

Exemple de séries entière et équations différentielles

Equation :

$$(E): \quad xy'' - (1+x)y' - y = 0.$$

Soit f une éventuelle solution développable en série entière sur $] -r, r[$ (avec $r > 0$).

f est de classe C^∞ sur $] -r, r[$ avec :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n \geq 0} a_n x^n \\ f'(x) &= \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1} = \sum_{n \geq 0} (n+1) a_{n+1} x^n \\ x f'(x) &= \sum_{n \geq 0} n a_n x^n \\ x f''(x) &= x \sum_{n \geq 2} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n \geq 0} (n+1) n a_{n+1} x^n \end{aligned}$$

On a pour tout $x \in] -r, r[$:

$$\begin{aligned} & x f''(x) - (1+x) f'(x) - f(x) = 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{n \geq 0} (n+1) n a_{n+1} x^n - \sum_{n \geq 0} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n \geq 0} n a_n x^n - \sum_{n \geq 0} a_n x^n = 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{n \geq 0} [(n^2 - 1) a_{n+1} - (n+1) a_n] x^n = 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{n \geq 0} (n+1) [(n-1) a_{n+1} - a_n] x^n = 0 \end{aligned}$$

Par unicité du DSE, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(n+1) [(n-1) a_{n+1} - a_n] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (n-1) a_{n+1} = a_n \quad (*).$$

Ceci donne $a_1 = 0$ (en prenant $n = 1$) et $a_0 = -a_1 = 0$ (en prenant $n = 0$) et pour tout $n \geq 2$:

$$a_{n+1} = \frac{1}{n-1} a_n.$$

On prouve par récurrence que si $a_2 = 0$, alors $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et si $a_2 \neq 0$, alors $a_n \neq 0$ pour tout $n \geq 2$.

Dans ce dernier cas, on peut écrire pour tout $n \geq 3$:

$$\frac{a_n}{a_2} = \prod_{k=2}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \prod_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k-1} = \frac{1}{(n-2)!}.$$

Soit pour tout $n \geq 2$:

$$a_n = \frac{a_2}{(n-2)!}.$$

Donc :

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_2}{(n-2)!} x^n = \sum_{n \geq 0} \frac{a_2}{n!} x^{n+2} = a_2 x^2 \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} = a_2 x^2 e^x.$$

Equation :

$$(E): 2(1+x)^2 y'' + (1+x)y' - y = 0.$$

Soit f une éventuelle solution développable en série entière sur $] -r, r[$ (avec $r > 0$).

f est de classe C^∞ sur $] -r, r[$ avec :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n \geq 0} a_n x^n \\ f'(x) &= \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1} = \sum_{n \geq 0} (n+1) a_{n+1} x^n \\ f''(x) &= \sum_{n \geq 2} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n \geq 0} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n \end{aligned}$$

On a pour tout $x \in] -r, r[$:

$$\begin{aligned} &2(1+x)^2 f''(x) + (1+x)f'(x) - f(x) = 0 \\ \Leftrightarrow &2f''(x) + 4xf'(x) + 2x^2 f''(x) + f'(x) + xf'(x) - f(x) = 0 \\ \Leftrightarrow &2 \sum_{n \geq 0} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + 4x \sum_{n \geq 1} (n+1) n a_{n+1} x^{n-1} + 2x^2 \sum_{n \geq 2} n(n-1) a_n x^{n-2} \\ &\quad + \sum_{n \geq 0} (n+1) a_{n+1} x^n + x \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1} - \sum_{n \geq 0} a_n x^n = 0 \\ \Leftrightarrow &\sum_{n \geq 0} 2(n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n \geq 1} 4(n+1) n a_{n+1} x^n + \sum_{n \geq 2} 2n(n-1) a_n x^n \\ &\quad + \sum_{n \geq 0} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n \geq 1} n a_n x^n - \sum_{n \geq 0} a_n x^n = 0 \\ \Leftrightarrow &\sum_{n \geq 0} 2(n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n \geq 0} 4(n+1) n a_{n+1} x^n + \sum_{n \geq 0} 2n(n-1) a_n x^n \\ &\quad + \sum_{n \geq 0} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n \geq 0} n a_n x^n - \sum_{n \geq 0} a_n x^n = 0 \\ \Leftrightarrow &\sum_{n \geq 0} [2(n+2)(n+1) a_{n+2} + 4(n+1) n a_{n+1} + 2n(n-1) a_n + (n+1) a_{n+1} + n a_n - a_n] x^n = 0 \\ \Leftrightarrow &\sum_{n \geq 0} [2(n+2)(n+1) a_{n+2} + (n+1)(4n+1) a_{n+1} + (2n+1)(n-1) a_n] x^n = 0 \end{aligned}$$

Par unicité du DSE, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$2(n+2)(n+1) a_{n+2} + (n+1)(4n+1) a_{n+1} + (2n+1)(n-1) a_n = 0 \quad (*).$$

C'est une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 mais, malheureusement pas à coefficients constants, donc il n'y a pas de méthode toute faite (pour vous) : il faut ruser.

1^{ère} astuce (assez courante) : on pose $u_n = n! a_n$ et on multiplie la relation de récurrence par $n!$, ce qui donne :

$$2u_{n+2} + (4n+1)u_{n+1} + (2n+1)(n-1)u_n = 0.$$

2^{ème} astuce (de l'observation : $4n+1 = 2n+2n+1 \dots$) : récrire la relation ci-dessus sous la forme :

$$2(u_{n+2} + n u_{n+1}) + (2n+1)(u_{n+1} + (n-1)u_n) = 0.$$

Puis, on pose $v_n = u_{n+1} + (n-1)u_n$, ce qui donne pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$2v_{n+1} + (2n+1)v_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v_{n+1} = -\frac{2n+1}{2} v_n.$$

On prouve alors par récurrence que $v_n = (-1)^n \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2^n} v_0 = (-1)^n \frac{(2n)!}{4^n n!} v_0$, soit :

$$u_{n+1} + (n-1)u_n = (-1)^n \frac{(2n)!}{4^n n!} \alpha \quad (\text{avec } \alpha = v_0 = u_1 - u_0 = a_1 - a_0).$$

3^{ème} astuce (similaire à la première) : on réécrit la relation ci-dessus, pour tout $n \geq 2$:

$$-\frac{(-1)^{n+1}u_{n+1}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^n u_n}{(n-2)!} = \alpha \frac{(2n)!}{4^n n! (n-1)!} = \alpha n \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n}$$

Soit avec $w_n = \frac{(-1)^n u_n}{(n-2)!}$, pour tout $n \geq 2$:

$$w_n - w_{n+1} = \alpha n \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n}.$$

Donc, par télescopage, pour tout $n \geq 3$:

$$w_2 - w_n = \sum_{k=2}^{n-1} (w_k - w_{k+1}) = \alpha \sum_{k=2}^{n-1} k \binom{2k}{k} \frac{1}{4^k} = \alpha \sum_{k=1}^{n-1} k \binom{2k}{k} \frac{1}{4^k} - \frac{1}{2} \alpha.$$

Avec $w_n = \frac{(-1)^n u_n}{(n-2)!} = \frac{(-1)^n n!}{(n-2)!} a_n = (-1)^n n(n-1) a_n$, on a $w_2 = 2a_2 = \frac{1}{2} a_0 - \frac{1}{2} a_1 = -\frac{1}{2} \alpha$, donc pour tout $n \geq 3$:

$$w_n = -\alpha \sum_{k=1}^{n-1} k \binom{2k}{k} \frac{1}{4^k}.$$

Et la formule reste vraie $n = 2$, donc avec $-\alpha = a_0 - a_1$, on obtient pour tout $n \geq 2$:

$$a_n = (a_0 - a_1) \frac{(-1)^n}{n(n-1)} S_{n-1} \quad \text{avec} \quad S_n = \sum_{k=1}^n k \binom{2k}{k} \frac{1}{4^k}.$$

L'énoncé dit que $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \binom{2n}{n} \frac{x^n}{4^n}$ est solution de (E), donc que $\left((-1)^n \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ doit être

solution du problème. Les deux premiers termes de cette suite sont $a_0 = 1$ et $a_1 = -\frac{1}{2}$ (donc $a_0 - a_1 = \frac{3}{2}$).

Or, la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence linéaire double (la relation (*)), donc elle est parfaitement définie par ses deux premiers termes.

Alors, si on pose $a_0 = 1$ et $a_1 = -\frac{1}{2}$ (donc $a_0 - a_1 = \frac{3}{2}$), on doit avoir $a_n = (-1)^n \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n}$ pour tout $n \geq 2$.

On vérifie que c'est le cas, c'est-à-dire que pour tout $n \geq 2$, $\frac{3}{2} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} S_{n-1} = (-1)^n \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n}$, soit :

$$S_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} k \binom{2k}{k} \frac{1}{4^k} = \frac{2}{3} n(n-1) \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n}.$$

En effet, on a bien $S_{2-1} = \frac{1}{2} = \frac{2}{3} 2(2-1) \binom{4}{2} \frac{1}{4^2}$ et pour tout $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} (n+1)n \binom{2n+2}{n+1} \frac{1}{4^{n+1}} - \frac{2}{3} n(n-1) \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n} &= \frac{2}{3} (n+1)n \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n} - \frac{2}{3} n(n-1) \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n} \\ &= \frac{2}{3} n \left[(n+1) \frac{2(n+1)(2n+1)}{4(n+1)^2} - (n-1) \right] \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n} \\ &= \frac{2}{3} n \left[\frac{2n+1}{2} - n + 1 \right] \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n} \\ &= n \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n} = S_n - S_{n-1} \end{aligned}$$

Ce qui prouve le résultat en faisant une somme télescopique.

Autre méthode à partir de la relation $u_{n+1} + (n-1)u_n = (-1)^n \frac{(2n)!}{4^n n!} \alpha$ (avec $\alpha = a_1 - a_0$) et avec $u_n = n!a_n$, on peut écrire pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(n+1)a_{n+1} + (n-1)a_n = \alpha(-1)^n \frac{(2n)!}{n!n!} \frac{1}{4^n} = \alpha(-1)^n \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n}.$$

Avec $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n} x^n$ sur $] -1, 1[$, on a pour tout $x \in] -R, R[$ avec $R = \min(r, 1)$:

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} (n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n \geq 0} (n-1)a_nx^n &= \alpha \sum_{n \geq 0} (-1)^n \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n} x^n \\ \Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} (n+1)a_{n+1}x^n + x \sum_{n \geq 1} na_nx^{n-1} - \sum_{n \geq 0} a_nx^n &= \frac{\alpha}{\sqrt{1+x}} \\ \Leftrightarrow (1+x)f'(x) - f(x) &= \frac{\alpha}{\sqrt{1+x}} \end{aligned}$$

Donc f est solution de $y' - \frac{1}{1+x}y = \frac{\alpha}{(1+x)\sqrt{1+x}}$ sur $] -R, R[$.

Les solutions de $y' - \frac{1}{1+x}y = 0$ sont de la forme $x \mapsto k(1+x)$ et la méthode de variation de la constante donne une solution particulière $x \mapsto -\frac{2}{3} \frac{\alpha}{\sqrt{1+x}}$, donc :

$$f(x) = k(1+x) - \frac{2}{3} \frac{\alpha}{\sqrt{1+x}}.$$

Et toujours avec $\alpha = a_1 - a_0$, on a $f(0) = a_0 = k - \frac{2}{3}(a_1 - a_0)$, donc :

$$k = \frac{1}{3}(2a_1 + a_0).$$

Et ainsi $r = R = 1$ et pour tout $x \in] -1, 1[$:

$$f(x) = a_0 + a_1x - \frac{2}{3}(a_1 - a_0) \sum_{n \geq 2} (-1)^n \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n} x^n.$$

Et, pour tout $n \geq 2$:

$$a_n = -\frac{2}{3}(a_1 - a_0)(-1)^n \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n}.$$