# *Résumé du chapitre 14 : Espérance et variance*

*Dans tout le chapitre, on se place dans espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et X est une variable aléatoire discrète ( $X(\Omega)$ est au plus dénombrable) et à valeurs réelles.*

## I - Espérance

### I-1. Définitions

*Définition* :

On dit que $X$ est d'espérance finie si la famille $\left(xP(X=x)\right)_{x\in X(\Omega)}$ est sommable.

Si tel est le cas, on appelle espérance de $X$, notée $E(X)$, le réel $E(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} xP(X=x)$.

*Définition* : (*hors programme*)

Sous réserve de sommabilité, le moment d'ordre $r$ de $X$ (avec $r \in \mathbb{N}^*$) est $E(X^r) = \sum_{x\in X(\Omega)} P(X=x)x^r$.

### I-2. Propriétés de l'espérance

*Propriété* :

Si $X$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et d'espérance finie, alors $E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n)$.

*Propriété* : *Théorème du transfert*

Soit $f$ une application définie sur $X(\Omega)$ et à valeurs réelles.

La variable aléatoire $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $\left(f(x)P(X=x)\right)_{x\in X(\Omega)}$ est sommable et, dans ce cas, on a :

$$E\left(f(X)\right) = \sum_{x\in X(\Omega)} f(x)P(X=x).$$

*Propriétés* :

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires réelles telles que $|X| \leq Y$. Si $Y$ est d'espérance finie, alors $X$ aussi.

*Propriétés* :

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires réelles d'espérance finie.

- *Linéarité de l'espérance* : pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $E(aX+bY) = aE(X)+bE(Y)$.
- *Positivité de l'espérance* : si $X \geq 0$ (pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \geq 0$) alors $E(X) \geq 0$.
- *Croissance de l'espérance* : si $X \leq Y$ (pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \leq Y(\omega)$) alors $E(X) \leq E(Y)$.

*Définition* :

Si $X$ est d'espérance finie, la variable $X - E(X)$ est une variable aléatoire dite centrée.

*Propriété* :

Si $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes et d'espérances finies, alors $XY$ est d'espérance finie et :

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

*Propriété* : *Inégalité de Markov*

Si $X$ est une variable aléatoire réelle positive sur $\Omega$ et d'espérance finie, alors pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ :

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

### I-3. Espérance des lois usuelles

*Propriété* :

- Si $X$ suit une loi uniforme avec $X(\Omega) = \{x_1, ..., x_n\}$, alors $E(X) = \dfrac{x_1 + ... + x_n}{n}$.
- Si $X$ suit une loi de Bernoulli avec $X(\Omega) = \{a, b\}$ et $P(X = a) = p$, alors $E(X) = pa + (1-p)b$.
- Si $X$ suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$, alors $E(X) = np$.
- Si $X$ suit une loi géométrique $\mathscr{G}(p)$, alors $E(X) = \dfrac{1}{p}$.
- Si $X$ suit une loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$, alors $E(X) = \lambda$.

## II - Variance

### II-1. Définition

*Propriété* :

Si la variable aléatoire $X^2$ est d'espérance finie, alors $X$ est elle-même d'espérance finie.

*Définitions* :

Si $X^2$ est d'espérance finie, la variance de $X$ est $V(X) = E\left(\left[X - E(X)\right]^2\right)$ et l'écart-type de $X$ est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

*Propriété* : *Formule de Koenig-Huygens*

Dans les hypothèses précédentes :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

### II-2. Propriétés de la variance

*Propriété* :

Soit $X$ est une variable aléatoire réelle admettant une variance finie.

Pour tous réels $a$ et $b$, la variable aléatoire $aX+b$ admet une variance finie et on a :

$$V(aX+b)=a^2V(X).$$

*Définition* :

Si $X$ admet une variance non nulle, alors la variable $\dfrac{X}{\sigma(X)}$ est appelée variable réduite.

*Propriété* : *Inégalité de Bienaymé-Tchebychev*

On suppose que $X$ admet une variance. Pour tout $a\in\mathbb{R}_+^*$ :

$$P\left(\left|X-E(X)\right|\geq a\right)\leq\frac{V(X)}{a^2}.$$

### II-3. Variance des lois usuelles

*Propriété* :

- Si $X$ suit une loi de Bernoulli avec $X(\Omega)=\{a,b\}$ et $P(X=a)=p$, alors $V(X)=(b-a)^2p(1-p)$.
- Si $X$ suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$, alors $V(X)=np(1-p)$.
- Si $X$ suit une loi géométrique $\mathscr{G}(p)$, alors $V(X)=\dfrac{1-p}{p^2}$.
- Si $X$ suit une loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$, alors $V(X)=\lambda$.

### II-4. Covariance

*Dans cette partie, on considère deux variables aléatoires réelles discrètes X et Y.*

*Lemme* :

Si $X^2$ et $Y^2$ sont d'espérance finie, la variable $XY$ l'est aussi.

*Définitions* :

Si $X^2$ et $Y^2$ soient d'espérance finie, on appelle covariance de $X$ et $Y$ le réel :

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E\left[\big(X-E(X)\big)\big(Y-E(Y)\big)\right].$$

*Propriété* :

On a : $\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$.

*Propriétés* :

La covariance est symétrique et bilinéaire. Autrement dit :

- $\text{cov}(X,Y) = \text{cov}(Y,X)$.
- Si $X_1$, $X_2$ et $Y$ sont trois variables aléatoires réelles discrètes dont le carré est d'espérance finie, alors pour tous réels $a$ et $b$, on a :

$$\text{cov}(aX_1 + bX_2, Y) = a\,\text{cov}(X_1,Y) + b\,\text{cov}(X_2,Y)$$
$$\text{cov}(Y, aX_1 + bX_2) = a\,\text{cov}(Y,X_1) + b\,\text{cov}(Y,X_2)$$

*Propriété* :

Pour tous réels $a$ et $b$, on a : $V(aX+bY) = a^2V(X) + b^2V(Y) + 2ab\,\text{cov}(X,Y)$.

*Propriété* :

Si $X$ et $Y$ sont indépendantes, alors : $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.

*Propriété* : *Inégalité de Cauchy-Schwarz*

Si $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires telles que $E(X^2)$ et $E(Y^2)$ existent, alors :

$$|E(XY)| \leq \sqrt{E(X^2)}\sqrt{E(Y^2)}.$$

Et on a égalité si et seulement si $X$ et $Y$ sont proportionnelles avec probabilité de 1.

*Propriété* :

Si $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires réelles discrètes telles que $X_i^2$ est d'espérance finie pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, alors :

$$V(X_1 + \ldots + X_n) = V(X_1) + \ldots + V(X_n) + 2\sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{cov}(X_i, X_j).$$

Et, si $X_1, \ldots, X_n$ sont deux à deux indépendantes :

$$V(X_1 + \ldots + X_n) = V(X_1) + \ldots + V(X_n).$$

## II-5. Loi faible des grands nombres

*Théorème* : *Loi faible des grands nombres*

Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires i.i.d. de variance finie, alors, en posant $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, $m = E(X_1)$ et $\sigma = \sigma(X_1)$, on a pour tout réel $\varepsilon > 0$ :

$$P\left(\left|\frac{1}{n}S_n - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \quad \text{et} \quad P\left(\left|\frac{1}{n}S_n - m\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

# III - Espérance, variance et fonction génératrice

## III-1. Espérance et fonction génératrice

*Propriété* :

La variable aléatoire $X$ admet une espérance finie $E(X)$ si et seulement si $G_X$ est dérivable en 1.

Si tel est le cas, on a alors :

$$E(X) = G_X'(1).$$

## III-2. Variance et fonction génératrice

*Propriété* :

La variable aléatoire $X$ admet une variance si et seulement si $G_X$ est deux fois dérivable en 1.

Si tel est le cas, on a alors :

$$V(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - G_X'(1)^2.$$