# *Résumé du chapitre 11 : Intégrales à paramètre*

*Dans tout ce qui suit, sauf mention contraire, I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*

## Suites et séries de fonctions intégrables

*Théorème* : (*de convergence dominée*)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions définies sur *I*.

- Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n$ est continue par morceaux sur *I*.
- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur *I* vers une fonction *f* continue par morceaux sur *I*.
- Il existe une fonction φ, continue par morceaux et intégrable sur *I*, telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $t\in I$, on a $|f_n(t)|\le\varphi(t)$.

Alors :

$$f_n \text{ et } f \text{ sont intégrables sur } I \quad\text{et}\quad \int_I f_n(t)dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f(t)dt\,.$$

*Théorème* : (*d'intégration terme à terme*)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions définies sur *I*.

- Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n$ est continue par morceaux et intégrable sur *I*.
- La série $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction *f*, continue par morceaux sur *I*.
- La série $\sum \int_I |f_n|$ converge.

Alors :

$$f \text{ est intégrable sur } I \quad\text{et}\quad \int_I f(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n(t)dt\,.$$

## Intégrales à paramètre

*Théorème* : (*de convergence dominée à paramètre continu*)

Soit $f:(x,t)\mapsto f(x,t)$ une fonction définie sur $I\times J$, où *I* et *J* sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $a\in I$ ou $a$ est une extrémité, éventuellement infinie, de *I*.

- pour tout $t\in J$, $f(x,t)\xrightarrow[x\to a]{}\ell(t)$ ;
- pour tout $x\in I$, $t\mapsto f(x,t)$ et $t\mapsto \ell(t)$ sont continues par morceaux sur *J* ;
- il existe une fonction φ positive, continue par morceaux et intégrable sur *J*, telle que pour tout $(x,t)\in I\times J$, on ait $|f(x,t)|\le\varphi(t)$.

Alors, pour tout $x\in I$, $t\mapsto f(x,t)$ et $\ell$ sont intégrables sur *J* et $\int_J f(x,t)\,dt \xrightarrow[x\to a]{} \int_J \ell(t)\,dt$.

*Théorème* : (*continuité*)

Soit $f:(x,t)\mapsto f(x,t)$ une fonction définie sur $I\times J$.

- Pour tout $x\in I$, $t\mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur *J*.
- Pour tout $t\in J$, $x\mapsto f(x,t)$ est continue sur *I*.
- Il existe une fonction $\varphi$ positive, continue par morceaux et intégrable sur *J*, telle que pour tout $(x,t)\in I\times J$, on ait $\left|f(x,t)\right|\leq\varphi(t)$.

Alors :

Pour tout $x\in I$, $t\mapsto f(x,t)$ est intégrable sur *J* et $x\mapsto\int_J f(x,t)dt$ est continue sur *I*.

*Théorème* : (*de dérivation sous le signe somme*)

Soit $f:(x,t)\mapsto f(x,t)$ une fonction définie sur $I\times J$.

- Pour tout $x\in I$, $t\mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur *J*.
- Pour tout $t\in J$, $x\mapsto f(x,t)$ est de classe $C^1$ sur *I*.
- Pour tout $x\in I$, $t\mapsto\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur *J*.
- Il existe une fonction $\varphi$ positive, continue par morceaux et intégrable sur *J*, telle que pour tout $(x,t)\in I\times J$, on ait $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|\leq\varphi(t)$.

Alors :

- Pour tout $x\in I$, $t\mapsto\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur *J*.
- La fonction $x\mapsto\int_J f(x,t)dt$ est de classe $C^1$ sur *I*, de dérivée $x\mapsto\int_J\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$.

*Théorème* : (*extension aux fonctions de classe* $C^k$)

Soient $f:(x,t)\mapsto f(x,t)$ une fonction définie sur $I\times J$ et $k\in\mathbb{N}^*$.

- Pour tout $t\in J$, $x\mapsto f(x,t)$ est de classe $C^k$ sur *I*.
- Pour tout $x\in I$ et tout $i\in[\![0,k-1]\!]$, $t\mapsto\dfrac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur *J*.
- Pour tout $x\in I$, $t\mapsto\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur *J*.
- Il existe une fonction $\varphi$ positive, continue par morceaux et intégrable sur *J*, telle que pour tout $(x,t)\in I\times J$, on ait $\left|\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right|\leq\varphi(t)$.

Alors :

- Pour tout $x\in I$, $t\mapsto\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est intégrable sur *J*.
- La fonction $x\mapsto\int_J f(x,t)dt$ est de classe $C^k$ sur *I*, de dérivées successives $x\mapsto\int_J\dfrac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,t)dt$.

<u>*Corollaire*</u> : (*classe* $C^\infty$)

Soit $f:(x,t)\mapsto f(x,t)$ une fonction définie sur $I\times J$ telle que pour tout $k\in\mathbb{N}$ :

- pour tout $t\in J$, $x\mapsto f(x,t)$ est de classe $C^k$ sur *I* ;
- pour tout $x\in I$, $t\mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur *J* ;
- il existe une fonction $\varphi_k$ positive, continue par morceaux et intégrable sur *J*, telle que pour tout $(x,t)\in I\times J$, on ait $\left|\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right|\leq \varphi_k(t)$.

Alors :

- Pour tout $k\in\mathbb{N}$ et tout $x\in I$, $t\mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est intégrable sur *J*.
- La fonction $x\mapsto \int_J f(x,t)dt$ est de classe $C^\infty$ sur *I*, de dérivées successives $x\mapsto \int_J \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)dt$.