Résumé du chapitre 10 : Intégration sur un intervalle

Dans tout le chapitre, et sauf mention contraire, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et f est une fonction définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I - Fonctions continues par morceaux

I-1. Définitions

Rappels :

- Une subdivision d'un segment $[a,b]$ est une famille $\sigma=(a_0,a_1,...,a_n)$ telle que $a_0=a$, $a_n=b$ et pour tout $k\in[\![0;n-1]\!]$, $a_k<a_{k+1}$.
- Une subdivision $\sigma=(a_0,a_1,...,a_n)$ d'un segment $[a,b]$ est régulière si pour tout $k\in[\![0;n-1]\!]$, $a_{k+1}-a_k$ ne dépend pas de *k* et vaut alors $\frac{b-a}{n}$. Dans ce cas, on a pour tout $k\in[\![0;n]\!]$:

$$a_k=a+k\frac{b-a}{n}.$$

Définitions :

Une fonction *f* définie sur un segment $[a,b]$ est dite continue par morceaux (cpm) sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $\sigma=(a_0,a_1,...,a_n)$ de $[a,b]$ telle que pour tout $k\in[\![0;n-1]\!]$, *f* est continue sur $]a_k,a_{k+1}[$ et admet une limite finie en a_k^+ et en a_{k+1}^-. La subdivision σ est dite adaptée à *f*.

Une fonction *f* est continue par morceaux sur un intervalle *I* si elle l'est sur tout segment inclus dans *I*.

Notation : On note $\mathcal{CM}(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur *I* et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Propriété :

- $\mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}([a,b],\mathbb{K})$ (fonctions bornées sur $[a,b]$), stable par produit.
- $\mathcal{CM}(I,\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$, stable par produit.

I-2. Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

Définition :

Soit $f\in\mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})$ et $\sigma=(a_0,a_1,...,a_n)$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à *f*.

L'intégrale de *f* sur $[a,b]$, notée $\int_{[a,b]}f$ ou $\int_a^b f$ ou $\int_a^b f(t)dt$, est $\sum_{k=0}^{n-1}\int_{[a_k,a_{k+1}]}\tilde{f}_k$ avec :

$$\tilde{f}_k : x\mapsto\begin{cases}\lim_{a_k^+} f & \text{en } a_k\\ f(x) & \text{sur }]a_k,a_{k+1}[\,.\\ \lim_{a_{k+1}^-} f & \text{en } a_{k+1}\end{cases}$$

Propriétés :

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$.

- *Linéarité de l'intégrale* : Pour tout $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, on a $\int_{[a,b]}(\lambda f+\mu g)=\lambda\int_{[a,b]}f+\mu\int_{[a,b]}g$.
- *Positivité* : Si f est réelle et positive sur $[a,b]$, alors $\int_{[a,b]}f\geq 0$.
- *Croissance de l'intégrale* : Si $f\leq g$ sur $[a,b]$, alors $\int_{[a,b]}f\leq\int_{[a,b]}g$.
- *Inégalité de la valeur absolue ou du module* : $\left|\int_{[a,b]}f\right|\leq\int_{[a,b]}|f|$.
- *Inégalités de la moyenne* : $\left|\int_{[a,b]}f\,g\right|\leq\sup_{[a,b]}|f|\int_{[a,b]}|g|$.

  Si m est un minorant et M est un majorant de f sur $[a,b]$ (f à valeurs réelles), alors :

$$m\leq\frac{1}{b-a}\int_{[a,b]}f\leq M\ .$$

- *Relation de Chasles* : Pour tout $c\in[a,b]$, $\int_{[a,b]}f=\int_{[a,c]}f+\int_{[c,b]}f$.
- *Inégalité de Cauchy-Schwarz* : $\left(\int_{[a,b]}f\times g\right)^2\leq\left(\int_{[a,b]}f^2\right)\times\left(\int_{[a,b]}g^2\right)$.
- *Changement de variable* : Si φ est une bijection de classe C^1 de I dans J avec $[a,b]\subset J$, alors :

$$\int_a^b f(t)dt=\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)}\varphi'(u)f\left(\varphi(u)\right)du\ .$$

II - Intégrales généralisées ou impropres

II-1. Intégrales généralisées sur $[a,+\infty[$

Dans cette partie, a est un réel fixé.

Définitions :

Si f est une application continue par morceaux sur $[a,+\infty[$ et à valeurs complexes.

L'intégrale $\int_a^{+\infty}f(t)dt$ converge ou est convergente si la fonction $x\mapsto\int_a^x f(t)dt$ admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$. Si tel est le cas, on note $\int_a^{+\infty}f(t)dt$ ou $\int_a^{+\infty}f$ cette limite.

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale diverge ou est divergente.

Propriété :

Si f est continue par morceaux sur $[a,+\infty[$ et à valeurs positives, alors $\int_a^{+\infty}f(t)dt$ converge si et seulement si $x\mapsto\int_a^x f(t)dt$ est majorée.

Corollaire :

Si f et g sont continues par morceaux sur $[a,+\infty[$ et $0 \le f \le g$, alors :

- si $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ converge, alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ aussi ;
- si $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ diverge, $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ aussi.

II-2. Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque

Soient $I = |a,b|$ un intervalle de $\mathbb{R}$ avec $| =]$ ou $[$, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $a \le b$, et f une fonction à valeurs réelles ou complexes, continue par morceaux sur I.

Définitions :

L'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est dite impropre en a (*resp.* en b) si $a \notin I$ (*resp.* $b \notin I$).

On dit qu'elle converge ou est convergente si, pour tout $c \in I$, les fonctions $x \mapsto \int_x^c f(t)dt$ et $y \mapsto \int_c^y f(t)dt$ admettent une limite finie lorsque x tend vers a et y tend vers b.

Dans ce cas, on note $\int_a^b f(t)dt$, ou $\int_a^b f$, ou encore $\int_I f$, la limite de $\int_x^y f(t)dt$ quand $x \to a$ et $y \to b$.

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale diverge ou est divergente.

Notation : Par convention, $[f]_a^b = \lim_b f - \lim_a f$ et on utilise cette notation quand les deux limites existent et sont finies.

II-3. Intégrales de référence

a. Intégrales de Riemann :

Définition :

Les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ et $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ sont appelées intégrales de Riemann.

Propriété :

L'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$, impropre en 0, converge si et seulement si $\alpha < 1$ et vaut $\frac{1}{1-\alpha}$ dans ce cas.

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$, impropre en $+\infty$, converge si et seulement si $\alpha > 1$ et vaut $\frac{1}{\alpha - 1}$ dans ce cas.

b. Autres intégrales de référence :

Propriété :

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}dt$ converge si et seulement si $\alpha > 0$ et dans ce cas, $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}dt = \frac{1}{\alpha}$.

Propriété :

> Pour tout réel $a > 0$, l'intégrale $\int_0^a \ln t\, dt$ converge et vaut $\int_0^a \ln t\, dt = a \ln a - a$.

II-4. Propriétés des intégrales généralisées

a. Propriétés usuelles :

Propriétés :

> Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $I = \left| a,b \right|$ (comme défini plus haut) telles que les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ convergent.
>
> - *Linéarité de l'intégrale* : Pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$, $\int_a^b (\lambda f + \mu g)$ converge et $\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$.
> - *Positivité* : Si f est réelle et positive sur I, alors $\int_a^b f \geq 0$.
>
>   De plus, si f est *continue* sur I, alors $\int_I f = 0$ si et seulement si f est nulle sur I.
> - *Croissance de l'intégrale* : Si $f \leq g$ sur I, alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.
> - *Relation de Chasles* : Pour tout $c \in I$, $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

b. Changement de variable :

Propriété :

> Soit $f : I \to \mathbb{C}$, continue par morceaux sur I et φ une bijection strictement monotone de classe C^1 d'un intervalle $J = \left| \alpha,\beta \right|$ dans I.
>
> L'intégrale $\int_\alpha^\beta f\left(\varphi(u)\right)\varphi'(u)du$ converge si et seulement si $\int_a^b f(t)dt$ est converge et, dans ce cas, les deux intégrales sont égales.

c. Intégration par parties :

Soient f et g deux fonctions de classe C^1 sur I.

Si $\left[f(t)g(t)\right]_a^b$ converge, alors les intégrales $\int_a^b f(t)g'(t)dt$ et $\int_a^b f'(t)g(t)dt$ sont de même nature et en cas de convergence, on a :

$$\int_a^b f(t)g'(t)dt = \left[f(t)g(t)\right]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)dt.$$

III - Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables

III-1. Généralités

Définitions :

Soit f une fonction continue par morceaux sur $I = \left| a,b \right|$.

On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente si l'intégrale $\int_a^b \left|f(t)\right|dt$ converge.

Dans ce cas, on dit que la fonction f est intégrable sur I.

On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est semi-convergente si elle converge sans que $\int_a^b \left|f(t)\right|dt$ converge.

III-2. Propriétés de comparaison

Lemme :

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux et positives sur $I = \left| a,b \right|$ telles que $f \leq g$.

Si $\int_a^b g(t)dt$ converge, alors $\int_a^b f(t)dt$ aussi et $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$.

Théorème :

Soit f une fonction continue par morceaux sur $I = \left| a,b \right|$.

Si l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente, alors elle est convergente et dans ce cas, on a :

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b \left|f(t)\right|dt .$$

Propriétés :

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b[$ avec $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$.

- Si $|f| \leq |g|$, alors si g est intégrable sur $[a,b[$, f l'est aussi avec $\int_a^b |f| \leq \int_a^b |g|$ et si f n'est pas intégrable sur $[a,b[$, g ne l'est pas non plus.
- Si $f = \underset{b}{O}(g)$ ou $f = \underset{b}{o}(g)$, on a les mêmes résultats que ci-dessus.
- Si $f \underset{b}{\sim} g$, alors f est intégrable sur $[a,b[$ si et seulement si g l'est.

Corollaire :

Si a et b sont finis et f est continue par morceaux sur $I = [a,b[$ (*resp.* $I =]a,b]$, *resp.* $I =]a,b[$) et admet une limite finie en b (*resp.* en a, *resp.* en a et b), alors $\int_a^b f(t)dt$ converge.

Propriété : *Inégalité de Cauchy-Schwarz*

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $I = \left| a,b \right|$ (comme défini plus haut) telles que les intégrales $\int_a^b f^2$ et $\int_a^b g^2$ convergent. Alors $\int_a^b fg$ converge et :

$$\left(\int_a^b fg\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2\right) \times \left(\int_a^b g^2\right).$$

III-3. Espace $L^1(I,\mathbb{K})$ des fonctions intégrables

Notation : On note $L^1(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions définies sur *I*, à valeurs dans $\mathbb{K}$, continues par morceaux et intégrables sur *I*.

Propriétés :

Muni des lois usuelles, $L^1(I,\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

L'application $f \mapsto \int_a^b |f|$ est une norme sur $L^1(I,\mathbb{K}) \cap C^0(I,\mathbb{K})$.