Corrigés du TD n° 0

Exercice 1

Posons $f(x)=\ln(1+x)$.

La fonction *f* est de classe C^∞ sur $]-1,+\infty[$, avec pour tout $x\in\,]-1,+\infty[$ et tout $k\in\mathbb{N}^*$:

$$f^{(k)}(x)=(-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{(1+x)^k}.$$

Comme *f* est C^∞ sur $]-1,+\infty[$, on peut appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à tout ordre $n\in\mathbb{N}^*$, entre 0 et 1, ce qui donne :

$$f(1)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}1^k+\int_0^1(1-t)^n\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}dt.$$

Soit :

$$\ln 2=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}+(-1)^n\int_0^1\frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}}dt.$$

Et, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a pour tout $t\in[0,1]$, $\left|\frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\right|\leq(1-t)^n$, donc :

$$\left|(-1)^n\int_0^1\frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}}dt\right|\leq\int_0^1\left|\frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\right|dt\leq\int_0^1(1-t)^n dt.$$

Avec $u=1-t$, on a :

$$\int_0^1(1-t)^n dt=-\int_1^0u^n du=\int_0^1u^n du=\frac{1}{n+1}.$$

Donc, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\left|(-1)^n\int_0^1\frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}}dt\right|\leq\frac{1}{n+1}$ et, avec le théorème des gendarmes, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\ln 2-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right]=\lim_{n\to+\infty}\left[(-1)^n\int_0^1\frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}}dt\right]=0.$$

Ceci permet de conclure que la série $\sum\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge, avec :

$$\boxed{\sum_{n\geq1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln 2}$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$0<\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}\ \Rightarrow\ 0<\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)<\arctan\left(\frac{1}{n}\right)<\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow\ 0<\arctan\left(\frac{1}{n}\right)-\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)<\frac{\pi}{2}$$

Alors :

$$\arctan\left(\tan\left[\arctan\left(\frac{1}{n}\right)-\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)\right]\right)=\arctan\left(\frac{1}{n}\right)-\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right).$$

Or :

$$\tan\left[\arctan\left(\frac{1}{n}\right)-\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)\right]=\frac{\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right)-\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)}{1+\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right)\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)}=\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}\frac{1}{n+1}}=\frac{1}{n^2+n+1}$$

Donc, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)=\arctan\left(\frac{1}{n}\right)-\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right).$$

Alors, pour tout $N\in\mathbb{N}^*$, on a par télescopage :

$$\sum_{n=0}^{N}\arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)=\arctan 1+\sum_{n=1}^{N}\left[\arctan\left(\frac{1}{n}\right)-\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)\right]$$

$$=\frac{\pi}{4}+\arctan 1-\arctan\left(\frac{1}{N+1}\right)=\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{1}{N+1}\right)$$

Comme $\lim\limits_{N\to+\infty}\arctan\left(\frac{1}{N+1}\right)=0$, ceci permet de conclure que la série $\sum\arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$ converge, avec :

$$\boxed{\sum_{n\geq 0}\arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)=\frac{\pi}{2}}$$

Exercice 2

Tel qu'indiqué, posons pour tout entier $n\geq 2$:

$$u_n=\frac{1}{n}-\ln n+\ln(n-1)=\frac{1}{n}+\ln\left(\frac{n-1}{n}\right)=\frac{1}{n}+\ln\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

On a $u_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)=-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc $u_n\sim-\frac{1}{2n^2}$ et la série (de signe constant) $\sum\left(-\frac{1}{2n^2}\right)$ converge, donc $\sum u_n$ converge. Or, pour tout entier $n\geq 2$, on a par télescopage :

$$1+\sum_{k=2}^{n}u_k=1+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k}-\ln k+\ln(k-1)\right)=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=2}^{n}\left(\ln k+\ln(k-1)\right)=H_n-\ln n.$$

Donc, la suite $(H_n-\ln n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Notons γ sa limite.

On a de plus pour tout entier $n\geq 2$, $u_n=f\left(-\frac{1}{n}\right)$ avec $f(t)=\ln(1+t)-t$ et $-\frac{1}{n}\in\,]-1,0[$.

La fonction *f* est dérivable sur $]-1,0[$ avec $f'(t)=-\frac{t}{1+t}>0$, donc *f* est strictement croissante sur $]-1,0[$.

Or, sur $]1,+\infty[$, la fonction $g:t\mapsto-\frac{1}{t}$ est strictement croissante et à images dans $]-1,0[$, donc si on pose $h=f\circ g$, *h* est strictement croissante sur $]1,+\infty[$ et pour tout entier $n\geq 2$, $u_n=h(n)$. Ainsi, la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est strictement croissante. De plus, *h* est continue sur $]1,+\infty[$ (en tant que composée de fonctions continues).

Alors, pour tout entier $k \geq 2$, on a :

$$\left(\forall\, t \in [k, k+1],\ u_k \leq h(t) \leq u_{k+1}\right) \quad \Rightarrow \quad u_k \leq \int_k^{k+1} h(t)dt \leq u_{k+1}.$$

Alors, pour tout entier $n \geq 2$, et tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \leq \int_{n+1}^{n+p+1} h(t)dt \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} u_{k+1} = \sum_{k=n+2}^{n+p+1} u_k .$$

Ceci donne finalement pour tout entier $n \geq 2$, et tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1} + \int_{n+1}^{n+p} h(t)dt \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \leq \int_{n+1}^{n+p+1} h(t)dt .$$

On a d'une part :

$$\int_{n+1}^{n+p} h(t)dt = \int_{n+1}^{n+p} \left(\frac{1}{t} - \ln t + \ln(t-1)\right)dt = \left[\ln t - t\ln t + (t-1)\ln(t-1)\right]_{n+1}^{n+p} = F(n+p) - F(n+1)$$

avec $F(t) = (t-1)\ln\left(1 - \dfrac{1}{t}\right)$.

D'autre part :

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k = \left(1 + \sum_{k=2}^{n+p} u_k\right) - \left(1 + \sum_{k=2}^{n} u_k\right) = \left(H_{n+p} - \ln(n+p)\right) - \left(H_n - \ln n\right).$$

Donc, pour tout entier $n \geq 2$, et tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1} + F(n+p) - F(n+1) \leq \left(H_{n+p} - \ln(n+p)\right) - \left(H_n - \ln n\right) \leq F(n+p+1) - F(n+1) \qquad \textbf{(1)}.$$

Or, $F(t) = (t-1)\ln\left(1 - \dfrac{1}{t}\right) \underset{t \to +\infty}{\sim} t\left(-\dfrac{1}{t}\right) = -1$, donc :

$$\lim_{p \to +\infty} F(n+p) = \lim_{p \to +\infty} F(n+p+1) = -1.$$

Avec $\lim\limits_{p \to +\infty} \left(H_{n+p} - \ln(n+p)\right) = \gamma$, on obtient en passant à la limite quand $p \to +\infty$ dans **(1)** :

$$u_{n+1} - 1 - F(n+1) \leq \gamma - \left(H_n - \ln n\right) \leq -1 - F(n+1).$$

On veut $H_n = \ln n + \gamma + \dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, soit $\lim\limits_{n \to +\infty} n\left(H_n - \ln n - \gamma\right) = \dfrac{1}{2}$. Multiplions par $-n$ la double inégalité ci-dessus :

$$n + nF(n+1) \leq H_n - \ln n - \gamma \leq n + nF(n+1) - n\,u_{n+1}.$$

Et, on a vu que $u_n = -\dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, donc $n\,u_n \to 0$ et $n\,u_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}(n+1)\,u_{n+1} \to 0$.

Enfin :

$$\begin{aligned} n + nF(n+1) &= n\left[1 + F(n+1)\right] = n\left[1 + n\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\right] \\ &= n\left[1 - n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right] = n\left[1 - n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right] = \frac{1}{2} + o(1) \end{aligned}$$

Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} n+nF(n+1)=\dfrac{1}{2}$ et par le théorème des gendarmes, on a bien $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(H_n-\ln n-\gamma\right)=\dfrac{1}{2}$, soit :

$$\boxed{H_n=\ln n+\gamma+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}$$

Exercice 3

1) Comme $u_0=1\in\,]0,1]$ et $u_1=\dfrac{1}{2}\sin 1<1=u_0$, une récurrence immédiate permet de prouver que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a :

$$0<u_{n+1}<u_n\leq 1.$$

La fonction sinus est dérivable sur $[0,1]$, donc d'après le théorème des accroissements finis, pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe $c_n\in\,]0;u_n[$ tel que :

$$\frac{\sin u_n-\sin 0}{u_n-0}=\frac{1}{2}\sin' c_n \quad\Leftrightarrow\quad \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{2}\cos c_n \quad\Rightarrow\quad \frac{u_{n+1}}{u_n}\leq\frac{1}{2}.$$

Alors, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, le produit télescopique donne :

$$0<\prod_{k=0}^{n-1}\frac{u_{k+1}}{u_k}\leq\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad 0<\frac{u_n}{u_0}\leq\frac{1}{2^n} \quad\Leftrightarrow\quad 0<u_n\leq\frac{1}{2^n}.$$

Par comparaison à la série géométrique convergente $\sum\dfrac{1}{2^n}$, on peut conclure que :

$$\boxed{\text{La série } \sum u_n \text{ converge.}}$$

2) En étudiant la fonction $f_n : x\mapsto \arctan\left(\dfrac{x}{n}\right)=nx^2$ pour $n\in\mathbb{N}^*$ fixé, on prouve que qu'elle s'annule exactement une fois sur $\mathbb{R}_+^*$, en un réel u_n.

Alors, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $\arctan\left(\dfrac{u_n}{n}\right)=n{u_n}^2$ avec $\dfrac{u_n}{n}>0$, donc $0<\arctan\left(\dfrac{u_n}{n}\right)=n{u_n}^2<\dfrac{\pi}{2}$ et :

$$0<{u_n}^2<\frac{\pi}{2n}.$$

Le théorème des gendarmes permet de conclure que ${u_n}^2\to 0$, donc $u_n\to 0$ et $\dfrac{u_n}{n}\to 0$.

On a alors :

$$\arctan\left(\frac{u_n}{n}\right)\sim\frac{u_n}{n} \quad\Rightarrow\quad n{u_n}^2\sim\frac{u_n}{n} \quad\Rightarrow\quad u_n\sim\frac{1}{n^2} \quad (\text{car } u_n>0).$$

Par comparaison à la série de Riemann convergente $\sum\dfrac{1}{n^2}$, on peut conclure que :

$$\boxed{\text{La série } \sum u_n \text{ converge.}}$$

Exercice 4

On a $D = \left\{ a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \sum u_n^a \text{ converge} \right\} \subset \mathbb{R}_+^*$.

Si *D* est non vide, alors c'est une partie non vide de $\mathbb{R}$ minorée par 0 : elle admet une borne inférieure $m \geq 0$. On a alors :

$$D \subset [m, +\infty[.$$

De plus, par caractérisation de la borne supérieure, pour tout réel $x > m$, il existe $a \in D$ tel que $m \leq a < x$.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^x = u_n^{x-a} u_n^a = o(u_n^a)$ car $x - a > 0$ donc $u_n^{x-a} \to 0$.

Comme $\sum u_n^a$ converge et est à termes positifs, $\sum u_n^x$ converge et donc $x \in D$.

Ceci prouve que :

$$]m, +\infty[\subset D.$$

Ainsi, $]m, +\infty[\subset D \subset [m, +\infty[$, donc $D =]m, +\infty[$ ou $[m, +\infty[$ et finalement :

$$\boxed{\text{L'ensemble } D \text{ est vide ou bien de la forme } [m, +\infty[\text{ ou }]m, +\infty[\text{ avec } m \geq 0.}$$

Pour $u_n = \dfrac{1}{\ln n}$, on a $D = \varnothing$, car pour tout réel $a > 0$, $\dfrac{(\ln n)^a}{n} \to 0$ (croissances comparées) donc $\dfrac{1}{n} = o(u_n^a)$.

Pour $u_n = \dfrac{1}{n}$, on a immédiatement $D =]1, +\infty[$ (séries de Riemann).

Exercice 5

1) a. Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a, en intégrant par parties (on peut car *f* est de classe C^1) :

$$\begin{aligned} w_n &= \int_{n-1}^{n} f(t)dt - f(n) = \left[t f(t)\right]_{n-1}^{n} - \int_{n-1}^{n} t f'(t)dt - f(n) \\ &= n f(n) - (n-1) f(n-1) - \int_{n-1}^{n} t f'(t)dt - f(n) = (n-1)\left[f(n) - f(n-1)\right] - \int_{n-1}^{n} t f'(t)dt \\ &= (n-1)\int_{n-1}^{n} f'(t)dt - \int_{n-1}^{n} t f'(t)dt \end{aligned}$$

Soit finalement :

$$\boxed{w_n = \int_{n-1}^{n} (n-1-t) f'(t)dt}$$

On a alors :

$$|w_n| = \left| \int_{n-1}^{n} (n-1-t) f'(t)dt \right| \leq \int_{n-1}^{n} |(n-1-t) f'(t)| dt = \int_{n-1}^{n} |n-1-t| |f'(t)| dt.$$

Or, pour tout $t \in [n-1, n]$, $|n-1-t| = t - (n-1) \leq 1$, donc :

$$\boxed{|w_n| \leq \int_{n-1}^{n} |f'(t)| dt}$$

b. Pour tout entier naturel $n\geq 2$, on a $\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}|f'(t)|\,dt=\int_{1}^{n}|f'(t)|\,dt$. Or, $\int_{1}^{x}|f'(t)|\,dt$ admet une limite finie quand $x\to+\infty$, donc la série $\sum\int_{n-1}^{n}|f'(t)|\,dt$ converge et par comparaison, $\sum|w_n|$ converge, donc :

$$\boxed{\text{La série } \sum w_n \text{ est absolument convergente.}}$$

c. D'après ce qui précède, $\sum w_n$ est absolument convergente, donc convergente. Or, pour tout entier naturel $n\geq 2$, on a $f(n)=\int_{n-1}^{n}f(t)dt-w_n$, ce qui permet de conclure immédiatement que $\sum f(n)$ converge si et seulement si $\sum\int_{n-1}^{n}f(t)dt$ converge. Enfin, $\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}f(t)dt=\int_{1}^{n}f(t)dt$ et ainsi :

$$\boxed{\text{La série } \sum f(n) \text{ converge si et seulement si la suite } \left(\int_{1}^{n}f(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge.}}$$

2) Remarquons déjà que comme g et h sont positives sur $\mathbb{R}_+$, les fonctions $x\mapsto\int_{1}^{x}g(t)dt$ et $x\mapsto\int_{1}^{x}h(t)dt$ sont croissantes sur $\mathbb{R}_+$, donc elles admettent une limite finie en $+\infty$ si et seulement si elles sont majorées. D'après les hypothèses, c'est le cas pour $x\mapsto\int_{1}^{x}g(t)dt$. De plus, $h=\underset{+\infty}{o}(g)$. Alors, il existe un réel $a\in[1,+\infty[$, tel que $\forall\, x\in[a,+\infty[$, $h(x)\leq g(x)$ et :

$$\int_{1}^{x}h(t)dt=\int_{1}^{a}h(t)dt+\int_{a}^{x}h(t)dt\leq\int_{1}^{a}h(t)dt+\int_{a}^{x}g(t)dt\,.$$

Comme $x\mapsto\int_{1}^{x}g(t)dt$ est majorée, $x\mapsto\int_{a}^{x}g(t)dt$ aussi et donc, $x\mapsto\int_{1}^{x}h(t)dt$ l'est aussi. Ainsi :

$$\boxed{x\mapsto\int_{1}^{x}h(t)dt \text{ admet une limite finie quand } x\to+\infty.}$$

3) Remarquons que les séries $\sum\frac{1}{n\ln n}$ et $\sum\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}=\sum f(n)$ sont de même nature.

La fonction $f:x\mapsto\frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}$ appartient à $C^1([1,+\infty[,\mathbb{R})$ et $\forall\, x\in[1,+\infty[$:

$$f'(x)=-\frac{\ln(x+1)+1}{\left((x+1)\ln(x+1)\right)^2}\,.$$

Alors, $\forall\, x\in[1,+\infty[$:

$$|f'(x)|=\frac{1}{(x+1)^2}\left(\frac{1}{\ln(x+1)}+\frac{1}{\left(\ln(x+1)\right)^2}\right)\leq\frac{1}{(x+1)^2}\left(\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{(\ln 2)^2}\right).$$

Donc :

$$\int_{1}^{x}|f'(t)|\,dt\leq\left(\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{(\ln 2)^2}\right)\int_{1}^{x}\frac{dt}{(t+1)^2}=\left(\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{(\ln 2)^2}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x+1}\right).$$

Comme $\frac{1}{2}-\frac{1}{x+1}\leq\frac{1}{2}$, la fonction $x\mapsto\int_{1}^{x}|f'(t)|\,dt$ est majorée sur $[1,+\infty[$. Comme elle est croissante sur cet intervalle, elle admet une limite finie en $+\infty$.

La fonction f vérifie donc les hypothèses de la question 1, et ainsi, $\sum \frac{1}{n\ln n}$ et $\left(\int_1^n f(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont de même nature.

Or, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$:

$$\int_1^n f(t)dt=\int_1^n \frac{dt}{(t+1)\ln(t+1)}=\int_1^n \frac{\ln'(t+1)}{\ln(t+1)}dt=\left[\ln\left(\ln(t+1)\right)\right]_1^n=\ln\left(\ln(n+1)\right)-\ln(\ln 2)\,.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(\ln(n+1)\right)=+\infty$, la suite $\left(\int_1^n f(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers + ∞.

Finalement :

$$\boxed{\text{La série } \sum \frac{1}{n\ln n} \text{ diverge.}}$$

3) a. La fonction f est de classe C^1 sur $[1,+\infty[$ et $\forall\, x\in[1,+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{1}{x^2}\left(x\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}-\sin\sqrt{x}\right)=\frac{\cos\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}}-\frac{\sin\sqrt{x}}{x^2}\,.$$

Alors, $\forall\, x\in[1,+\infty[$, on a $\left|f'(x)\right|\le\frac{|\cos\sqrt{x}\,|}{2x\sqrt{x}}+\frac{|\sin\sqrt{x}\,|}{x^2}\le\frac{1}{2x^{3/2}}+\frac{1}{x^2}$ et :

$$\int_1^x\left|f'(t)\right|dt\le\int_1^x\left(\frac{1}{2t^{3/2}}+\frac{1}{t^2}\right)dt=\left[-\frac{1}{\sqrt{t}}-\frac{1}{t}\right]_1^x=2-\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}\le 2\,.$$

Ainsi, $x\mapsto\int_1^x\left|f'(t)\right|dt$ est croissante (car $\left|f'(x)\right|\ge 0$) et majorée sur $[1,+\infty[$, donc :

$$\boxed{x\mapsto\int_1^x\left|f'(t)\right|dt \text{ admet une limite finie quand } x\to+\infty\,.}$$

b. $\forall\, x\in[1,+\infty[$, en posant le changement de variable $u=\sqrt{t}$ (soit $t=u^2$ et $dt=2udu$), on a :

$$\int_1^x f(t)dt=\int_1^x\frac{\sin\sqrt{t}}{t}dt=\int_1^{\sqrt{x}}\frac{\sin u}{u^2}2udu=2\int_1^{\sqrt{x}}\frac{\sin u}{u}du\,.$$

En intégrant par parties, on obtient alors :

$$\int_1^x f(t)dt=2\left(\left[\frac{-\cos u}{u}\right]_1^{\sqrt{x}}-\int_1^{\sqrt{x}}-\frac{-\cos u}{u^2}du\right)=2\left(\cos 1-\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}-\int_1^{\sqrt{x}}\frac{\cos u}{u^2}du\right).$$

Ainsi, on a bien, $\forall\, x\in[1,+\infty[$:

$$\boxed{\int_1^x f(t)dt=2\int_1^{\sqrt{x}}\frac{\sin u}{u}du=2\left(\cos 1-\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}-\int_1^{\sqrt{x}}\frac{\cos u}{u^2}du\right)}$$

c. On a $\forall\, x\in[1,+\infty[$, $\int_1^{\sqrt{x}}\left|\frac{\cos u}{u^2}\right|du\le\int_1^{\sqrt{x}}\frac{du}{u^2}=1-\frac{1}{\sqrt{x}}<1$, donc, comme plus haut, on peut conclure que la fonction $x\mapsto\int_1^{\sqrt{x}}\left|\frac{\cos u}{u^2}\right|du$ admet une limite finie quand $x\to+\infty$. D'après le résultat admis, il en va de même pour $x \mapsto \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\cos u}{u^2} du$. Comme $\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 0$, la fonction $x \mapsto \int_1^x f(t)dt$ admet, elle aussi, une limite finie quand $x \to +\infty$. Ceci prouve que la suite $\left(\int_1^n f(t)dt\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

Or, d'après la question a, la fonction *f* vérifie les hypothèses de la question 1. Ceci nous permet de conclure que la série $\sum f(n)$ converge, autrement dit :

$$\boxed{\text{La série } \sum \frac{\sin \sqrt{n}}{n} \text{ converge.}}$$