

TD du chapitre 11 : Intégrales à paramètre
Exercice 1

Soit $f \in C([0,1], \mathbb{K})$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 f(t^n) dt$.

Après avoir justifié qu'elle est bien définie, déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 2

Soit $\sum a_n$ une série complexe absolument convergente. Pour tout réel x , on pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$.

Montrer que S est bien définie sur $\mathbb{R}$, que $I = \int_0^{+\infty} S(x) e^{-x} dx$ converge et vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Exercice 3 (Deux techniques de calcul d'intégrale)

1) On pose $I = \int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt$.

a. Justifier que I est bien définie.

b. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} t e^{-(n+1)t}$.

c. Calculer $\int_0^{+\infty} t e^{-(n+1)t} dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire I .

2) On pose $J(x) = \int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln t} dt$.

a. Montrer que J est définie et de classe C^1 sur $] -1, +\infty[$ et donner J' .

b. En déduire $J(x)$ pour tout $x > -1$.

Exercice 4

Etudier $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2 + e^{-xt}}$.

Exercice 5

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $f(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{t+x} dt$.

1) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $g(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{t+x} dt - \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{x} dt$.

Montrer que $g(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et en déduire un équivalent simple de $f(x)$ en $+\infty$.

3) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $h(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{t+x} dt - \int_0^{\pi/2} \frac{1}{t+x} dt$.

Etudier $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ et en déduire un équivalent simple de $f(x)$ en 0.

Exercice 6 (Intégrale de Gauss)

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$ et $G(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2$.

- 1) Montrer que pour tout F et G sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donner F' et G' .
- 2) Montrer que la fonction $F + G$ est constante sur $\mathbb{R}$.
- 3) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ et en déduire l'intégrale de Gauss : $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.
- 4) Calculer alors $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$.

Exercice 7 (Transformée de Laplace)

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}_+$, et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Pour tout $f \in E$, on pose :

$$\mathcal{L}(f) : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{C} ; x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt.$$

- 1) Montrer que pour tout $f \in E$, $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- 2) Soit $f \in E$, donner la limite de $\mathcal{L}(f)$ en $+\infty$.
- 3) Vérifier que $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ se prolonge par continuité en une fonction g de E .
Calculer $\mathcal{L}(g)'$ et en déduire $\mathcal{L}(g)$.

Exercice 8 (Fonction gamma)

Pour tout réel $s > 0$, On pose $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$.

- 1) Montrer que Γ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et de classe C^∞ sur cet intervalle.
- 2) Prouver que pour tout réel $s > 0$, on a $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$.
- 3) Calculer $\Gamma(1)$, $\Gamma(m)$ pour $m \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(1/2)$, $\Gamma(m+1/2)$ pour $m \in \mathbb{N}$.
- 4) Montrer qu'il existe un réel $\alpha \in]1, 2[$ tel que $\Gamma'(\alpha) = 0$. Prouver que Γ' est croissante et en déduire les variations de Γ sur $\mathbb{R}_+^*$. Construire alors le tableau de variation complet de Γ . On donnera un équivalent simple de Γ en 0.

- 5) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0; m]$, $\left(1 - \frac{x}{m}\right)^m \leq e^{-x}$. Montrer que $\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{x}{m}\right)^m = e^{-x}$.

- 6) Montrer que $\int_0^m \left(1 - \frac{x}{m}\right)^m x^{s-1} dx = \frac{m! m^s}{s(s+1)\dots(s+m)}$, pour tout réel $s > 0$ et pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.

☉ On faire une intégration par parties et prouver que $\int_0^1 (1-t)^m t^{s-1} dt = \frac{m}{s+m} \int_0^1 (1-t)^{m-1} t^{s-1} dt$.

- 7) Montrer que pour tout réel $s > 0$, $\Gamma(s) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{m! m^s}{s(s+1)\dots(s+m)}$.

- 8) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \int_n^{n+1} \ln(\Gamma(t)) dt$. Donner la nature de $\sum \frac{(-1)^n}{u_n}$.

☉ On pourra utiliser $\varphi : x \mapsto \int_x^{x+1} \ln(\Gamma(t)) dt$.

Exercice 9

Montrer que pour tout réel $x > 0$, on a $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x} dt$.

Exercice 10

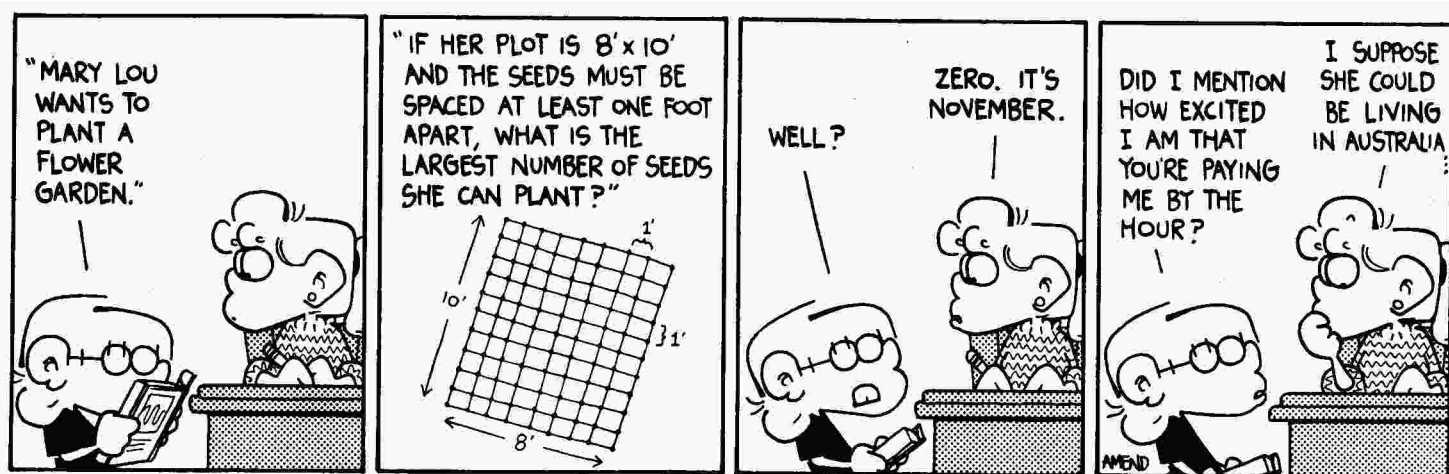
Soit $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

1) Soit $g : (x, y) \mapsto \int_0^y \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt - \int_0^x \frac{\partial f}{\partial y}(t, 0) dt$. Montrer que $g \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et vérifie :

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial y}.$$

2) On définit sur $\mathbb{R}_+$ l'application $\Phi : r \mapsto \int_0^{2\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta$. Montrer que Φ est de classe C^1 et calculer sa dérivée.

3) En déduire que si f possède un extremum local en $(0, 0)$, alors f est constante au voisinage de $(0, 0)$.

**Exercice 11 (Mines)**

Montrer que pour tout réel $x > 0$, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} \arctan\left(\frac{x}{t}\right) dt = \int_0^x \frac{\ln t}{t^2-1} dt$.

Exercice 12 (Centrale)

Soient $f \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, croissante et telle que $f(0) > 0$, et $\phi \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que ϕ' est décroissante et strictement positive, $\phi(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = +\infty$.

On suppose en outre qu'il existe un réel $t_0 > 0$ tel que $\int_{\mathbb{R}_+} e^{-t_0 \phi(x)} f(x) dx$ existe.

Pour tout réel $t > t_0$, on pose $F(t) = \int_0^{+\infty} e^{-t \phi(x)} f(x) dx$. On cherche un équivalent de F quand $t \rightarrow +\infty$.

1) Prouver que F est bien définie sur $[t_0, +\infty[$.

2) On suppose dans cette question que $\phi = id$.

a. Montrer que pour tout réel $\alpha > 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{\alpha}^{+\infty} e^{-t \phi(x)} f(x) dx = 0$, puis que $\lim_{t \rightarrow +\infty} t \int_{\alpha}^{+\infty} e^{-t \phi(x)} f(x) dx = 0$.

b. En déduire que $F(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{f(0)}{t}$.

3) Dans le cas général, montrer que $F(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{f(0)}{t \phi'(0)}$.

☺ On utilisera un changement de variable que l'on justifiera.

