Résumé du chapitre 9 : Calcul différentiel

L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique. On note $(\cdot, \cdot)$ le produit scalaire et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

I - Dérivabilité et opérations sur les fonctions dérivables

Dans cette partie, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $t \mapsto f(t)$ est une fonction définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Remarquons que $\mathbb{C}$ est isomorphe à $\mathbb{R}^2$, donc les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ sont concernées ici. Plus généralement, on peut remplacer $\mathbb{R}^n$ par un espace euclidien E de dimension n .

I-1. Généralités

Définitions :

Soit $a \in I$.

Le taux d'accroissement ou taux de variation de f entre a et t est $\frac{1}{t-a}(f(t) - f(a))$.

On dit que f est dérivable en a si le taux d'accroissement de f entre a et t admet une limite (vectorielle) finie quand t tend vers a . Cette limite, notée $f'(a)$, est appelée dérivée de f en a .

On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I .

Dans ce cas, la fonction $t \mapsto f'(t)$ est appelée fonction dérivée de f .

Propriété et définition :

La fonction f est dérivable en a si et seulement s'il existe $\ell \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$f(t) = f(a) + (t-a)\ell + o_a(t-a).$$

Dans ce cas, le vecteur ℓ est le vecteur dérivé $f'(a)$ et la relation ci-dessus est appelée développement limité d'ordre 1 de f en a .

I-2. Opérations

Propriétés :

Soient f et g deux fonctions définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

- Si f et g sont dérivables en $a \in I$, alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda f + \mu g$ est dérivable en a , de nombre dérivé $\lambda f'(a) + \mu g'(a)$.
- Si f et g sont dérivables sur I , alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda f + \mu g$ est dérivable sur I , de fonction dérivée $\lambda f' + \mu g'$.

Propriété :

Si f et h sont des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}$ respectivement et toutes deux dérivables sur I , alors hf est dérivable sur I et $(hf)' = h'f + hf'$.

Propriétés :

Soient f et g deux fonctions dérivables sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

- Si $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, alors $L \circ f$ est dérivable sur I , de dérivée $L \circ f'$.
- Si B est une application bilinéaire sur $\mathbb{R}^n$, alors la fonction (à valeurs réelles) $B(f, g)$ est dérivable sur I , de dérivée $B(f', g) + B(f, g')$.
- Si M est une application p -linéaire sur $\mathbb{R}^n$ et $f_1, f_2, \dots, f_p$ sont des fonctions dérivables sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, alors la fonction (à valeurs réelles) $M(f_1, f_2, \dots, f_p)$ est dérivable sur I , de dérivée :

$$\sum_{i=1}^p M(f_1, \dots, f_i', \dots, f_p).$$

- Si J est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\varphi: J \rightarrow I$ dérivable, alors $f \circ \varphi$ est dérivable sur J , de dérivée $\varphi' \cdot (f' \circ \varphi)$.

Corollaires :

Soient f et g deux fonctions dérivables sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

- $(f \mid g)$ est dérivable sur I et $(f \mid g)' = (f' \mid g) + (f \mid g')$.
- Si $n = 2$, $\det(f, g)$ est dérivable sur I et $(\det(f, g))' = \det(f', g) + \det(f, g')$.
- $\|f\|$ est dérivable en tout point t de I où $f(t) \neq 0$ et $\|f\|' = \frac{(f' \mid f)}{\|f\|}$.

I-3. Fonctions de classe C^k Définitions :

Soit k un entier naturel non nul.

Si on note $f^{(0)} = f$, on dit que f est k fois dérivable sur I si f est $k-1$ dérivable sur I et sa dérivée $(k-1)^{\text{ième}}$ est dérivable sur I . La dérivée $k^{\text{ième}}$ de f est notée $f^{(k)}$, $\frac{d^k f}{dt^k}$, parfois $D^k f$.

On dit que f est indéfiniment dérivable sur I , si elle est k fois dérivable sur I pour tout entier naturel k .

Pour $0 \leq k \leq \infty$, on dit que f est de classe C^k sur I si f est k fois dérivable sur I et $f^{(k)}$ est continue sur I (si $k < \infty$).

Notation : On note $C^k(I, \mathbb{R}^n)$, l'ensemble des fonctions de classe C^k sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Propriété :

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $t \in I$, on note $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ les coordonnées de $f(t)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, la fonction f est de classe C^k sur I si et seulement les fonctions $f_1, f_2, \dots, f_n$ de sont et dans ce cas, on a $f^{(k)} = f_1^{(k)}e_1 + f_2^{(k)}e_2 + \dots + f_n^{(k)}e_n$.

Propriétés :

Soient $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, f et g deux fonctions de classe C^k sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

- Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda f + \mu g$ est de classe C^k sur I , avec $(\lambda f + \mu g)^{(k)} = \lambda f^{(k)} + \mu g^{(k)}$.
- Si h est une fonction de classe C^k sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors hf est de classe C^k sur I .
- Si $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, alors $L \circ f$ est de classe C^k sur I et $(L \circ f)^{(k)} = L \circ f^{(k)}$.
- Si B est une application bilinéaire sur $\mathbb{R}^n$, alors $B(f, g)$ est de classe C^k sur I , en particulier $(f \mid g)$ et $\det(f, g)$ quand $n = 2$.
- Si J est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\varphi: J \rightarrow I$ de classe C^k , alors $f \circ \varphi$ est de classe C^k sur J .
- $\|f\|$ est de classe C^k en tout point t de I où $f(t) \neq 0$.

II - Equations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2

Dans ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.

II-1. Introduction aux systèmes différentiels (hors programme)**II-2. Résultats généraux**

Dans toute cette partie, on considère l'équation différentielle :

$$(E): y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$$

où a, b et c sont des fonctions continues sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On note $(H): y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$ l'équation homogène associée et $S_{(E)}$ (resp. $S_{(H)}$) l'ensemble des solutions de (E) (resp. de (H)) sur I .

Théorèmes :

- L'ensemble $S_{(H)}$ des solutions de (H) est un sous-espace vectoriel de $C^2(I, \mathbb{K})$, de dimension 2.
- L'équation (E) admet des solutions sur I et si y_p est une solution particulière de (E) , alors :

$$S_{(E)} = \{y_p + y_h \mid y_h \in S_{(H)}\}.$$
- *Théorème de Cauchy-Lipschitz* : Pour $t_0 \in I$ et $(y_0, y'_0) \in \mathbb{K}^2$, le problème de Cauchy formé par (E) et les conditions initiales $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y'_0$, admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
- *Principe de superposition* : Si $c = c_1 + c_2$ où c_1 et c_2 sont deux fonctions continues sur I , alors une fonction f est une solution de (E) sur I si et seulement si $f = f_1 + f_2$ avec f_i solution de $(E_i): y'' + a(t)y' + b(t)y = c_i(t)$ pour $i \in \{1, 2\}$.

II-3. Techniques de résolution

a. Changement de fonction inconnue avec abaissement de l'ordre de l'équation :

On peut chercher deux fonctions c et d , avec c dérivable et d continue sur I , telles que $z = y' + cy$ vérifie $z' + dz = y'' + ay' + by = c$. Une autre technique est possible si on connaît déjà une solution φ de l'équation homogène (H) qui ne s'annule pas sur I . On peut alors chercher une autre solution sous la forme $y = z\varphi$.

b. Changement de variable :

Dans certain cas, un changement de variable permet d'aboutir à une équation plus simple (par exemple, à coefficients constants). Si la variable initiale est t , on pose $u = \varphi(t)$ avec φ bijective et au moins deux fois dérivable sur I . Dans cas, si $t \mapsto y(t)$ est solution, alors on pose $z(u) = y(\varphi^{-1}(u))$.

Il faut alors faire attention aux ensembles de définition (par exemple, il faut que t varie dans $I \subset \mathbb{R}_+^*$ pour pouvoir poser $u = \ln t$).

c. Recherche de solutions développables en série entière :

Tout est dans le titre... Se placer a priori sur un intervalle $] -R, R[$ avec $R > 0$.

III - Fonctions de plusieurs variables

L'étude des limites et de la continuité de fonctions entre deux espaces vectoriels normés (entre autres les fonctions de plusieurs variables à valeurs réelles) a été vue dans le chapitre sur les espaces normés.

Dans toute cette partie, p est un entier naturel non nul, l'espace $\mathbb{R}^p$ est normé (sauf mention contraire, on utilisera la norme euclidienne canonique). On note $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

Enfin, f est une fonction définie sur U , un ouvert de $\mathbb{R}^p$, et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

III-1. Fonctions de classe C^1 a. Dérivée en un point selon un vecteur :

Définition :

Soient deux vecteurs $a \in U$ et $u \in \mathbb{R}^p$ tel que $u \neq 0$.
Si la fonction $t \mapsto f(a + tu)$ est dérivable en 0, on dit que f admet une dérivée en a selon le vecteur u .

b. Dérivées partielles premières :

On note $x_1, x_2, \dots, x_p$ les coordonnées d'un vecteur x de $\mathbb{R}^p$ dans la base canonique $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, \dots, e_p)$.

Définition :

Soit $a \in U$ et $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$.
Si f admet une dérivée en a suivant e_i , on l'appelle dérivée partielle (d'ordre 1) par rapport à x_i , et on la note $\partial_i f(a)$ ou (plus souvent) $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

Propriété :

Soit $a = (a_1, \dots, a_p) \in U$ et $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$.
Si on note $f_i : x \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_p)$ l'application partielle, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = f_i'(a_i).$$

Autrement dit, si elle existe, la dérivée partielle est la dérivée de l'application partielle.

c. Classe C^1 :

Définition :

Soit $a \in U$.

La fonction f est de classe C^1 en a (resp. sur U) si ses dérivées partielles d'ordre 1 en a (resp. sur U) existent et sont continues en a (resp. sur U).

Notation : On note $C^1(U, \mathbb{R})$ (ou $C^1(U)$, si ce n'est pas ambigu) l'ensemble des fonctions de classe C^1 sur U .

Théorème :

Si f est de classe C^1 sur U , alors elle admet en tout point a de U un développement limité d'ordre 1 de la forme :

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^p h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + o_{h \rightarrow 0}(\|h\|)$$

avec $h = (h_1, \dots, h_p)$.

Corollaire 1 :

Une fonction de classe C^1 sur U est continue sur U .

Corollaire 2 :

Si f est de classe C^1 sur U , alors pour tous $a \in U$, $u \in \mathbb{R}^p$ tel que $u \neq 0$:

$$f(a+tu) = f(a) + \left(\sum_{i=1}^p u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right) t + o_{t \rightarrow 0}(t).$$

III-2. Gradient et différentielle

Définitions :

Si f admet des dérivées partielles en a , alors le gradient de f en a est le vecteur $\sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) e_i$, noté $\nabla f(a)$.

La différentielle de f en a , notée $df(a)$, est (quand elle est définie) la forme linéaire sur $\mathbb{R}^p$:

$$df(a) : (h_1, \dots, h_p) \mapsto df(a) \cdot h = (h | \nabla f(a)) = \sum_{i=1}^p h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

avec $h = (h_1 \dots h_p)^\top$.

III-3. Opérations sur les fonctions de classe C^1

a. Opérations usuelles :

Propriétés :

- $(C^1(U, \mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel stable par produit.
- Si f et g sont deux fonctions de classe C^1 sur U telles que g ne s'annule pas sur U , alors $\frac{f}{g}$ est de classe C^1 sur U .

b. Règle de la chaîne :*Propriété : (règle de la chaîne)*

Si f est de classe C^1 sur U et $\varphi: I \rightarrow U; t \mapsto (\varphi_1(t), \dots, \varphi_p(t))$ est une application de classe C^1 sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors $f \circ \varphi$ est de classe C^1 sur I avec pour tout $t \in I$:

$$(f \circ \varphi)'(t) = \sum_{i=1}^p \varphi_i'(t) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(t)) = (\varphi'(t) | \nabla f(\varphi(t))).$$

Corollaire :

Si f est de classe C^1 sur U (ouvert de $\mathbb{R}^2$ ici) et $\varphi: (u, v) \mapsto (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v))$ est une application de classe C^1 sur un ouvert V de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans U , alors $F = f \circ \varphi$ est de classe C^1 sur V avec :

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u, v)) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u, v)) \\ \frac{\partial F}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u, v)) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u, v)) \end{cases}$$

Dans le plan ($\mathbb{R}^2$), les coordonnées polaires sont (r, θ) avec :

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

où (x, y) sont les coordonnées cartésiennes.

L'application $(r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et, avec $f(x, y) = F(r, \theta)$, les formules de la propriété ci-dessus s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial r} = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial F}{\partial \theta} = -r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y} \end{cases}$$

D'où l'on peut tirer :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial F}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial F}{\partial \theta} \end{cases}$$

c. Inégalité des accroissements finis :*Propriété : Inégalité des accroissements finis*

On suppose que U est un ouvert convexe de $\mathbb{R}^p$, f est de classe C^1 sur U et qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in U$, on a $\|\nabla f(x)\| \leq M$. Alors, pour tous $a, b \in U$:

$$|f(a) - f(b)| \leq M \|a - b\|.$$

Corollaire :

On suppose que U est un ouvert convexe de $\mathbb{R}^p$ et que f est de classe C^1 sur U .
Alors, f est constante sur U si et seulement si $\nabla f = 0$ sur U .

III-4. Extremum local, globalDéfinitions :

On dit que f admet un maximum (resp. minimum) local en a si, au voisinage de a , $f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(x) \geq f(a)$).

On dit que f admet un maximum (resp. minimum) global en a si, pour tout $x \in U$, $f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(x) \geq f(a)$).

Dans les deux cas, on parle d'extremum local ou global.

Si f admet des dérivées partielles sur U , on dit que a est un point critique si $\nabla f(a) = 0$, autrement dit, si $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$.

Propriété :

Si f est de classe C^1 sur U et admet un extremum (local ou global) en a , alors a est un point critique.

III-5. Recherche d'extremums

Pour déterminer les extremums d'une fonction de classe C^1 , on procède en deux étapes.

- On cherche les points critiques dans U .
- En chaque point critique a , on détermine si on est en présence d'un extremum ou pas.
Pour cela, on peut faire un développement limité en 0 de $\varphi_u : t \mapsto f(a + tu) - f(a)$ avec u un vecteur fixé non nul de $\mathbb{R}^p$. Comme U est ouvert est $a \in U$
Si, quels que soit le vecteur u de $\mathbb{R}^p$, le premier terme du développement limité est toujours du même signe, alors on a un extremum *local* : un minimum si ce terme est positif, un maximum sinon.

III-6. Fonctions de classe C^2

Les dérivées partielles d'ordre 2 ou secondes sont les dérivées partielles des dérivées partielles.

Elles sont notées $\partial_{i,j}^2 f$ ou (plus souvent) $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ (pour $\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)$) et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ (pour $\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$).

Définition :

On dit qu'une fonction f est de classe C^2 sur U si f est de classe C^1 sur U , ainsi que toutes ses dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Notation : On note $C^2(U, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe C^2 sur U et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Propriété :

$(C^2(U, \mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel stable par produit et quotient quand il est défini.

Théorème (de Schwarz) :

Si f est de classe C^2 sur U , alors pour tous $i, j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on a $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$.

III-7. Équations aux dérivées partielles

Comme pour les fonctions d'une variable, on peut chercher à résoudre des équations différentielles dont l'inconnue est une fonction de plusieurs variables et mettant en jeu les dérivées partielles d'ordre 1, 2, ou plus de la fonction.

III-8. Matrice hessienneDéfinition :

Soit f une fonction de classe C^2 sur U et $a \in U$.

La matrice $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{1 \leq i, j \leq p}$ est appelée matrice hessienne de f en a , notée $H_f(a)$.

Théorème : (formule de Taylor-Young à l'ordre 2)

Si f est de classe C^2 sur U , alors elle admet en tout point a de U un développement limité d'ordre 2 de la forme :

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + h^\top \nabla f(a) + \frac{1}{2} h^\top H_f(a) h + o_{h \rightarrow 0}(\|h\|^2) \\ &= f(a) + (h \mid \nabla f(a)) + \frac{1}{2} (h \mid H_f(a) h) + o_{h \rightarrow 0}(\|h\|^2) \end{aligned}$$

avec $h = (h_1 \dots h_p)^\top$.