

TD du chapitre 10 : Intégration sur un intervalle
Exercice 1

1) Déterminer la nature des intégrales suivantes :

a. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2 - 1} dt$

b. $\int_0^1 \frac{dx}{\arccos x}$

c. $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^a (\ln t)^b} \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2$

d. $\int_1^{+\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{1 + \frac{1}{x}} - a - \frac{b}{x} \right] dx \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2$

e. $\int_0^{+\infty} \sin^2 x \, dx$

f. $\int_0^{+\infty} e^{it^2} dt$

g. $\int_0^{+\infty} \cos(e^x) dx$

h. $\int_0^{+\infty} x^3 \sin(x^8) dx$

2) Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx$ et retrouver la convergence de l'intégrale de Dirichlet.

Exercice 2

Convergence, éventuellement suivant la valeur du ou des paramètre(s), et calcul de :

a. $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^2} dt$

b. $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^3}$

c. $\int_0^1 \frac{x \ln x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

d. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan x} \, dx$

e. $\int_0^{+\infty} (\sqrt{t} + a\sqrt{t+1} + b\sqrt{t+2}) dt \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2$

f. $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t)(1+at)}} \quad (a \in \mathbb{R})$

g. $\int_0^1 t \left[\frac{1}{t} \right] dt$

h. $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^\lambda)} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

i. $\int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{E(x)}}{x} dx$

j. $\int_0^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx$ où $0 < a < b$ et f est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

k. $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt$. ☺ Montrer que $\int_0^x \frac{t-1}{\ln t} dt = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt$, puis justifier que $\frac{x}{t \ln t} \leq \frac{1}{\ln t} \leq \frac{x^2}{t \ln t}$ pour $t \in [x^2, x]$.

Exercice 3

Dans chaque cas suivant, justifier que F est définie sur D et déterminer un équivalent simple de F en a .

1) $F : x \mapsto \int_0^1 \frac{dt}{t^3 + x^2}$, $D = \mathbb{R}_+^*$ et $a = +\infty$.

2) $F : x \mapsto \int_x^1 \frac{dt}{(\arctan t)^2}$, $D = \mathbb{R}_+^*$ et $a = 0$.

☺ On pourra montrer que $f : t \mapsto \frac{1}{t^2} - \frac{1}{(\arctan t)^2}$ est intégrable sur $]0, 1]$.

3) $F : x \mapsto e^{x^2} \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$, $D = \mathbb{R}$ et $a = +\infty$.

4) $F : x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$, $D = \mathbb{R}_+^*$ et $a = 0$.

Exercice 4

Soit f une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

- 1) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+1} f(t) dt = 0$.
- 2) On suppose ici que f est continue en 0. Montrer $\lim_{x \rightarrow 0} x \int_x^1 \frac{f(t)}{t^2} dt = f(0)$.
- 3) On suppose ici que f est à images dans $\mathbb{R}$ et décroissante. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = 0$.

☺ On pourra utiliser $g(x) = \int_x^{2x} f(t) dt$.

- 4) On suppose ici que f est continue sur $[1, +\infty[$. On pose $u(x) = \frac{1}{x^2} \int_1^x f(t) dt$ et $v(x) = \frac{f(x)}{x}$.

Montrer que u et v sont intégrables sur $[1, +\infty[$ et que $\int_1^{+\infty} u = \int_1^{+\infty} v$.

Exercice 5

Soit l'équation différentielle $(E): y' - y = \ln x$.

- 1) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.
- 2) Existe-t-il des solutions bornées ?

Exercice 6

Soit $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que f^2 et $(f'')^2$ soient intégrables sur $\mathbb{R}$.

Montrer que $(f')^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que $\left(\int_{\mathbb{R}} (f')^2 \right)^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}} f^2 \right) \left(\int_{\mathbb{R}} (f'')^2 \right)$.

☺ On pourra prouver que $\lim_{-\infty} f' f = \lim_{+\infty} f' f = 0$.

Exercice 7

Soit $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $R_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$.

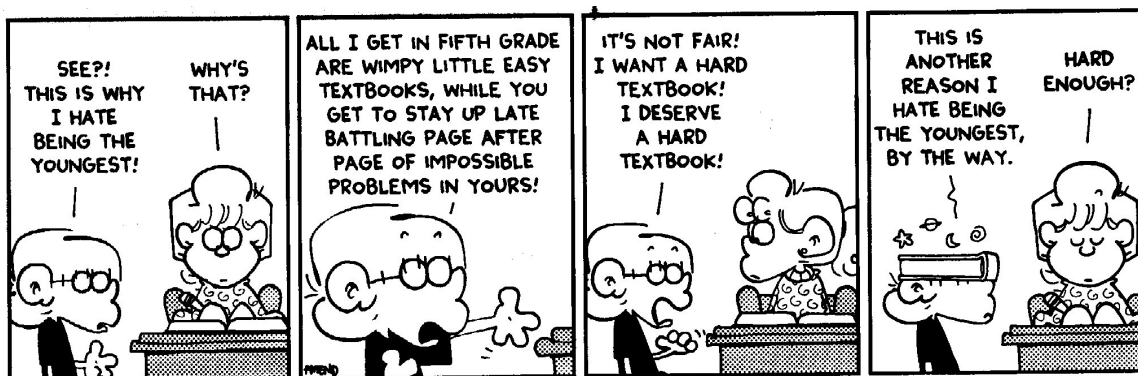
- 1) On prend ici $f(x) = \ln x$. A-t-on $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(f) = \int_0^1 f(t) dt$?
- 2) On suppose ici que f est monotone, que $\int_0^1 f(t) dt$ converge et $\lim_{x \rightarrow 0} x f(x) = 0$.

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(f) = \int_0^1 f(t) dt$.

Exercice 8

On note $L^2(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies sur I , à valeurs dans $\mathbb{R}$, continues par morceaux et de carré intégrable sur I , autrement dit telles que $\int_I f^2$ converge.

- 1) Justifier que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a $|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$.
- 2) Montrer que, uni des lois usuelles, $L^2(I, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
- 3) Prouver que l'application $(f, g) \mapsto \int_I fg$ est un produit scalaire sur $L^2(I, \mathbb{R}) \cap C^0(I, \mathbb{R})$.



Exercice 9 (Mines)

Soit l'équation différentielle :

$$(E): y'' - e^x y = 0.$$

On considère f une solution non nulle de (E) sur $\mathbb{R}_+$.

- 1) Montrer que f s'annule au plus une fois sur $\mathbb{R}_+$.

On suppose que $f(0) = f'(0) = 1$.

- 2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \geq x+1$.

- 3) On pose $g(x) = f(x) \int_x^{+\infty} \frac{dt}{f(t)^2}$.

Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}_+$, qu'elle y est de classe C^2 , solution de (E) et bornée.

Exercice 10 (Centrale)

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{\ln(1-x)} dx$.

On pose, pour tout $x \in]0,1[$, $f(x) = -\frac{x}{\ln(1-x)}$, $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$.

- 1) Prouver que f est continue, positive et décroissante sur $[0,1]$.

- 2) Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et l'étudier.

- 3) Déterminer un équivalent simple de I_n .

☺ Pour $n \geq 3$, on pourra poser $a_n = 1 - \frac{\ln n}{n+1}$ et $b_n = 1 - \frac{1}{(n+1) \ln n}$, et écrire :

$$-I_n = \int_0^{a_n} x^n f(x) dx + \int_{a_n}^{b_n} x^n f(x) dx + \int_{b_n}^1 x^n f(x) dx.$$

- 4) Déterminer la nature de $\sum I_n$.

