Résumé du chapitre 6 : Compléments d'algèbre linéaire

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et on considère E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

I - Produit et somme d'espaces vectoriels

I-1. Produit d'espaces vectoriels

Dans cette partie, on considère $E_1, E_2, \dots, E_p$ des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

Définition :

Le produit cartésien de $E_1, E_2, \dots, E_p$ est l'ensemble noté $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$, tel que :

$$E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p = \{(x_1, x_2, \dots, x_p), \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, x_i \in E_i\}.$$

Propriété :

Muni des lois ci-dessus, $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Propriété :

Si $E_1, E_2, \dots, E_p$ sont de dimension finie, respectivement $n_1, n_2, \dots, n_p$, alors $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$ est de dimension finie qui est $n_1 + n_2 + \dots + n_p$.

I-2. Somme d'espaces vectoriels

a. Somme et somme directe :

Propriété et définition :

Soient $F_1, F_2, \dots, F_p$ des sous-espaces de E (avec $p \in \mathbb{N}^*$).

L'ensemble $\{x_1 + x_2 + \dots + x_p, (x_1, x_2, \dots, x_p) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_p\}$ est un sous-espace vectoriel de E appelé somme de $F_1, F_2, \dots$ et F_p et noté $F_1 + F_2 + \dots + F_p$.

De plus, on dit que la somme est directe s'il y a unicité de la décomposition de tout vecteur x de $F_1 + F_2 + \dots + F_p$ en $x = x_1 + x_2 + \dots + x_p$, avec $x_i \in F_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$.

On note alors $F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_p$.

Propriété :

Si $F_1, F_2, \dots, F_p$ sont des sous-espaces de E (avec $p \in \mathbb{N}^*$), on a :

$$F_1 + F_2 + \dots + F_p = \text{Vect}(F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_p).$$

b. Caractérisation d'une somme directe :Propriété :

Soient $F_1, F_2, \dots, F_p$ des sous-espaces de E (avec $p \in \mathbb{N}^*$).

On a $F_1 + F_2 + \dots + F_p = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_p$ si et seulement si :

$$x_1 + x_2 + \dots + x_p = 0 \text{ avec } x_i \in F_i \text{ pour tout } i \in \llbracket 1, p \rrbracket \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_p = 0.$$

c. Cas de la dimension finie :

Dans cette partie, E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Propriétés et définitions :

Si F est un sous-espace de E et $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ est une base de F , on peut la compléter en une base $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ de E , dite adaptée à F .

Soient $F_1, F_2, \dots, F_p$ des sous-espaces de E (avec $p \in \mathbb{N}^*$) tels que $E = \bigoplus_{i=1}^p F_i$. Si, pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\mathcal{B}_k$ est une base de F_k , alors $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots \cup \mathcal{B}_p$ est une base de E , dite adaptée à la décomposition $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_p$.

Propriété :

Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $n_1, n_2, \dots, n_p$ des entiers naturels non nuls dont la somme vaut n (où p est un entier supérieur ou égal à 2). On pose pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $N_k = n_1 + n_2 + \dots + n_k$

Si, pour tout $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, on pose $F_k = \text{Vect}(e_{N_k+1}, e_{N_k+2}, \dots, e_{N_{k+1}})$, alors $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_{p-1}$.

Propriété :

Soient $F_1, F_2, \dots, F_p$ des sous-espaces de E (avec $p \in \mathbb{N}^*$). On a :

$$\dim \left(\sum_{i=1}^p F_i \right) \leq \sum_{i=1}^p \dim F_i$$

avec égalité si et seulement si la somme est directe.

II - Matrices et endomorphismes

Dans cette partie, E et F sont des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie, respectivement $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

II-1. Matrices et applications linéaires : rappels fondamentaux de première année

Voir les résumés de PCSI.

Définition :

Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables, s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

Propriétés :

- La relation « est semblable à » est une relation d'équivalence dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: elle est réflexive, symétrique et transitive.

- Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E et $u \in \mathcal{L}(E)$, alors $A = M_{\mathcal{B}}(u)$ et $B = M_{\mathcal{B}'}(u)$ sont semblables avec la relation $B = P^{-1}AP$ où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
- Deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ (ou d'un espace E de dimension n) dans des bases différentes.

II-2. Polynôme d'une matrice carrée, d'un endomorphisme

a. Généralités :

Définitions :

Un polynôme de matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la forme :

$$P(A) = \sum_{k=0}^p a_k A^k = a_0 I_n + a_1 A + \dots + a_{p-1} A^{p-1} + a_p A^p$$

avec $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.

Un polynôme d'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme de E de la forme :

$$P(u) = \sum_{k=0}^p a_k u^k = a_0 \text{id}_E + a_1 u + \dots + a_{p-1} u^{p-1} + a_p u^p$$

avec $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.

Propriété :

Si $\mathcal{B}$ est une base de E , alors pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$ et tout $P \in \mathbb{K}[X]$, on a :

$$P(M_{\mathcal{B}}(u)) = M_{\mathcal{B}}(P(u)).$$

Propriétés :

Pour toute $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, on a $(PQ)(A) = P(A)Q(A) = Q(A)P(A)$.

Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$ et tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, on a $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$.

Propriétés :

Soit A et B deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, telles que $B = P^{-1}AP$ avec $P \in GL_n(\mathbb{K})$.

- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, les matrices A^k et B^k sont semblables avec la même matrice de passage P :

$$B^k = P^{-1}A^kP.$$

- Pour tout $f \in \mathbb{K}[X]$, les matrices $f(A)$ et $f(B)$ sont semblables avec la même matrice de passage P :

$$f(B) = P^{-1}f(A)P.$$

b. Polynôme annulateur :

Définitions :

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

- Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on dit que P est un polynôme annulateur de la matrice A si $P(A) = 0_n$.

- Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, on dit que P est un polynôme annulateur de l'endomorphisme u si $P(u) = 0$.

Propriété :

L'ensemble des polynômes annulateurs d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

Propriété :

Toute matrice carrée admet des polynômes annulateurs non nuls.

c. Application au calcul des puissances d'une matrice :

Ce qui suit s'adapte sans mal au calcul des puissances d'un endomorphisme.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur non nul de A . Quitte à diviser par son coefficient dominant, on peut supposer que P est unitaire. Si $P = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \dots + a_1X + a_0$, $P(A) = 0_n$ peut se récrire :

$$A^p = -a_{p-1}A^{p-1} - \dots - a_1A - a_0I_n.$$

Une récurrence simple permet de prouver qu'alors, toute puissance de A est une combinaison linéaire de $I_n, A, \dots, A^{p-1}$.

d. Application au calcul de l'inverse d'une matrice :

Ce qui suit s'adapte sans mal au calcul de la réciproque d'un automorphisme.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P = a_pX^p + \dots + a_1X + a_0 \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de A tel que $a_0 \neq 0$.

Comme $P \neq 0$, $\deg P \geq 1$ et on peut écrire :

$$P(A) = a_pA^p + \dots + a_1A + a_0I_n = 0_n \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} -\frac{a_p}{a_0}A^{p-1} - \dots - \frac{a_1}{a_0}I_n \\ a_0 \end{array} \right) A = I_n.$$

Donc, A est inversible, d'inverse $-\frac{a_p}{a_0}A^{p-1} - \dots - \frac{a_1}{a_0}I_n$.

II-3. Matrices par blocs

Définition :

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On dit que M est définie par blocs si :

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right)$$

avec $A \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{r,p-s}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n-r,s}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_{n-r,p-s}(\mathbb{K})$ où $r \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $s \in \llbracket 1, p \rrbracket$.

On peut généraliser à plus de quatre blocs :

$$M = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,r} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s,1} & A_{s,2} & \cdots & A_{s,r} \end{pmatrix}.$$

En particulier, pour une matrice carrée, on peut parler de matrice diagonale par blocs (*resp.* triangulaire supérieure par blocs, *resp.* triangulaire inférieure par blocs), qui est de la forme :

$$\left(\begin{array}{cccc} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_q \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \text{resp.} \\ \left(\begin{array}{cccc} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,r} \\ 0 & A_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & A_{s-1,r} \\ 0 & \cdots & 0 & A_{s,r} \end{array} \right), \text{ resp.} \\ \left(\begin{array}{cccc} A_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ A_{s,1} & \cdots & A_{s,r-1} & A_{s,r} \end{array} \right) \end{array} \right)$$

avec $A_i \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ pour tout $i \in \llbracket 1, q \rrbracket$.

Propriétés :

Soit deux matrices par blocs $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right)$ et $M' = \left(\begin{array}{c|c} E & F \\ \hline G & H \end{array} \right)$ (les blocs ayant les mêmes dimensions).

On a :

$$\circ \lambda M + \mu M' = \left(\begin{array}{c|c} \lambda A + \mu E & \lambda B + \mu F \\ \hline \lambda C + \mu G & \lambda D + \mu H \end{array} \right).$$

$$\circ M^\top = \left(\begin{array}{c|c} A^\top & C^\top \\ \hline B^\top & D^\top \end{array} \right).$$

$$\circ MM' = \left(\begin{array}{c|c} AE + BG & AF + BH \\ \hline CE + DG & CF + DH \end{array} \right).$$

II-4. Stabilité par un endomorphisme

Définitions et propriété :

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E .

On dit que F est stable par u si $u(F) \subset F$.

Dans ce cas, l'application de F dans F qui à $x \in F$ associe $u(x)$ est un endomorphisme de F , appelé endomorphisme induit par u sur F .

Traduction matricielle de la stabilité d'un sous-espace vectoriel par un endomorphisme :

- Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, F un sous-espace vectoriel de E stable par u et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E où $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de F ($\mathcal{B}$ est une base adaptée à F).

Alors, pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $e_j \in F$ donc $u(e_j) \in F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$, et la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est

de la forme $\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0_{n-p,p} & D \end{array} \right)$, avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$.

- Réciproquement, si $u \in \mathcal{L}(E)$ admet, dans une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E , une matrice de la forme $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0_{n-p,p} & D \end{array} \right)$ avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$ (M est une matrice triangulaire par blocs), alors $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ est stable par u .

Interprétation en termes d'endomorphismes d'une matrice triangulaire ou diagonale par blocs :

- Enfin, soit $u \in \mathcal{L}(E)$ admettant, dans une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E , une matrice diagonale par blocs de

la forme $\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_q \end{pmatrix}$ avec $A_k \in \mathcal{M}_{n_k}(\mathbb{K})$ pour tout $k \in \llbracket 1, q \rrbracket$ (donc $n_1 + n_2 + \dots + n_q = n$). Si on pose

$N_0 = 0$, $N_k = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ pour tout $k \in \llbracket 1, q \rrbracket$ et $F_k = \text{Vect}(e_{N_k+1}, \dots, e_{N_{k+1}})$ pour tout $k \in \llbracket 0, q-1 \rrbracket$, alors tous les F_k sont stables par u .

Propriété :

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Si f et g commutent alors le noyau et l'image de f sont stables par g .

III - Trace

III-1. Trace d'une matrice

Définition :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On appelle trace de A la somme de ses éléments diagonaux, on la note $Tr(A)$ ou $tr(A)$.

Propriétés :

- L'application $tr : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ est une forme linéaire.
- Pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, on a $tr(AB) = tr(BA)$.
- Deux matrices semblables ont même trace.
- Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $tr(A^T) = tr(A)$.

III-2. Trace d'un endomorphisme

Dans cette partie, E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Propriété et définition :

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si $\mathcal{B}$ est une base de E , le scalaire $tr(M_{\mathcal{B}}(u))$ ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ et est appelé trace de u , noté $Tr(u)$ ou $tr(u)$.

Propriétés :

- L'application $tr : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathbb{K}$ est une forme linéaire.
- $\forall (u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$, $tr(uv) = tr(vu)$.