DM de Mathématiques n° 1

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels. On suppose que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose :

$$S_n(a)=\sum_{k=0}^{n} a_k \quad \text{et} \quad S_n(b)=\sum_{k=0}^{n} b_k \, .$$

Dans le cas où ces séries convergent, on note pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$R_n(a)=\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \quad \text{et} \quad R_n(b)=\sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k \, .$$

1) On suppose que $\sum b_n$ converge.
   a. Montrer que si $a_n \underset{n\to+\infty}{=} o(b_n)$, $\sum a_n$ converge absolument et $R_n(a) \underset{n\to+\infty}{=} o\big(R_n(b)\big)$.
   b. Montrer que si $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$, alors $\sum a_n$ converge absolument et $R_n(a) \underset{n\to+\infty}{\sim} R_n(b)$.

2) On suppose que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et que la série $\sum a_n$ diverge.
   a. Montrer que si $a_n \underset{n\to+\infty}{=} o(b_n)$, alors $\sum b_n$ diverge et $S_n(a) \underset{n\to+\infty}{=} o\big(S_n(b)\big)$.
   b. Montrer que si $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$, alors $\sum b_n$ diverge et $S_n(a) \underset{n\to+\infty}{\sim} S_n(b)$.

3) Prouver, *sans utiliser la comparaison série-intégrale*, que pour tout entier $p\geq 2$:

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^p} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(p-1)n^{p-1}} \, .$$

☺ *On pourra remarquer que* :

$$\frac{1}{n^p} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n(n+1)...(n+p-1)} = \frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{n(n+1)...(n+p-2)} - \frac{1}{(n+1)...(n+p-1)}\right).$$

4) Déterminer le développement asymptotique à deux termes (sans compter le terme négligeable) de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^p}$.

☺ *On pourra poser* $u_n=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^p}-\frac{1}{p-1}\frac{1}{n^{p-1}}$ *et s'intéresser à la série* $\sum(u_{n+1}-u_n)$.

5) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $H_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

Prouver qu'il existe quatre réels γ, a, b et c que l'on donnera tels que :

$$H_n=\ln n+\gamma+\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{c}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

où γ est une constante, appelée constante d'Euler, que l'on ne cherchera pas à déterminer.