Résumé du chapitre 18 : Applications géométriques des fonctions vectorielles

I - Arcs paramétrés

I-1. Définition

Définitions :

> Soit $t \mapsto \vec{f}(t)$ une application définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.
>
> L'arc paramétré ou courbe paramétrée associé(e) à $\vec{f}$ est l'ensemble des points $M(t)$ du $\mathbb{R}^n$ tels que pour tout $t \in D$, on a $\overrightarrow{OM}(t) = \vec{f}(t)$ où O est une origine de $\mathbb{R}^n$ (considéré ici comme un espace affine).
>
> Si $\vec{f}$ est de classe C^k, avec $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, on dit que l'arc paramétré est de classe C^k.

Dans la suite, le plan affine usuel est muni de son repère orthonormé direct canonique $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$) et, pour tout $t \in D$, on note $x(t)$ et $y(t)$ les coordonnées de $\vec{f}(t)$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$. On a donc $\vec{f} : t \mapsto (x(t), y(t))$ et $\overrightarrow{OM}(t) = \vec{f}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$.

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe paramétrée associée à $\vec{f}$

Tout ceci se généralise à $\vec{f} : t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ dans $\mathbb{R}^3$, $\vec{f} : t \mapsto (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ dans $\mathbb{R}^n$.

I-2. Construction d'arcs paramétrés du plan

a. Réduction de l'ensemble d'étude :

Comme pour les fonctions numériques, certaines propriétés de $\vec{f}$ induisent des symétries de la courbe $\mathscr{C}$ et permettent de réduire l'ensemble d'étude.

Périodicité :

Si x et y sont T-périodiques avec $T > 0$ (*i.e.* $t \in D \Leftrightarrow t+T \in D$ et pour tout $t \in D$, $\vec{f}(t+T) = \vec{f}(t)$), alors la courbe est parcourue entièrement quand t décrit l'intersection de D et d'un intervalle de longueur T, par exemple $D \cap [0;T]$ ou $D \cap \left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right]$ (ce dernier cas est souvent préféré pour faire des études de parité).

Symétries :

On peut éventuellement établir des symétries de la courbe si D est symétrique par rapport à 0 et si les fonctions x et y sont paires ou impaires. Si pour tout $t \in D$, $-t \in D$ et :

- $\begin{cases} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = y(t) \end{cases}$, alors la courbe est parcourue deux fois ;
- $\begin{cases} x(-t) = -x(t) \\ y(-t) = y(t) \end{cases}$, alors la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ;
- $\begin{cases} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases}$, la courbe est symétrique par rapport à l'axe des abscisses ;
- $\begin{cases} x(-t) = -x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases}$, alors la courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère ;

- $\begin{cases} x(-t) = y(t) \\ y(-t) = x(t) \end{cases}$, alors la courbe est symétrique par rapport à la première bissectrice d'équation $y = x$.

b. Variations et limites :

Comme pour une fonction numérique usuelle, on étudie les variations (dérivées) et les limites des deux fonctions x et y sur leur ensemble de définition commun (éventuellement réduit). On dresse alors un tableau de variations synthétique.

c. Tangentes :

Définitions :

> On suppose que $t \mapsto \vec{f}(t)$ est dérivable en t_0.
>
> Si $\vec{f}\,'(t_0) \neq \vec{0}$ (i.e. $x'(t_0) \neq 0$ *ou* $y'(t_0) \neq 0$) alors on dit que $M(t_0)$ est un point régulier.
>
> Si $\vec{f}\,'(t_0) = \vec{0}$ (i.e. $x'(t_0) = 0$ *et* $y'(t_0) = 0$) alors on dit que $M(t_0)$ est un point stationnaire ou singulier.
>
> Si tous les points de la courbe sont réguliers, on dit qu'elle est régulière.
>
> On suppose que $t \mapsto \vec{f}(t)$ est deux fois dérivable en t_0.
>
> Si la famille $\left(\vec{f}\,'(t_0), \vec{f}\,''(t_0)\right)$ est libre, on dit que $M(t_0)$ est un point birégulier.
>
> Si tous les points de la courbe sont biréguliers, on dit qu'elle est birégulière.

Définitions :

> On suppose que $t \mapsto \vec{f}(t)$ est définie au voisinage de t_0.
>
> La courbe associée à $\vec{f}$ admet une tangente en $M(t_0)$ si l'on peut trouver une fonction vectorielle $\vec{u}(t)$ telle que $\vec{u}(t)$ soit un vecteur directeur de la corde $\left(M(t_0)M(t)\right)$ et $t \mapsto \vec{u}(t)$ admet une limite finie non nulle quand t tend vers t_0. Cette limite est un vecteur tangent à la courbe au point considéré.
>
> Quand la courbe admet une tangente, la normale à la courbe est la droite perpendiculaire à la tangente au point considéré. Un vecteur normal est un vecteur directeur de la normale à la courbe.

Propriété :

> Si $t \mapsto \vec{f}(t)$ est définie au voisinage de t_0 et $M(t_0)$ est un point régulier, alors la courbe admet une tangente dirigée par $\vec{f}\,'(t_0)$.

Que faire dans le cas d'un point stationnaire ?

1) Quelques fois (voire souvent), $x'(t)$ et $y'(t)$ ont un facteur commun $h(t)$ qui crée l'annulation simultanée des deux dérivées en t_0 et tel que $\lim_{t \to t_0} \frac{1}{h(t)} \vec{f}\,'(t) = \vec{u} \neq \vec{0}$. Ce vecteur $\vec{u}$ dirige alors la tangente.
2) Il y a une propriété qui dit que si $\vec{f}$ est plusieurs fois dérivable en t_0, alors la tangente est dirigée par le premier vecteur $\vec{f}^{(k)}(t_0)$ non nul.

d. Branches infinies :

Définition :

> La courbe associée à une fonction $t \mapsto \vec{f}(t)$ admet une branche infinie s'il existe t_0 (éventuellement infini) tel que $\lim\limits_{t \to t_0} \left\| \vec{f}(t) \right\| = +\infty$.

Plusieurs cas de figure se présentent :

1) $\begin{cases} \lim\limits_{t \to t_0} x(t) = \pm\infty \\ \lim\limits_{t \to t_0} y(t) = y_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$: la courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = y_0$.

2) $\begin{cases} \lim\limits_{t \to t_0} x(t) = x_0 \in \mathbb{R} \\ \lim\limits_{t \to t_0} y(t) = \pm\infty \end{cases}$: la courbe admet une asymptote verticale d'équation $x = x_0$.

3) $\begin{cases} \lim\limits_{t \to t_0} x(t) = \pm\infty \\ \lim\limits_{t \to t_0} y(t) = \pm\infty \end{cases}$: on étudie alors $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)}$.

- Si cette limite est infinie, on dit qu'il y a une branche parabolique (de direction verticale).
- Si cette limite vaut $a \in \mathbb{R}$ alors on dit qu'il y a une direction asymptotique $y = ax$ (ou branche parabolique de direction $y = ax$, horizontale si $a = 0$).
- Si $\lim\limits_{t \to t_0} \left[y(t) - ax(t) \right] = b \in \mathbb{R}$, alors la courbe admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$.

II - Courbes planes

Dans cette partie, on se place dans $\mathbb{R}^2$, appelé le plan, muni de son produit scalaire canonique et de la norme euclidienne associée, et orienté par sa base canonique $\mathcal{B}_c = (\vec{i}, \vec{j})$. On notera $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé correspondant.

II-1. Définition d'une courbe du plan

Une courbe de $\mathbb{R}^2$ peut être définie comme l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $f(x, y) = 0$ avec $f : U \to \mathbb{R}$ et $U \subset \mathbb{R}^2$.

Définition :

> Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$. On appelle ligne de niveau de *f* l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $f(x, y) = k$ avec k constante réelle.

Théorème : *des fonctions implicites (dans le plan)*

> Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U, $\mathscr{C}$ la courbe d'équation cartésienne $f(x, y) = 0$ et $M(x_0, y_0)$ un point de $\mathscr{C}$ tel que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.
>
> Alors, il existe deux intervalles ouverts I et J de $\mathbb{R}$ tels que :
>
> $$I \times J \subset U\,,\ (x_0, y_0) \in I \times J \ \text{ et, pour tout } (x, y) \in I \times J\,,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \neq 0\,,$$
>
> et une application $h : I \to J$ de classe C^1 sur I, telle que pour tout $(x, y) \in I \times J$:
>
> $$f(x, y) = 0 \iff y = h(x).$$

Définitions :

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$, $f: U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U, $\mathscr{C}$ la courbe d'équation cartésienne $f(x,y)=0$ et $M\,(x_0,y_0)$ un point de $\mathscr{C}$.

On dit que M est un point régulier de $\mathscr{C}$ si $\overrightarrow{grad}\, f\,(x_0,y_0) \neq \vec{0}$.

Dans le cas contraire ($\overrightarrow{grad}\, f\,(x_0,y_0) = \vec{0}$), on dit que M est un point singulier de $\mathscr{C}$.

On dit que la courbe $\mathscr{C}$ est régulière si tous ses points sont réguliers.

Propriété : *Paramétrage local de classe* C^1

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$, $f: U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U, $\mathscr{C}$ la courbe d'équation cartésienne $f(x,y)=0$ et $M\,(x_0,y_0)$ un point régulier de $\mathscr{C}$.

Il existe un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ et une fonction $\vec{\varphi}: I \to \mathbb{R}^2$, de classe C^1 sur I et telle qu'au voisinage de $M\,(x_0,y_0)$, la courbe $\mathscr{C}$ est paramétrée par $\vec{\varphi}$, soit $\begin{cases} x(t) = \vec{\varphi}(t).\vec{i} \\ y(t) = \vec{\varphi}(t).\vec{j} \end{cases}$.

II-2. Tangente en un point régulier

Propriété :

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$, $f: U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U, $\mathscr{C}$ la courbe d'équation cartésienne $f(x,y)=0$ et $M\,(x_0,y_0)$ un point régulier de $\mathscr{C}$.

La courbe $\mathscr{C}$ admet une normale en M dirigée par $\overrightarrow{grad}\, f\,(x_0,y_0)$ et une tangente d'équation :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\left(x-x_0\right)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\left(y-y_0\right)=0.$$

Propriété :

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$, $f: U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et $\mathscr{C}$ la courbe d'équation $f(x,y)=0$.

En un point régulier $M\,(x_0,y_0)$, le gradient de f est orienté dans le sens des valeurs croissantes de f, c'est-à-dire qu'au voisinage de $t=0$, $f\left(x_0+t\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), y_0+t\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)-f\left(x_0,y_0\right)$ est du signe de t.

III – Surfaces et courbes de l'espace

Dans cette partie, on se place dans $\mathbb{R}^3$, appelé l'espace, muni de son produit scalaire canonique et de la norme euclidienne associée, et orienté par sa base canonique $\mathcal{B}_c=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On notera $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormé correspondant.

III-1. Définition d'une surface de l'espace

Une surface de $\mathbb{R}^3$ peut être définie comme l'ensemble des points $M\,(x,y,z)$ tels que $f(x,y,z)=0$ avec $f: U \to \mathbb{R}$ et $U \subset \mathbb{R}^3$.

Définition :

Une surface de révolution d'axe D est une surface $\mathscr{S}$ dont l'image par toute rotation d'axe D est elle-même.

Théorème : *des fonctions implicites* (*dans l'espace*)

> Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^3$, $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U, $\mathscr{S}$ la surface d'équation cartésienne $f(x, y, z) = 0$ et $M\,(x_0, y_0, z_0)$ un point de $\mathscr{S}$ tel que $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.
>
> Alors, il existe un ouvert V de $\mathbb{R}^2$ et un intervalle ouvert J de $\mathbb{R}$ tels que :
>
> $$V \times J \subset U \text{ , } (x_0, y_0, z_0) \in V \times J \text{ et, pour tout } \big((x, y), z\big) \in V \times J \text{ , } \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \neq 0 \text{ ,}$$
>
> et une application $h : V \to J$ de classe C^1 sur V, telle que pour tout $\big((x, y), z\big) \in V \times J$:
>
> $$f(x, y, z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = h(x, y) .$$

Définitions :

> Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^3$, $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U, $\mathscr{S}$ la surface d'équation cartésienne $f(x, y, z) = 0$ et $M\,(x_0, y_0, z_0)$ un point de $\mathscr{S}$.
>
> On dit que M est un point régulier de $\mathscr{S}$ si $\overrightarrow{grad}\, f\,(x_0, y_0, z_0) \neq \vec{0}$.
>
> Dans le cas contraire ($\overrightarrow{grad}\, f\,(x_0, y_0, z_0) = \vec{0}$), on dit que M est un point singulier de $\mathscr{S}$.
>
> On dit que la surface $\mathscr{S}$ est régulière si tous ses points sont réguliers.

Définitions :

> Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^3$, $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U, $\mathscr{S}$ la surface d'équation cartésienne $f(x, y, z) = 0$ et $M\,(x_0, y_0, z_0)$ un point régulier de $\mathscr{S}$.
>
> Le plan passant par $M\,(x_0, y_0, z_0)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{grad}\, f\,(x_0, y_0, z_0)$ est appelé plan tangent à la surface $\mathscr{S}$ au point M.
>
> On dit que tout vecteur normal à ce plan est dit normal à la surface en $M\,(x_0, y_0, z_0)$.

III-2. Courbes tracées sur une surface

Si on a une surface $\mathscr{S}$ définie par l'équation cartésienne $f(x, y, z) = 0$, alors toute courbe vérifiant cette équation et une autre est incluse dans $\mathscr{S}$: on dit que la courbe est tracée sur la surface $\mathscr{S}$.

D'une manière générale, une courbe $\mathscr{C}$ est tracée sur une surface $\mathscr{S}$ quand $\mathscr{C} \subset \mathscr{S}$.

Propriété :

> Soient $\mathscr{S}$ une surface d'équation $f(x, y, z) = 0$, avec $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U, ouvert non vide de $\mathbb{R}^3$, $\mathscr{C}$ une courbe paramétrée par $\vec{\varphi} : I \to U$; $t \mapsto \big(x(t), y(t), z(t)\big)$, avec I intervalle de $\mathbb{R}$, tracée sur $\mathscr{S}$, de classe C^1 et régulière. Enfin, soit $M\,(x_0, y_0, z_0)$ un point régulier de $\mathscr{S}$ tel que $M \in \mathscr{C}$ (donc il existe $t_0 \in I$ tel que $\vec{\varphi}(t_0) = \overrightarrow{OM}$).
>
> Alors, la tangente à $\mathscr{C}$ en M est incluse dans le plan tangent à $\mathscr{S}$ en M.

IV - Retour sur la recherche d'extremums

Dans cette partie, U est un ouvert de $\mathbb{R}^p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$ et f est une application de classe C^2 sur U et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Propriété :

> Soient f une application de classe C^2 sur U, un ouvert de $\mathbb{R}^p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$ et a un point critique de f.
>
> - Si $H_f(a) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ (*resp.* $-H_f(a) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$), alors f admet un minimum (*resp.* maximum) local strict en a.
> - Si $H_f(a) \notin S_n^{+}(\mathbb{R})$ (*resp.* $-H_f(a) \notin S_n^{+}(\mathbb{R})$), alors f n'admet pas de minimum (*resp.* maximum) local en a.