

Stage de pré-rentree

Exercice 1 : Symboles Σ et Π

On note :

- $\sum_{k=p}^n a_k = a_p + a_{p+1} + \dots + a_n$ avec toujours $p \leq n$.
- $\prod_{k=p}^n a_k = a_p \times a_{p+1} \times \dots \times a_n$ avec toujours $p \leq n$.
- $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n = \prod_{k=1}^n k$ ($n!$ se lit « n factoriel » ou « factoriel n »).

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer les sommes et produits suivants.

- 1) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$ en remarquant que $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.
- 2) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ en cherchant trois réels a, b et c tels que $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$.
- 3) Avec $u_n = (-2)^n$:

a. $\sum_{k=0}^n u_k$	b. $\sum_{k=1}^n u_k$	c. $\sum_{k=0}^{2n} u_k$	d. $\sum_{k=n}^{2n} u_k$	e. $\sum_{k=0}^n u_{2k}$
f. $\sum_{k=0}^n (u_k + n)$	g. $\sum_{k=0}^n u_k + n$	h. $\sum_{k=0}^n (u_k + k)$	i. $\sum_{k=0}^n u_{k+n}$	j. $\sum_{k=0}^n u_{nk}$
- 4) $P_n = \prod_{k=1}^n (1 + v_k)$ avec :

a. $v_n = -\frac{1}{n+1}$	b. $v_n = -\frac{1}{(n+1)^2}$	c. $v_n = -\frac{2}{(n+1)(n+2)}$
---------------------------	-------------------------------	----------------------------------
- 5) $\sum_{k=0}^n kx^k$. ☺ On pourra dériver la fonction polynomiale $x \mapsto f(x) = \sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + \dots + x^n$.

Problème 1 : Un problème d'analyse

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f(x) = \frac{x e^x}{e^x - 1}.$$

On appelle $\mathcal{C}$ la courbe de f dans un repère orthonormé.

Partie A : Etude de fonction

- 1) Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2) On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)e^{-x} - 1 + \frac{1}{2} \int_0^x t^2 e^{-t} dt$.

a. Montrer que h est la fonction nulle et en déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2} e^x \int_0^x t^2 e^{-t} dt.$$

b. En déduire que :

- $\forall x \in \mathbb{R}_+, 0 \leq e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} \leq \frac{x^3}{6} e^x$ ($\odot \forall t \in \mathbb{R}_+, 0 \leq e^{-t} \leq 1$) ;
- $\forall x \in \mathbb{R}_-, \frac{x^3}{6} \leq e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} \leq 0$ ($\odot \forall x \in \mathbb{R}_-, \forall t \in [x, 0], 0 \leq e^{-t} \leq e^{-x}$).

c. En déduire que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2}$, puis que $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{-x} - 1 + x}{x^2} e^x \right) = \frac{1}{2}$.

d. Montrer alors que f est dérivable en 0 et donner $f'(0)$.

e. Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

3) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f'(x)$.

4) A l'aide de la question 2.c, montrer que f' est continue sur $\mathbb{R}$. On dit que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

5) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x - 1 - x \geq 0$, avec égalité seulement en 0.

En déduire le sens de variation de f .

6) Construire le tableau de variations complet de f (limites incluses).

7) Que peut-on déduire pour $\mathcal{C}$ de la limite de f en $-\infty$?

8) On pose $g(x) = f(x) - x$. Déterminer la limite de g en $+\infty$. En déduire que $\mathcal{C}$ admet en $+\infty$ une asymptote oblique Δ que l'on précisera.

9) Déterminer la position relative de $\mathcal{C}$ et Δ .

10) Tracer $\mathcal{C}$ en représentant tous les éléments graphiques obtenus plus haut.

Partie B : Etude d'une suite récurrente

Dans cette partie, on définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1) A l'aide de la partie A, déterminer le sens de variation de u .

2) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle ? Justifier.

3) Déterminer la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Partie C : Etude d'une suite implicite

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver que l'équation $f(nx) = n$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$. On note cette solution x_n . Que vaut x_1 ?

2) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = 1 - e^{-nx_n}$. En déduire que $x_n \in [0, 1[$.

3) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)x_{n+1} > nx_n$.

4) Déduire des deux questions précédentes que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

5) Prouver que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 1.

Exercice 2 : La série harmonique

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

- 1) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En remarquant que pour tout réel $t \in [k, k+1]$, on a $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$, montrer que :

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}.$$

- 2) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - 1 \leq \ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Puis que :

$$\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln n.$$

- 3) En déduire la limite de $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et celle de $\left(\frac{H_n}{\ln n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

- 4) On pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$.

- a. Déterminer le sens de variation de $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

- b. Par un raisonnement analogue à celui des questions précédentes, montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \ln 2$.

- 5) On pose $u_n = H_n - \ln n$. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante, puis qu'elle converge.

La limite de u est appelée constante d'Euler et notée γ .

Exercice 3 : Equations différentielles

- 1) Soient h une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et a un réel fixé. On considère l'équation différentielle :

$$(E): y' + ay = h.$$

- a. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = e^{ax} f(x)$.

Après avoir justifié que g est bien dérivable sur $\mathbb{R}$, montrer que f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = e^{ax} h(x)$.

- b. Déterminer alors toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ (en faisant apparaître $x \mapsto \int_0^x e^{at} h(t) dt$).

- 2) On considère maintenant l'équation différentielle :

$$(E'): y'' - 3y' + 2y = 0.$$

- a. Déterminer les solutions de l'équation $r^2 - 3r + 2 = 0$.

- b. Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On pose $g = f' - f$.

Après avoir justifié que g est dérivable sur $\mathbb{R}$, montrer que f est solution de (E') sur $\mathbb{R}$ si et seulement si g est solution de (E'') : $z' - 2z = 0$ sur $\mathbb{R}$.

- c. Résoudre (E'') , puis (E') à l'aide de la question 1.

Exercice 4 : Probabilités

Le tarot se joue à quatre ou parfois à trois joueurs, avec un jeu de 78 cartes : les 52 cartes usuelles, plus quatre cavaliers (un de chaque couleur), plus 21 atouts (numérotés de 1 à 21), plus une carte spéciale appelée « excuse ». On appelle « bouts », les trois cartes suivantes : le 1 et le 21 d'atout et l'excuse.

Réaliser une donne consiste à distribuer toutes les cartes aux trois ou quatre joueurs, sauf quelques cartes (6 quand on joue à quatre et 3 quand on joue à trois) que l'on laisse initialement au milieu. Ces cartes forment ce que l'on nomme le « chien ».

- 1) Calculer la probabilité qu'il y ait au moins un bout dans le chien quand on joue à quatre joueurs.
- 2) Même question quand on joue à trois joueurs. Que constate-on ?
- 3) Que se passe-t-il si on joue à cinq joueurs avec un chien de 6 cartes ?
- 4) On joue 10 parties d'affilées à quatre joueurs. Les donnes sont supposées indépendantes les unes des autres (on mélange les cartes à l'issue de chaque parties).
 - a. Quelle est la probabilité qu'il n'y ait jamais de bout dans le chien lors des 10 tours ?
 - b. Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins une fois un bout dans le chien ?
 - c. Quelle est la probabilité qu'il y ait cinq fois un bout dans le chien ?
 - d. En moyenne, pour combien de parties sur 10 y aura-t-il au moins un bout dans le chien ?

Problème 2 : Intégrales de Wallis et formule de Stirling

Partie A : Les intégrales de Wallis

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t \, dt$.

- 1) Justifier que I_n est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 2) Calculer I_0 et I_1 .
- 3) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.
- 4) Prouver par récurrence sur p que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $I_{2p} > 0$ et $I_{2p+1} > 0$.
- 5) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Evaluer $\prod_{k=0}^{p-1} \frac{I_{2(k+1)}}{I_{2k}}$. En déduire que $I_{2p} = \frac{\pi}{2} \frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2}$.
- 6) Déterminer, pour tout $p \in \mathbb{N}$, I_{2p+1} en fonction de p .
- 7) Prouver que pour tout entier naturel n , $(n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}$.
- 8) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$.
- 9) Prouver que la suite $(I_n \sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Partie B : La formule de Stirling

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^n \ln k - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n + n$ et, pour $x \in [1, +\infty[$, $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

- 1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = 1 - f(n)$.
- 2) En dérivant deux fois, montrer que f est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$.
- 3) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et en déduire le sens de variation strict de la suite u .
- 4) On a admet que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est positive. Justifier alors qu'elle converge vers une limite ℓ .
- 5) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = e^{u_n}$. Justifier que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et donner sa limite L en fonction de celle de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
- 6) Montrer que $n! = v_n \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ et en déduire, à l'aide de la partie A, que $\frac{v_p^2}{v_{2p}} \rightarrow \sqrt{2\pi}$, puis que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} = \sqrt{2\pi}.$$

Ce résultat s'appelle la formule de Stirling.