kt^\alpha$ avec K constante réelle.

Ainsi, il existe $K\in\mathbb{R}$ tel que, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$, $g(\lambda)=f(\lambda x,\lambda y,\lambda z)=K\lambda^\alpha$.

En évaluant en $\lambda=1$, on obtient $g(1)=f(x,y,z)=K$ et donc pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ et tout $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$:

$$g(\lambda)=f(\lambda x,\lambda y,\lambda z)=\lambda^\alpha f(x,y,z).$$

Finalement, on a établi que pour *f* de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$:

$$\boxed{\begin{array}{l}\left(f\text{ est }\alpha\text{-positivement homogène}\right)\\ \Leftrightarrow\left(\exists\alpha\in\mathbb{R},\ \forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)+z\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=\alpha f(x,y,z)\right)\end{array}}$$

Exercice 22

Soit $(x,h)\in E^2$. On a :

$$f(x+h)=\left(x+h\,|\,u(x+h)\right)=\left(x+h\,|\,u(x)+u(h)\right)=\left(x\,|\,u(x)\right)+\left(h\,|\,u(x)\right)+\left(x\,|\,u(h)\right)+\left(h\,|\,u(h)\right).$$

Comme *u* est symétrique, $\left(x\,|\,u(h)\right)=\left(h\,|\,u(x)\right)$ donc :

$$f(x+h)=f(x)+2\left(h\,|\,u(x)\right)+\left(h\,|\,u(h)\right).$$

Et comme *u* est un endomorphisme réel symétrique, il est diagonalisable, donc il existe une base orthonormée $(e_1,e_2,\dots,e_n)$ de E dans laquelle, si $h=h_1e_1+h_2e_2+\dots+h_ne_n$, on a $u(h)=h_1\lambda_1e_1+h_2\lambda_2e_2+\dots+h_n\lambda_ne_n$ et, en posant $m=\max\left(|\lambda_1|,|\lambda_2|,\dots,|\lambda_n|\right)$, on obtient :

$$\|u(h)\|=\sqrt{h_1^2\lambda_1^2+h_2^2\lambda_2^2+\dots+h_n^2\lambda_n^2}\le m\sqrt{h_1^2+h_2^2+\dots+h_n^2}=m\|h\|.$$

Alors, avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left|\left(h\,|\,u(h)\right)\right|\le\|h\|.\|u(h)\|\le m\|h\|^2\quad\Rightarrow\quad\left(h\,|\,u(h)\right)=\underset{h\to0}{o}\left(\|h\|\right).$$

Ainsi :

$$f(x+h)=f(x)+2\left(h\,|\,u(x)\right)+\underset{h\to0}{o}\left(\|h\|\right).$$

Donc :

$$\boxed{f\text{ est différentiable sur }E\text{ et pour tout }x\in E,\ df(x):h\mapsto2\left(h\,|\,u(x)\right)}$$

Soit $(x,h)\in E^2$ tel que $x\neq 0$ et $x+h\neq 0$. On a :

$$g(x+h)=\frac{(x+h\mid u(x+h))}{(x+h\mid x+h)}=\frac{(x\mid u(x))+2(h\mid u(x))+(h\mid u(h))}{(x\mid x)+2(h\mid x)+(h\mid h)}=\frac{(x\mid u(x))+2(h\mid u(x))+(h\mid u(h))}{(x\mid x)\left[1+2\dfrac{(h\mid x)}{(x\mid x)}+\dfrac{(h\mid h)}{(x\mid x)}\right]}$$

Or :

$$\left(2\frac{(h\mid x)}{(x\mid x)}+\frac{(h\mid h)}{(x\mid x)}\right)^2\leq\frac{1}{\|x\|^4}\left(2\left|(h\mid x)\right|+\left|(h\mid h)\right|\right)^2\leq\frac{1}{\|x\|^4}\left(2\|x\|.\|h\|+\|h\|^2\right)^2\leq\|h\|^2\frac{\left(2\|x\|+\|h\|\right)^2}{\|x\|^4}.$$

Donc $\left(2\dfrac{(h\mid x)}{(x\mid x)}+\dfrac{(h\mid h)}{(x\mid x)}\right)^2=\underset{h\to 0}{o}\left(\|h\|\right)$ et :

$$g(x+h)=\frac{f(x)+2(h\mid u(x))+\underset{h\to 0}{o}\left(\|h\|\right)}{(x\mid x)}\left[1-2\frac{(h\mid x)}{(x\mid x)}+\underset{h\to 0}{o}\left(\|h\|\right)\right]=g(x)+2\frac{(h\mid u(x))-(h\mid x)\,g(x)}{(x\mid x)}+\underset{h\to 0}{o}\left(\|h\|\right).$$

Donc :

$$\boxed{g \text{ est différentiable sur } E\setminus\{0\} \text{ et pour tout } x\in E\setminus\{0\},\ dg(x):h\mapsto 2\frac{(h\mid u(x))-(h\mid x)\,g(x)}{(x\mid x)}}$$

Soit $a\in E\setminus\{0\}$ tel que $dg(a)=0$, soit pour tout $h\in E$:

$$(h\mid u(a))-(h\mid a)\,g(a)\quad\Leftrightarrow\quad (h\mid u(a)-g(a)a)=0.$$

En posant $\lambda=g(a)\in\mathbb{R}$, ceci revient à $u(a)=\lambda a$ et donc, a (qui est non nul) est vecteur propre de u.

Réciproquement, si $a\in E\setminus\{0\}$ est vecteur propre de u associé à la valeur propre λ, alors :

$$u(a)-g(a)a=u(a)-\frac{(a\mid u(a))}{(a\mid a)}a=\lambda a-\frac{(a\mid\lambda a)}{(a\mid a)}a=\lambda a-\lambda\frac{(a\mid a)}{(a\mid a)}a=0.$$

Et donc, $dg(a)=0$.

Ainsi :

$$\boxed{dg(a)=0 \text{ si et seulement si } a \text{ est un vecteur propre de } u.}$$